

DK 539.41.01

Določanje napetostnega stanja v stenah z odprtini z aproksimativno metodo*

MARKO SKERLJ

Uvod

V elastomehaniki sestavlja večino problemov — povrhnost nastavitve ustreznih diferencialnih enačb — še njihova rešitev v danih robnih ali začetnih pogojih. Eksaktno reševanje je ponavadi mogoče samo v primerih najenostavnejših robnih pogojev, in še to z uporabo tolikšnega znanja matematike, da presega izobrazbo večjega dela tehniškega osebja. Analitične metode reševanja zajemajo zato samo majhen del problemov, ki se pojavljajo v vsakdanji praksi. Ob njih pa je ogromno število problemov, ki jim s kako bolj eksaktno analitično metodo še nismo prišli do živega. V vseh takih primerih smo primorani zatekati se k aproksimativnim metodam reševanja, ki bolj ali manj ustrezajo robnim pogojem kakor tudi natančnosti dobljenih rezultatov.

Približne metode reševanja diferencialnih enačb in robnih pogojev lahko načelno razdelimo v dve večji skupini. V prvo spadajo metode, ki dajo iskane funkcije v približnih analitičnih izrazih. Sem lahko prištejemo (razen vrste drugih) morda najbolj znano Ritzovo metodo. Kljub veliki uporabnosti pa te metode vendar terjajo, da poznamo analitične izraze za robove in robne pogoje.

V drugo skupino približnih metod spadajo numerične metode, ki so bolj univerzalne in uporabne tudi v primerih, v katerih druge metode odpovedujejo. Med numeričnimi metodami zavzema nedvomno diferenčna metoda najvidnejše mesto. V tej razpravi bomo skušali nakazati vsestransko uporabnost tega načina računanja in ga razširiti na nekatera dozdaj manj obdelana področja.

Slaba stran diferenčne metode je slej ko prej ta, da z njo ne dobivamo splošnih rešitev, temveč moramo ponoviti račun za vsak posamezen primer.

Diferenčna metoda

Če v poljubni diferencialni enačbi zamenjamo diferencialne količnike z diferenčnimi, če preidemo torej od neskončno majhnih h končnim količinam, smo namesto diferencialne enačbe dobili diferenčno enačbo. S tem smo pridobili to, da lahko večkrat zelo težaven, če ne sploh nemogoč proces integriranja diferencialne enačbe obidemo in ga spremenimo v reševanje sistema diferenčnih enačb. Ta sistem je sestavljen iz linearnih enačb, če so tudi

diferencialna enačba in robni pogoji linearni, in reševanje ne povzroča posebnih težav. V nasprotnem primeru, ko rešujemo nelinearno enačbo ali nelinearne robne pogoje, pa v splošnem ni mogoče dati kakih zaključkov o rešljivosti sistema.

Celotno območje, v katerem iščemo numerične vrednosti funkcije, razdelimo s poljubno mrežo na določeno število posameznih točk in za vsako postavimo diferenčno enačbo. S tem dobimo toliko enačb, kolikor je neznanih funkcijskih vrednosti. Čim večje je število točk, čim gostejša je torej mreža, tem natančnejša bo slika funkcijskega poteka. V praksi prihaja največkrat v poštev ortogonalna mreža, včasih pa tudi poševnokotna.

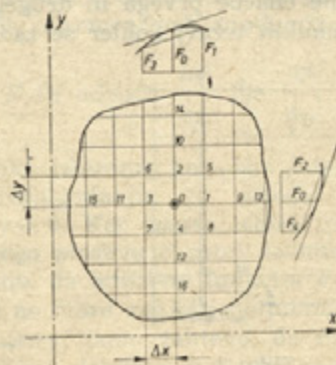
Nekatere enačbe tega sistema so homogene, druge pa nehomogene zaradi uvajanja robnih pogojev. Zato ima sistem takih diferenčnih enačb vedno rešitev.

Poseben problem v elastomehaniki so stabilizacijski kriteriji, kjer imamo opravka s samimi homogenimi enačbami.

Diferenčni količniki v ortogonalni mreži

Ker se bomo v tem sestavku ukvarjali samo z dvoosnimi ravninskimi problemi, navašamo samo tiste diferenčne količnike, ki jih bomo pri reševanju uporabljali. Iz literature [1] so znani izrazi za diferenčne količnike v ortogonalni mreži z ekvidistančnimi mrežnimi razdaljami Δx v smeri abscise in Δy v smeri ordinate (sl. 1).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &\approx \left(\frac{\Delta F}{\Delta x} \right)_0 = \frac{F_1 - F_3}{2 \Delta x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &\approx \left(\frac{\Delta F}{\Delta y} \right)_0 = \frac{F_2 - F_4}{2 \Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



Slika 1

* Članek je izveček iz obširnejše razprave, ki je bila izdelana na pobudo Titovih zavodov Litostroj. Delo sta materialno podprla omenjena tovarna in Sklad Borisa Kidriča.

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\Delta^2 F}{\Delta x^2} \right)_0 &= \frac{F_3 - 2F_0 + F_1}{\Delta x^2} \\ \left(\frac{\Delta^2 F}{\Delta y^2} \right)_0 &= \frac{F_2 - 2F_0 + F_4}{\Delta y^2} \\ \left(\frac{\Delta^2 F}{\Delta x \Delta y} \right)_0 &= \frac{F_5 - F_6 + F_7 - F_8}{4 \Delta x \Delta y} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\Delta^4 F}{\Delta x^4} \right)_0 &= \frac{6F_0 - 4(F_1 + F_3) + (F_5 + F_{11})}{\Delta x^4} \\ \left(\frac{\Delta^4 F}{\Delta y^4} \right)_0 &= \frac{6F_0 - 4(F_2 + F_4) + (F_{11} + F_{12})}{\Delta y^4} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left(\frac{\Delta^4 F}{\Delta x^2 \Delta y^2} \right)_0 = \frac{4F_0 - 2(F_1 + F_2 + F_3 + F_4) + (F_5 + F_6 + F_7 + F_8)}{\Delta x^2 \Delta y^2} \quad (4)$$

Ti izrazi so osnova za nastavitve diferenčnih enačb, s katerimi bomo imeli opraviti v nadaljnjem. Z njimi lahko izpeljemo še oba Laplaceova operatorja

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$\Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}$$

ki dobimo z uvedbo zgornjih diferenčnih količnikov v primeru kvadratne mreže $\Delta x = \Delta y = h$ obliko

$$(\Delta F)_0 \approx \frac{1}{h^2} (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - 4F_0) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (\Delta \Delta F)_0 \approx \frac{1}{h^4} & \left[20F_0 - 8(F_1 + F_2 + F_3 + F_4) + \right. \\ & + 2(F_5 + F_6 + F_7 + F_8) + \\ & \left. + (F_9 + F_{10} + F_{11} + F_{12}) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Robni pogoji

Kakor smo omenili že v uvodu, moramo seveda pri reševanju diferenčnih enačb zadostiti še robnim pogojem, ki so vnaprej podani z vrednostmi iskane funkcije na robovih.

Diferenčne enačbe prvega in drugega reda ne povzročajo nikakih težav, dokler se zadovoljimo z

diferenčnimi količniki v prvi aproksimaciji. Iz enačb (1) in (2) izhaja namreč, da se razen neznanke v zahtevani točki (točka 0) pojavljajo samo še vrednosti funkcije v točkah, ki so za eno mrežno razdaljo oddaljene od točke 0. Če nastavljamo torej diferenčno enačbo za točko, ki je najbližja robu, se bo v tej enačbi pojavila tudi znana vrednost funkcije na robu.

Nekoliko težavnejša pa je nastavitve diferenčnih enačb za točke blizu roba pri problemih, ki terjajo enačbe višjega reda (tretjega in četrtega), kakor tudi v primerih, ko se pri enačbah nižjega reda ne zadovoljimo s prvo aproksimacijo diferenčnih količnikov. V vseh teh primerih se namreč pojavljajo tudi točke, ki so zunaj roba. Vrednost funkcije v teh točkah pa ponavadi niso znane. Zato zahtevamo še dodaten robni pogoj, in sicer tega, da moramo povrhu funkcijske vrednosti poznati na robu še naklonski kot. Ponavadi je dodatni robni pogoj podan z odvodom funkcije po normali k robu.

Iz literature [3] je znano, da lahko s tem odvodom po normali in funkcijsko vrednostjo znotraj konture izrazimo tudi funkcijsko vrednost v točki zunaj konture (sl. 2)

$$F_9 = F_0 + 2h \left(\frac{\partial F}{\partial n} \right)_1 \quad (7)$$

Vrednost F_9 smo s tem izrazili približno s pomočjo naklona sekante skozi točki 0 in 9 namesto natančne vrednosti naklona tangente v točki 1. Neznana količina F_9 tako ne zahteva vpeljave nove neznanke.

Če je v točki 1 tangenta vodoravna in je zato

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n} \right)_1 = 0, \text{ bo tudi}$$

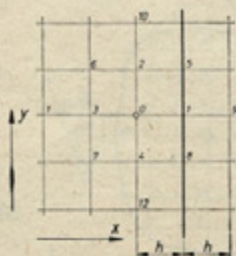
$$F_9 = F_0 \quad (8)$$

V primerih, ko se mrežna črta ne ujema z robom, pa veljata glede na sl. 3 naslednji enačbi [7]

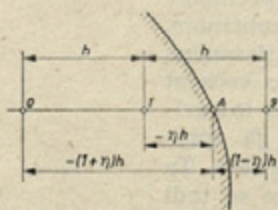
$$F_1 = F_A \frac{1 + 2\eta}{(1 + \eta)^2} + F_0 \frac{\eta^2}{(1 + \eta)^2} - \frac{h\eta}{1 + \eta} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_A$$

$$F_9 = F_A \frac{4\eta}{(1 + \eta)^2} + F_0 \frac{(1 - \eta)^2}{(1 + \eta)^2} + \frac{2(1 - \eta)h}{1 + \eta} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_A$$

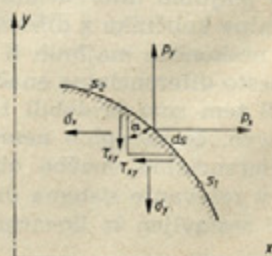
S tema dvema enačbama so torej vrednosti napetostne funkcije v točkah 1 in 9 izražene z vrednostima v 0 in A.



Slika 2



Slika 3



Slika 4

Robni pogoji pri stenah

Stene imenujemo take ravne nosilne elemente, ki imajo eno dimenzijo (debelino) veliko manjšo od drugih dveh in so obremenjeni s silami, ki delujejo samo v njihovi ravnini. Pri taki obremenitvi ostane srednja ravnina stene plana, napetost pa se po debelini stene ne spreminja.

Znano je, da lahko napetostno stanje v steni definiramo z uvedbo napetostne (Airyjeve) funkcije $F = F(x, y)$; ta je povezana z napetostmi ravninskega napetostnega stanja z relacijami

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \text{in} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

ki zadoščajo ravnotežnima pogojema in dajo skupaj s Hookovim zakonom in kompatibilitetnim pogojem znano biharmonično enačbo (če zanemarimo volumenske sile)

$$\Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (10)$$

Za rešitev te enačbe potrebujemo še robne pogoje. Če so podane na robu napetosti, lahko pišemo glede na sliko 4 [2]

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{s_1}^{s_2} p_x ds + C_1 = f_1(s) + C_1 = Q_x \quad (11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\int_{s_1}^{s_2} p_y ds + C_2 = -f_2(s) + C_2 = Q_y$$

$$F = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \right) = \\ = \int_{s_1}^{s_2} \left[-f_2(s) dx + f_1(s) dy \right] + C_1(y_2 - y_1) + \\ + C_2(x_2 - x_1) + C_3$$

Pri stenah z enkrat sovisnim območjem (ki so omejene z eno samo konturo) lahko konstante C_1 , C_2 in C_3 opustimo, ker tako ne vplivajo na velikosti napetosti, ki so definirane z drugim odvodom napetostne funkcije. Enačbi (11) tudi povesta, da sta parcialna odvoda enaka rezultirajočim prečnim silam na odseku s_1 do s_2 .

Zadnjo enačbo lahko zato pišemo

$$F = \int_{s_1}^{s_2} (x_1 - x_2) p_y ds - \int_{s_1}^{s_2} (y_1 - y_2) p_x ds \quad (12)$$

Iz te enačbe izhaja, da lahko robno vrednost napetostne funkcije F izrazimo z momentom robnih sil

na danem loku s_1 do s_2 , glede na končno točko s_2 . Torej ima lahko F na robu predpisane vrednosti.

Iz enačb (11) pa vidimo, da bo vzdolž neobremenjenega roba funkcijska vrednost konstantna.

Podaljšajmo zdaj lok $s_1 s_2$ v zaprto krivuljo tako, da točka s_2 sovpada s točko s_1 . V primeru, da odvoda po obhodu krivulje ne dosežeta začetnih vrednosti, dobimo kot rezultat neko prečno silo in moment. To pa je možno samo takrat, če je stena obremenjena še s kakimi obremenitvami znotraj zunanje konture, npr. vzdolž nekega notranjega roba.

V splošnem so napetosti enolično določene, če je znana napetostna funkcija. Ne velja pa to za določanje te funkcije iz znanih napetosti. Če obstajajo namreč v neki točki napetosti σ_x , σ_y in τ_{xy} , tedaj se da z njihovo pomočjo določiti napetostna funkcija do aditivne funkcije

$$F_0 = \alpha x + \beta y + \gamma \quad (13)$$

v kateri so α , β in γ konstante. Že iz same definicije napetostne funkcije (enačbe 9) je razvidno, da je nešteto funkcij, ki dajo enake napetosti, med seboj pa se razlikujejo za omenjeno aditivno funkcijo F_0 .

Le-ta, kakor je že rečeno, ne vpliva na napetosti pri enkrat sovisnih območjih. Če si namreč predstavljamo napetostno funkcijo F kot prostorsko ploskev, katere robne ordinate so podane z enačbo (12), tedaj pade takoj v oči, da povzroča spreminjanje funkcije F_0 samo spremembo lege ploskve F glede na ravnino x, y ; ne spreminjajo se pa ukrivljenosti ploskve in z njimi povezane napetosti.

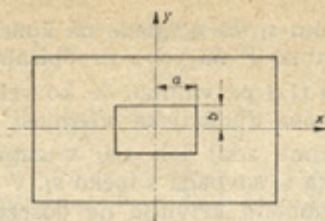
Omembe vredno je še, da se v izvedenih enačbah za funkcijo F in njene odvode nikjer ne pojavljajo elastične konstante materiala (modul elastičnosti in Poissonovo število). Ta ugotovitev je važna, ker zelo poenostavlja eksperimentalno verifikacijo rezultatov.

Robni pogoji pri stenah z večkrat sovisnimi območji

Pri steni z večkrat sovisnim območjem imamo nasploh toliko robnih pogojev, kolikor je posameznih zaključenih kontur. Na zunanjem robu dobimo pri znanih obremenitvah vrednosti za napetostno

funkcijo F in odvode $\frac{\partial F}{\partial x}$ ter $\frac{\partial F}{\partial y}$. Pri tem dolo-

čanju lahko izbiramo poljubne integracijske konstante. Najugodnejše je seveda, če jemljemo $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ker smo z izbiro teh konstant že določili lego ploskve F proti ravnini x, y , postane takoj jasno, da aditivna funkcija F_0 na notranjih konturah ne more več biti poljubna. Za njeno določanje uporabljamo zahtevo, da morajo biti pomiki enolično določene funkcije koordinat x in y .



Slika 5

V našem primeru ravninskega stanja morata torej pomika u in v po enkratnem obhodu konture doseči spet začetni vrednosti.

Iz teh dveh pogojev izhajajo tri enačbe [7]

$$\iint \Delta \Delta F \, dx dy = 0 \quad (14)$$

$$\iint x \Delta \Delta F \, dx dy = 0 \quad (15)$$

$$\iint y \Delta \Delta F \, dx dy = 0 \quad (16)$$

v katerih se integrali nanašajo na ploskev odprtine v steni.

Te tri enačbe zadoščajo za določanje treh neznanih konstant α , β in γ v aditivni funkciji F_0 na notranji konturi. Če imamo več odprtin v steni, moramo seveda za vsako posebej nastaviti tri take enačbe in z njimi določati funkcijo F_0 za vsako konturo.

V posameznih enostavnejših primerih pa so nekatere konstante v enačbi (13) odvečne in se računanje poenostavlja.

Predpostavimo, da imamo pravokotno steno s simetrično pravokotno odprtino (sl. 5). V primeru, da je obremenitev po zunanjem robu simetrična npr. glede na y os, tedaj izhaja iz enačbe (13), ki predstavlja na zgornjem robu (pri $y = b$) premico, da mora biti $\alpha = 0$. Enako povzemamo, da je v primeru simetrične obremenitve glede x osi konstanta $\beta = 0$. To se pravi, da povzroča dvojno simetrična obremenitev na dvojno simetrični steni napetostno funkcijo na neobremenjenem notranjem robu

$$F_n = \gamma = \text{konst.} \quad (17)$$

Če nastavimo enačbo (15) v primeru simetrije glede y osi, vidimo, da je enačba identično izpolnjena; prav tako enačba (16) pri simetriji glede x osi. Za določanje konstante ostane torej samo še enačba (14).

Z analognim razmišljanjem povzemamo, da povzroča antisimetrična obremenitev simetrične stene avtomatično izpolnitev enačbe (14) ter obliko napetostne funkcije na notranjem robu

$$F_n = \alpha x + \beta y \quad (18)$$

Za določanje obeh konstant v tej enačbi pa imamo na razpolago dva pogoja (15) in (16).

V primerih, ko je zunanji rob neobremenjen in je obremenjen samo notranji, lahko predpostavimo, da je vrednost napetostne funkcije na zuna-

njem robu nič. Na notranjem robu pa ima napetostna funkcija obliko

$$F_n = F + \alpha x + \beta y + \gamma \quad (19)$$

kjer pomeni F del napetostne funkcije, ki ga na znani način dobimo iz danih napetosti na notranjem robu.

Približno reševanje napetostnega stanja v stenah z odprtinami

Izsledki, ki so bili nakazani v prejšnjih poglavjih, omogočajo, da z diferenčno metodo rešujemo poljubno obremenjeno steno poljubne oblike. Kakor je znano, je osnovni problem v tem, da za dan primer določimo napetostno funkcijo, iz nje pa napetosti.

Vrednosti napetostne funkcije v točkah obremenjene ali neobremenjene konture določamo s pomočjo enačb (11) in (12). Celotno steno razdelimo z mrežo v poljubno število posameznih točk. Pri tem izbiramo gostoto mreže glede na zahtevano natančnost rezultatov. Za funkcijsko vrednost v vsaki točki nastavimo enačbo (6), za določanje treh konstant v aditivni funkciji (13) pa imamo na razpolago tri enačbe (14), (15) in (16), ki jih prevedemo v diferenčno obliko

$$\begin{aligned} \iint \Delta \Delta F \, dx dy &\approx \sum \Delta \Delta F = 0 \\ \iint x \Delta \Delta F \, dx dy &\approx \sum x \Delta \Delta F = 0 \\ \iint y \Delta \Delta F \, dx dy &\approx \sum y \Delta \Delta F = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

V teh enačbah se sumiranje nanaša na polje znotraj odprtine.

Tako dobimo sistem diferenčnih enačb s prav toliko neznankami, kolikor je enačb.

Reševanje sistema diferenčnih enačb

Za reševanje sistema diferenčnih enačb, ki ga za določen primer dobimo po dozdej opisanem načinu, je na izbiro več poti.

a) V najenostavnejših primerih, ko ni potrebna posebna natančnost in imamo opravka pri dvoosnih problemih z grobo mrežo s samo nekaj točkami, je reševanje sistema diferenčnih enačb enostavno in hitro privaja do rezultatov. Tako direktno reševanje prihaja seveda v poštev samo v primerih, kadar je število enačb majhno.

b) Kakor koli je že diferenčna metoda enostavna, pa postaja pri večjem številu enačb neugodna, ker troši njihovo reševanje ogromno časa. Delo si lajšamo in pospešujemo lahko z metodo sukcesivne aproksimacije [3]. Vsekakor prihaja ta metoda v poštev samo pri reševanju enostavnih diferenčnih enačb, odpoveduje pa pri enačbah višjega reda, npr. pri biharmonični.

c) Veliko večjega pomena pa je postalo reševanje problemov s pomočjo diferenčnih enačb z vpekljavo relaksacijske metode [7], ki je v bistvu tudi

metoda postopnega približevanja. Ta metoda je pravzaprav — razen računanja z elektronskim računalnikom — edin praktično možen način za reševanje večjega števila tudi bolj kompliciranih diferencialnih enačb.

Postopek pri relaksacijski metodi je tak, da predpostavimo neke poljubne funkcijske vrednosti v posameznih točkah. S temi vrednostmi nastavljene enačbe (6) pa ne izpolnjujejo pogoja $F = 0$, temveč dobimo v vsaki točki neki ostanek

$$(\Delta\Delta F)_i = R_i$$

Prav tako tudi enačbam (20) s temi predpostavljenimi vrednostmi ni zadoščeno, temveč do-

bivamo v splošnem tri ostanke

$$\sum \Delta\Delta F = R_\gamma$$

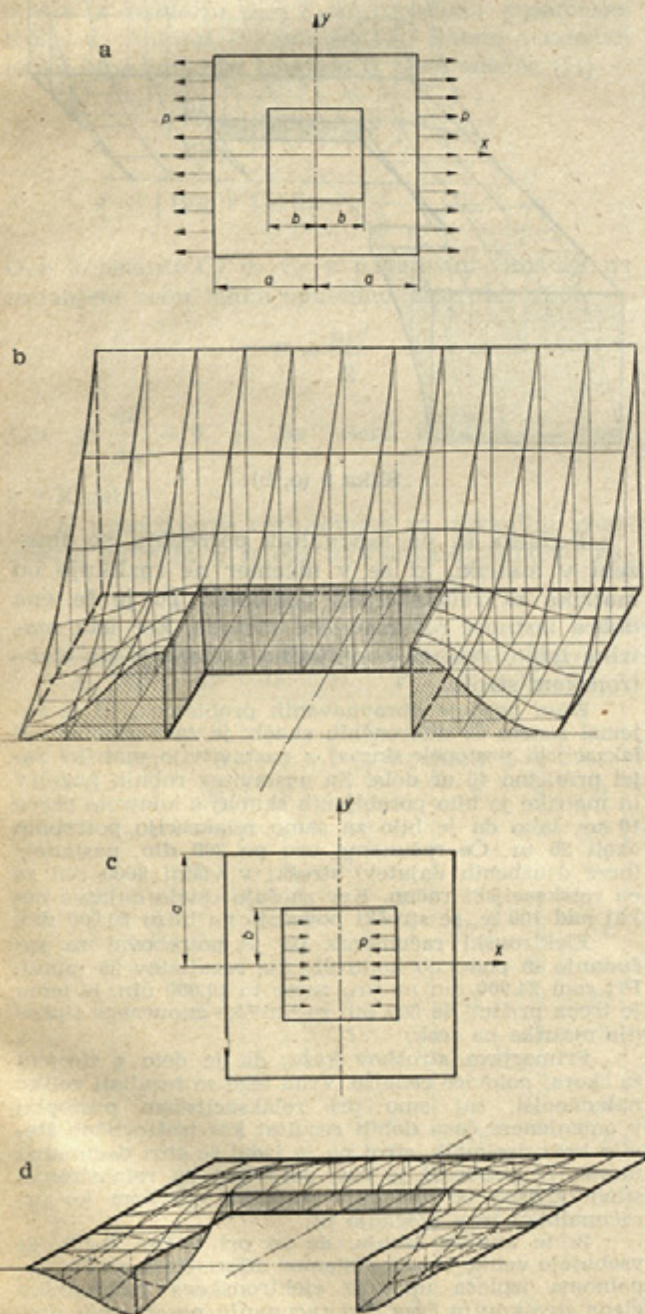
$$\sum x\Delta\Delta F = R_\alpha$$

$$\sum y\Delta\Delta F = R_\beta$$

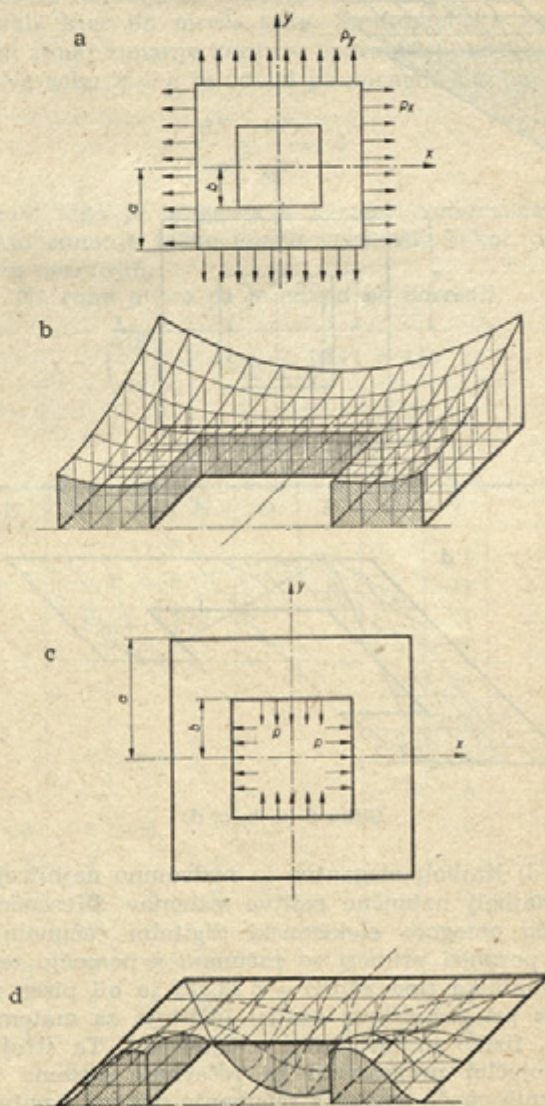
Pravo rešitev napetostne funkcije dobimo takrat, ko z relaksacijo pripeljemo do nič vse ostanke R_i kakor tudi ostanke R_α , R_β in R_γ .

Relaksacijski postopek bo tem krajši, čim natančneje so zadete začetne funkcijske vrednosti. Zato je zelo koristno, če poznamo vsaj približen potek napetostne funkcije že vnaprej.

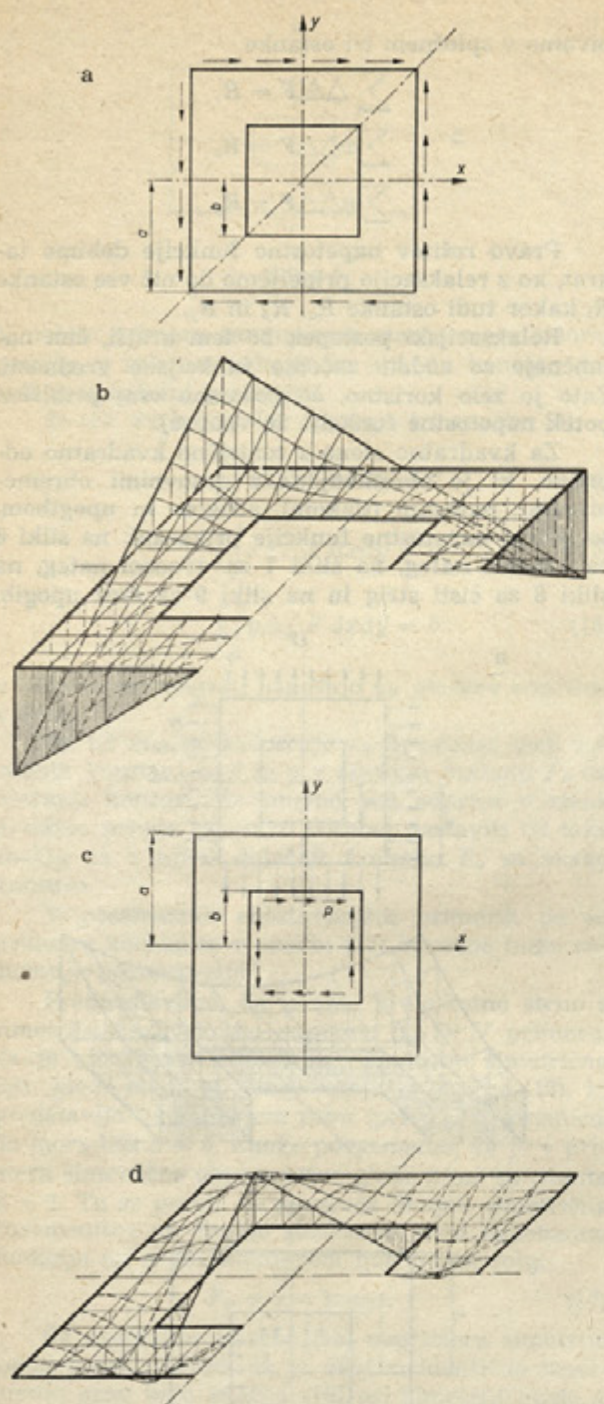
Za kvadratno steno s centrično kvadratno odprtino, ki je obremenjena z osnovnimi obremenitvami: nategom (tlakom), strigom in upogibom, so poteki napetostne funkcije prikazani: na sliki 6 za enoosni nateg, na sliki 7 za dvoosni nateg, na sliki 8 za čisti strig in na sliki 9 za čisti upogib.



Slika 6 (a, b, c, d)

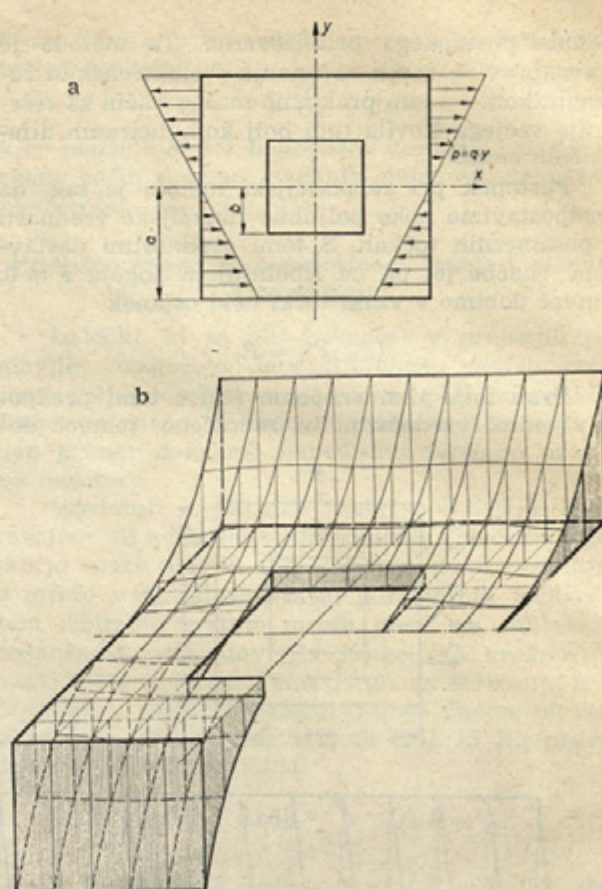


Slika 7 (a, b, c, d)



Slika 8 (a, b, c, d)

d) Najbolj elegantne in nedvomno najhitrejše in najbolj natančne rešitve sistemov diferenčnih enačb omogoča elektronski digitalni računalnik. Vsi poznejši primeri so računani s pomočjo tega računalnika tipa ZUSE—Z 23, ki je bil piscu na voljo pri računskem centru Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko v Ljubljani. Ta stroj z obstoječim programom za reševanje sistema linearnih enačb omogoča računanje sistema z največ 78 enačbami, kar zadošča za grobe račune v večini enostavnejših primerov.



Slika 9 (a, b)

Podatki, ki jih računalnik potrebuje, so obsežni v matriki, ki se v ničemer ne razlikuje od matrike za relaksacijski postopek. To je še ena dobra lastnost relaksacijske metode, ker ista matrika lahko rabi za eventualno računanje na elektronskem stroju.

Eden pozneje obravnavanih problemov, ki je za jeman sistem 66 diferenčnih enačb, je za normalen relaksacijski postopek skupaj z nastavitvijo matrike zajel približno 40 ur dela. Za nastavitve robnih pogojev in matrike je bilo porabljenih skupaj s kontrolo okrog 10 ur, tako da je bilo za samo relaksacijo potrebnih okoli 30 ur. Če računamo uro po 300 din, nastanejo (brez družbenih dajatev) stroški v višini 9000 din za en relaksacijski račun. Ker znašajo ostale dajatve nekaj nad 100 %, se stroški povečajo na blizu 20.000 din.

Elektronski računalnik pa je potreboval za računanje in ponovno kontroliranje rezultatov 25 minut. Pri ceni 24.000 din na uro zneso to 10.000 din. K temu je treba prišteti še 500 din za stroške enournega tipkanja matrike na trak.

Primerjava stroškov kaže, da je delo s strojem za skoraj polovico cenejše. Vrh tega so rezultati veliko natančnejši, saj smo pri relaksacijskem postopku v omenjenem času dobili rezultat kot troštevilično število brez decimalk, stroj pa je izdal še štiri decimalna mesta. In naposled je čas, porabljen za relaksiranje, silno odvisen od začetnih vrednosti, medtem ko pri računalniku tega tveganja ni.

Iz te analize izhaja, da se pri večjih delih, ki vsebujejo veliko število sistemov diferenčnih enačb, popolnoma izplača uporaba elektronskega računalnika glede stroškov in časa. Pri računanju posameznih problemov, zlasti tedaj, kadar niso potrebni zelo natančni

rezultati, pa bo zaradi preobremenitve tega, za zdaj našega edinega stroja ostal relaksacijski postopek nadvse pomemben.

Podrobnejša obravnava z enoosnim nategom obremenjene kvadratne stene s centrično kvadratno odprtino

Pri taki steni (sl. 6a) lahko zaradi dvojne simetrije opazujemo samo eno četrtino celotnega lika. Predpostavimo na dveh nasproti ležečih zunanjih straneh enakomerno porazdeljeno natežno napetost $p = 10 \text{ kp/cm}^2$. Razmerje stranic zunanje in notranje konture naj bo npr. $a/b = 11/5 = 2,2$. Razdelimo si steno z relativno grobo kvadratno mrežo z razdaljo $h = 2$ in označimo posamezne točke z velikimi črkami (sl. 10). Robne vrednosti napetostne funkcije izhajajo iz prve enačbe (11)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int p dy = py + C_1$$

$$F = \int (py + C_1) dy = \frac{py^2}{2} + C_1 y + C_2$$

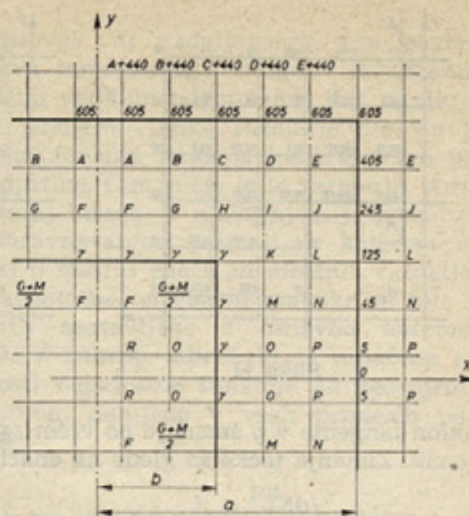
Obe konstanti C_1 in C_2 v napetostni funkciji na zunanjem robu lahko opustimo, tako da ostane

$$F = \frac{py^2}{2}$$

Ker je $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, je na vsem robu $y = a$ tudi

$F = \text{konst.}$

S tema dvema rezultatoma in izbranimi vrednostmi za p in y lahko izračunamo velikosti na-



Slika 10

petostne funkcije na robovih $x = a$ in $y = a$ v vseh točkah, kjer jih mreža seka. Za funkcijske vrednosti zunaj zunanje konture uporabimo enačbo (7).

Na robu $x = a$ je odvod po normali k robu

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

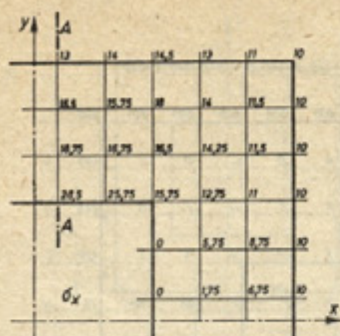
Zaradi tega je tangenta v x smeri vodoravna in imajo zunanje točke enake vrednosti kakor prva vrsta notranjih.

Na robu $y = a$ pa je odvod po normali

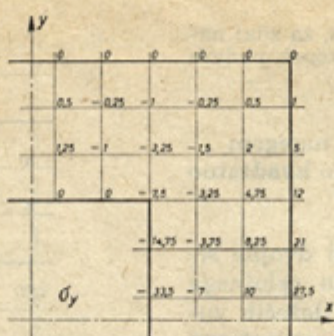
$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_a = p(y)_a = 10 \cdot 11 = 110$$

Tabela 1

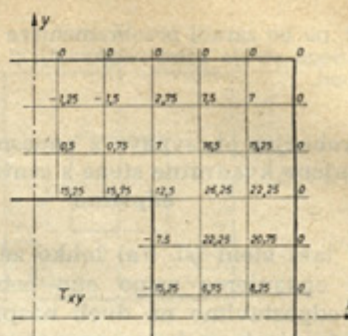
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	R	Y	
A	-13	7	-1			6	-2											-1	+1980
B	7	-21	8	-1		-2	8	-2										-1	+1980
C	-1	8	-21	8	-1		-2	8	-2									-1	+1980
D		-1	8	-21	8			-2	8	-2	-1								+1575
E			-1	8	-22				-2	8		-1							+4730
F	6	-2				-13	7	-1										4	-605
G	-2	8	-2			7	-20.5	8	-1				-0.5					4	-605
H		-2	8	-2		-1	8	-20	8	-1	-2							5	-605
I			-2	8	-2		-1	8	-20	8	8	-2	-1					-2	-850
J				-2	8			-1	8	-21	-2	8		-1					+295
K				-1				-2	8	-2	-20	8	8	-2	-1			5	-125
L					-1				-2	8	8	-21	-2	8		-1		-1	+420
M							-0.5		-1		8	-2	-0.5	8	7	-2		4	-45
N										-1	-2	8	8	-21	-2	7		-1	100
O											-1		7	-2	-13	6		4	-5
P												-1	-2	7	6	-13		-1	-60
R						5	-1						-1		5		-6	-2	
Y						3	5						5		3		-2	-14	



Slika 11



Slika 12



Slika 13

Ta naklon tangente v y smeri je po vsem zgornjem robu enak. Zunanje točke so glede na enačbo (7)

$$A' = A + 2h \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_a = A + 2 \cdot 2 \cdot 110 = A + 440$$

$$B' = B + 440$$

S tem so robni pogoji na zunanjem robu definirani. Notranji rob je neobremenjen. Zato je po enačbi (17)

$$F_R = \gamma = \text{konst.}$$

in sta tudi oba parcialna odvoda nična. Iz tega izhaja, da so funkcijske vrednosti v robu najbližjih točkah enake vrednostim v točkah polja stene. Za točko, ki je najbližja vogalu, pa brez večje napake lahko jemljemo srednjo vrednost točk G in M .

Sliko 10 dopolnimo še s sosednjimi točkami čez obe simetrali (koordinatni osi). Zaradi simetrije sta na njih tangenti vodoravni in se točke ponavljajo v enakem zaporedju.

Za sestavljanje matrike je treba nastaviti biharmonično enačbo (10) v diferenčni obliki (6) v vsaki točki mreže; za nastavitve enačbe (14) pa še prav take diferenčne enačbe v mrežnih točkah odprtine. Ker je enačba (10) homogena, je pred oklepajem koeficient $1/h^4$ odveč. Pri stvari se tudi nič ne spremeni, če jo pomnožimo z -1 .

Tako je diferenčna enačba za točko A

$$-13A + 7B - C + 6F - 2G - \gamma + 1980 = 0$$

za točko B pa

$$7A - 21B + 8C - D - 2F + 8G - 2H - \gamma + 1980 = 0$$

Enako dobimo še enačbe za ostale točke. Povrh 16 enačb za vse točke v polju stene imamo še enačbo za neznano velikost v točki R v odprtini in pa enačbo za γ , ki jo dobimo s seštevanjem vseh štirih enačb znotraj odprtine, kakor je treba po prvi enačbi (20).

Ves sistem 18 enačb s prav toliko neznankami je prikazan v obliki matrike (tab. 1).

Groba rešitev tega sistema enačb je dobljena z relaksacijskim postopkom, ki ga tu ne navajamo, temveč podajamo le rezultate

$A = 411$	$G = 284$	$M = 162$
$B = 413$	$H = 285$	$N = 87$
$C = 414$	$I = 273$	$O = 155$
$D = 411$	$J = 255$	$P = 60$
$E = 407$	$K = 192$	$R = 213$
$F = 279$	$L = 149$	$\gamma = 222$

Iz tako dobljene napetostne funkcije izračunamo lahko napetosti s pomočjo izrazov (9), ki jih pretvorimo v diferenčno obliko (2).

Za primer navedimo npr. napetost σ_x v točki A

$$\sigma_{xA} = \frac{605 - 822 + 279}{4} = 15,5 \text{ kp/cm}^2$$

S slik 11, 12 in 13 so razvidne tako izračunane napetosti v vseh točkah stene.

Rezultate lahko kontroliramo s pomočjo zahteve, da mora biti v poljubnem prerezu izpolnjen pogoj ravnotežja. Če vzamemo ravnotežje v smeri x osi, je pri debelini stene 1 cm sila na desnem zunanjem robu

$$P = 11 \cdot 10 = 110 \text{ kp}$$

Povprečna napetost σ_x v prerezu $A-A$ je

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{4} (13 + 15,5 + 18,75 + 28,5) = 18,9 \text{ kp/cm}^2$$

in sila na tem prerezu

$$P_A = 6 \cdot 18,9 = 113 \text{ kp}$$

Kakor vidimo, se obe vrednosti prav dobro ujemata.

V kakih drugih prerezech so odstopki lahko nekoliko večji, posebno če se s prerezom približujemo notranjemu vogalu. Vzrok za to je zmanjšana natančnost funkcijskih vrednosti in s tem tudi napetosti v tej okolici, ker smo za najbližjo notranjo mrežno točko vzeli povprečno vrednost.

S sl. 13 je tudi razvidno, da je največja strižna napetost v tem obremenitvenem primeru $\tau_{xy} = 26,25 \text{ kp/cm}^2$.

Primerjava največje napetosti σ_{xm} , ki nastaja na notranjem robu, s povprečno napetostjo v istem prerezu $A-A$, ki bi jo dobili, če bi računali po najenostavnejšem trdnostnem računu (tj. če bi upoštevali samo nateg z luknjo oslabiljenega prereza) kaže, da je napaka tako poenostavljenega računa 51 %, ker je

$$\frac{\sigma_{xm}}{\sigma_x} = \frac{28,5}{18,9} = 1,51$$

Največja napetost σ_{ym} po sl. 12 pa je še nekoliko večja od napetosti σ_{xm} . Zato si z zgornjo primerjavo ne moremo dosti pomagati. Ugodnejše je, da si ustvarimo dva koeficienta, ki bosta podala razmerji med obema največjima napetostima proti osnovni obremenitvi

$$\varphi_x = \frac{\sigma_{xm}}{p} \quad \varphi_y = \frac{\sigma_{ym}}{p}$$

Včasih je zanimiva tudi primerjava največje napetosti na zunanem ali pa notranjem robu proti osnovni obremenitvi. Tako pridemo do dveh koeficientov povečanja napetosti na zunanem robu

$$\varphi_x^z = \frac{\sigma_{xm}^z}{p} \quad \varphi_y^z = \frac{\sigma_{ym}^z}{p}$$

dveh na notranjem robu

$$\varphi_x^n = \frac{\sigma_{xm}^n}{p} \quad \varphi_y^n = \frac{\sigma_{ym}^n}{p}$$

ter enega razmerja med največjo strižno napetostjo in osnovno obremenitvijo

$$\varphi_{xy} = \frac{\tau_{xym}}{p}$$

V našem primeru je

$$\begin{aligned} \varphi_x^z &= \frac{14,5}{10} = 1,45 & \varphi_y^z &= \frac{27,5}{10} = 2,75 \\ \varphi_x^n &= \frac{28,5}{10} = 2,85 & \varphi_y^n &= -\frac{33,5}{10} = -3,35 \\ \varphi_{xy} &= \frac{26,25}{10} = 2,625 \end{aligned}$$

Te vrednosti torej povedo, kolikokrat so največje napetosti na ustreznih robovih večje od napetosti na obremenjenem robu.

Seveda je ta primerjava možna samo v primerih najenostavnejših osnovnih obremenitev.

V primeru enosnih tlačnih obremenitev se samo ustrezno spreminjajo predznaki.

Ti rezultati dajejo sicer nekaj vpogleda v napetostno stanje take stene, vendar pri tako redki mreži ni mogoče pričakovati posebne natančnosti. Za izdelavo priročnih metod za konstrukterje v obliki diagramov ali tabel je neogibno potrebno povečati natančnost do skrajno možnih meja. Zato so vsi računi naprej obravnavanih primerov izvedeni s kar se da gostejšo mrežo, reševanje sistema enačb pa z elektronskim računalnikom in preciznostjo na štiri decimalna mesta. Gostoto mreže je narekovala zmogljivost stroja, ki je omejena na največ 78 enačb.

Osnovni cilj nadaljevanja tega poglavja je raziskava napetostnega stanja v kvadratni steni z različno velikimi odprtini. Kot merilo za odprtino jemljemo lahko razmerje a/b , če je z a označena zunanja stranica kvadrata, z b pa stranica odprtine. Čim večje je to razmerje, tem manjša je torej luknja. V nadaljnjem je podan pregled nad obravnavanimi primeri, v katerem so tudi podatki o številu enačb in mrežnih razdaljah h .

Ravnotežne enačbe in matrike so bile v vseh primerih nastavljene z osnovno obremenitvijo $p = 10$. V rubriki tabele, ki je označena s F_r , so vrednosti napetostne funkcije na zgornjem zunanjem robu, dobljene v vseh primerih po znani enačbi

$$F = \frac{py^2}{2}$$

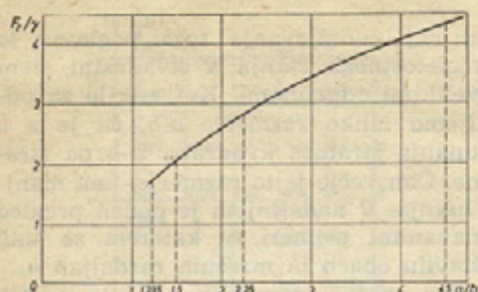
ki preide za vse točke zgornjega robu v

$$F_r = \frac{pa^2}{2} = 5a^2$$

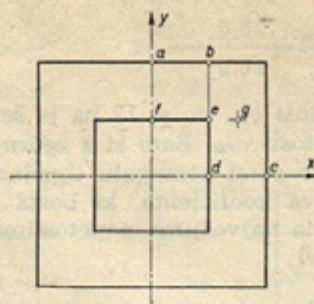
V tabeli 2 so z elektronskim računalnikom vne-sene izračunane vrednosti napetostne funkcije γ na notranjem robu in pa kvocienti F_r/γ . Če si nanesemo vrednosti teh količnikov nad ustrezne vrednosti razmerja a/b , dobimo krivuljo, ki je narisana

Tabela 2

Pr.	Slika	a/b	Št. enačb	h	F_r	γ	F_r/γ	φ_x^n	φ_y^n	φ_x^z	φ_y^z	φ_{xy}
A		1,235	69	2	2205	1266,2	1,74	18,65	-31,5	-7,72	31,65	-7,5
B		1,5	59	1	405	196,4	2,06	2,495	-10,78	-1,077	10,78	-1,86
C		2	49	1	320	124,2	2,58	3,58	-4,73	1,3	4,16	-0,95
D		2,25	66	1	405	144	2,82	3,03	-3,52	1,36	3,21	-0,79
E		3	70	1	405	119	3,4	2,2	-2,65	1,46	1,8	-0,51
F		4	57	1	320	79,4	4,03	1,92	-2,08	1,52	1,1	-0,34
G		4,5	74	1	405	93,6	4,33	1,86	-1,98	1,52	0,97	-0,31



Slika 14



Slika 16

prikazani na sl. 15. Iz njih izhaja, da naraščajo vse napetosti z relativnim povečevanjem luknje, kar je samo po sebi umevno. Poudariti je treba, da sl. 15 ne daje nobenega vpogleda v potek in razdelitev napetosti po steni, temveč samo največje vrednosti. Te pa nastajajo (sl. 16):

- zunanj rob: σ_x^z med točkama a in b
 σ_y^z v točki c
- notranji rob: σ_x^z med točkama e in f
 σ_y^z v točki d
- polje stene: τ_{xy} v okolici točke g

Slika 15 rabi torej za direktno odbiranje največjih možnih koeficientov povečanja napetosti in računanja teh napetosti po enačbi.

$$\sigma_{max} = p \cdot \varphi$$

Potemtakem je lahko neposredno na uporabo konstrukterju, da si brez kakršnega koli obširnejšega računanja določa vse tiste vrednosti, ki ga v veliki večini primerov najbolj zanimajo, katerih pa drugače enostavno in hitro ne more dobiti.

Literatura:

1. Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen.
2. Biezeno-Grammel: Technische Dynamik.
3. Timoshenko-Goodier: Theory of Elasticity.
4. Bürgermeister: Stabilitätstheorie I.
5. Timoshenko: Theory of elastic Stability.
6. Filonenko-Boroditsch: Festigkeitslehre II.
7. Allen: Relaxation Methods.

Avtorjev naslov: mag. ing. Marko Škerlj,
Fakulteta za strojništvo
univerze v Ljubljani

na sl. 14. Z njeno pomočjo si lahko vnaprej določimo velikost γ za steno s poljubno veliko odprtino in ne glede na velikost robne napetosti F_r . Izkaže se namreč, da je razmerje med F_r in γ konstantno pri steni z danim a/b . Velikost γ je torej premo sorazmerna robni napetosti F_r .

V drugih rubrikah tabele so koeficienti povečanja napetosti, ki so povrh tega tudi grafično

DK 621.97:658.51

Izbira in izkoriščenje mehaničnih preš pri štancanju in hladnem preoblikovanju*

HEINRICH MÄKELT — FRANC GOLOGRANC

1. Karakteristike mehaničnih preš

V tehniki preoblikovanja so mehanične preše prav gotovo ena izmed najpomembnejših vrst preoblikovalnih strojev. V nasprotju s strojnimi kladivi jih lahko uporabljamo tudi za preoblikovanje s posrednim tlačnim učinkom. Hitrosti, s kakršnimi se premika orodje, pa so pri prešah v splošnem znatno manjše kakor pri kladivih, tako da je dinamični učinek pehala razmeroma slab.

* Članek po predavanju prof. dr. ing. H. Mäkelta na Fakulteti za strojništvo v Ljubljani (1964) je dopolnil in za tisk priredil doc. ing. F. Gologranc.

Značilno za preše je, da povzročajo sile, ki nastajajo med orodjem in obdelovancem, enako velike reakcije v ustreznih delih gonila in okvira. Okvir preše mora torej zdržati celoten pritisk, ki je potreben za preoblikovanje, medtem ko pri kladivih stojalo ni neposredno obremenjeno s preoblikovalno silo. Zaradi tega so preše dražje od kladiv, so pa natančnejše in mirnejše pri obratovanju, ne potrebujejo težkih temeljev in omogočajo lažje menjavanje orodij.

Za vsako preoblikovalno operacijo je potrebna določena energija, ki jo mora oddati stroj obdelovancu. Sile in moč morajo vsak čas zadoščati, da bi lahko