

DK 539,3

Kompatibilitetni pogoji in večkrat sovisna področja*

DRAGOŠ JURIŠIČ

Uvod

Preprosta geometrijska presoja kaže, da specifične deformacije ne morejo biti neodvisne med seboj. Če si namreč mislimo, da je bilo telo pred deformiranjem razdeljeno na elementarne kocke, se bodo te — pod učinkom zunanje obremenitve — deformirale v različne paralelepipede, ki sestavljajo neprekinjeno celoto deformiranega telesa. To pomeni, da se posamezne elementarne kocke ne morejo deformirati neodvisno druga od druge, temveč morajo njihove specifične deformacije zadostiti določenim pogojem, ki zagotavljajo medsebojno tesno prileganje po deformiranju nastalih paralelepipeidov — podobno kakor pri mozaiku. To so pogoji za geometrično skladnost specifičnih deformacij, ki jih v mehaniki deformabilnih teles imenujemo »kompatibilitetne pogoje«.

V nadaljnjem bomo izoblikovali matematično formulacijo teh pogojev, ki je sicer dobro znana, čeprav v domači literaturi, po navadi pa tudi v tuji, ni o njej ustrezne rigorozne izpeljave. Potemtakem ne nameravamo v teh izvajanjih podati nekaj čisto novega, marveč seznaniti domačega bralca z rigorozno obravnavo kompatibilitetnih pogojev. Pri tem smo se sicer odločili za pot, ki je nekoliko drugačna od tiste, ki jo srečujemo v literaturi [1] [2], vendar je le po njej lahko priti do dodatnih pogojev za večkrat sovisna področja, ki so poglavitna snov tega prispevka. Tu je treba še poudariti, da ravno nepoznavanje rigorozne izpeljave kompatibilitetnih pogojev povzroča pogostne težave pri večkrat sovisnih področjih. Prav zato lahko kdaj spregledamo okoliščine, da so v tem primeru kompatibilitetni pogoji samo potrebni, vendar niso tudi zadostni. Iz istih razlogov so v literaturi znani tudi primeri [3], da dodatni pogoji niso bili pravilno upoštevani.

Zato je po našem vsekakor samo koristno, če se seznanimo z rigoroznim obravnavanjem kompatibilitetnih pogojev. Pri tem bomo vsa izvajanja podali v eksplicitni obliki, pa čeprav bi s tenzorsko pisavo nedvomno pridobili več preglednosti in prihranili prostor, kajti zavedamo se, da tenzorski račun pri nas še vedno ni udomačen, čeprav bi se v tem primeru lahko omejili na kartezične koordinate in bi bilo potemtakem treba poznati samo trivialno konvencijo o seštevanju.

* Ta prispevek je povzet iz raziskovalne naloge Inštituta za metalne konstrukcije v Ljubljani (P-2376), ki jo je financiral Sklad Borisa Kidriča.

Pogoji za integrabilnost Cauchyjevih diferencialnih enačb

Zadosti majhne deformacije lahko izražamo v prvi aproksimaciji s pomočjo znanih Cauchyjevih enačb:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{yx} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma_{zy} \quad \dots (1) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz} \end{aligned}$$

pri čemer so u , v in w pomiki v smeri koordinatnih osi. Imamo torej na voljo šest parcialnih diferencialnih enačb (1) za določanje treh pomikov na podlagi znanih deformacij. Iz tega izhaja, da deformacije ne morejo biti medsebojno neodvisne, temveč morajo zadoščati določenim pogojem, ker bi sicer njihova rešitev ne bila enolična. To so pogoji za integrabilnost Cauchyjevih diferencialnih enačb.

Iz enačb (1) vidimo, da deformacije niso izražene neposredno s pomiki, temveč z njihovimi odvodi prvega reda. Zato morajo ustrezni pogoji za integrabilnost zagotoviti enoličnost ne samo pomikov, temveč tudi njihovih odvodov prvega reda. Tako prihajamo do naslednjih pogojnih enačb:

$$\begin{aligned} \int_C du &= 0; & \int_C dv &= 0; & \int_C dw &= 0 \quad \dots (2) \\ \int_C d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= 0; & \int_C d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= 0; & \int_C d\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= 0 \\ \int_C d\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) &= 0; & \int_C d\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0; & \int_C d\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= 0 \quad \dots (3) \\ \int_C d\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) &= 0; & \int_C d\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) &= 0; & \int_C d\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Pri tem je C poljubna sklenjena krivulja znotraj integracijskega področja. Če nadalje vpeljemo rotacije:

$$\begin{aligned} \omega_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\omega_{yx} \\ \omega_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\omega_{zy} \quad \dots (4) \\ \omega_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\omega_{xz} \end{aligned}$$

lahko parcialne odvode pomikov izražamo takole:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_x; & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} - \omega_{xy}; & \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2} \gamma_{xz} - \omega_{xz} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \varepsilon_y; & \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{2} \gamma_{yz} - \omega_{yz}; & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2} \gamma_{yx} - \omega_{yx} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \varepsilon_z; & \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{2} \gamma_{zx} - \omega_{zx}; & \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{2} \gamma_{zy} - \omega_{zy} \end{aligned} \quad \dots (5)$$

Z upoštevanjem, da so deformacije enolične funkcije, lahko pogojne enačbe (3) napišemo v naslednji obliki:

$$\int_C d\omega_{xy} = 0; \quad \int_C d\omega_{yz} = 0; \quad \int_C d\omega_{zx} = 0 \quad \dots (6)$$

To pomeni, da so Cauchyjeve enačbe (1) integrabilne, če so tako pomiki kakor tudi rotacije enolične funkcije — glej enačbe (2) in (6).

Prvo izmed pogojnih enačb (2) lahko sedaj napišemo:

$$\int_C du = \int_C [\varepsilon_x dx + (\frac{1}{2} \gamma_{xy} - \omega_{xy}) dy + (\frac{1}{2} \gamma_{xz} - \omega_{xz}) dz] = 0 \quad \dots (7)$$

pri čemer smo upoštevali enačbe (5). Če nadalje transformiramo krivuljni integral (7) v ploskovnega (Stokesov izrek), dobimo:

$$\begin{aligned} \int_C du &= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} - \omega_{xy} \right) - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right] dx dy + \\ &+ \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} - \omega_{xz} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} - \omega_{xy} \right) \right] dy dz + \\ &+ \iint_S \left[\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} - \omega_{xz} \right) \right] dz dx = 0 \quad \dots (8) \end{aligned}$$

Pri tem je S poljubna ploskev, ki pa ni sklenjena, temveč je »obrobljena« s krivuljo C . Če se na tem mestu izjemoma omejimo na takšne sklenjene krivulje C , ki jih je mogoče skriti na poljubno točko, ne da bi pri tem zapustili integracijsko področje, tedaj morajo biti podintegralni izrazi v enačbi (8) identično enaki nič:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{xy}}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_{yz}}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_{zx}}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} \end{aligned} \quad \dots (9)$$

Pri tem smo upoštevali, da izhaja iz enačb (4):

$$\frac{\partial \omega_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \omega_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial \omega_{yz}}{\partial x} \quad \dots (10)$$

Enačbe (9) izražajo pogoje za enoličnost pomikov u . Popolnoma analogno lahko pokažemo, da se glasi pogoji za enoličnost pomikov v takole:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_{yz}}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_{zx}}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \end{aligned} \quad \dots (11)$$

vtem ko pogoje za enoličnost pomikov w lahko izrazimo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{xy}}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_{yz}}{\partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_{zx}}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \end{aligned} \quad \dots (12)$$

Tako dobljeni pogoji za enoličnost pomikov veljajo vsepovsod znotraj integracijskega področja, čeprav smo se omejili samo na tiste sklenjene krivulje C , ki jih je mogoče skriti na poljubno točko, ne da bi pri tem zapustili integracijsko področje. Zaradi tega lahko uporabljamo enačbe (9–12), da prvo izmed pogojnih enačb (6) napišemo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned} \int_C d\omega_{xy} &= \int_C \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right) dx + \\ &+ \int_C \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial y} \right) dy + \\ &+ \int_C \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) dz = 0 \quad \dots (13) \end{aligned}$$

Če še enkrat upoštevamo Stokesovo transformacijsko formulo, dobimo:

$$\begin{aligned} \int_C d\omega_{xy} &= \iint_S \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \right) dx dy + \\ &+ \iint_S \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial y \partial z} \right) dy dz + \\ &+ \iint_S \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial x} \right) dz dx = 0 \end{aligned} \quad \dots (14)$$

Popolnoma analogno lahko pokažemo, da se glasita pogoja za enoličnost rotacij ω_{yz} in ω_{zx} :

$$\begin{aligned} \int_C d\omega_{xy} = & \int_S \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} \right) dx dy + \\ & + \int_S \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} \right) dy dz + \\ & + \int_S \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} \right) dz dx = 0 \quad \dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C d\omega_{zx} = & \int_S \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} \right) dx dy + \\ & + \int_S \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} \right) dy dz + \\ & + \int_S \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} \right) dz dx = 0 \quad \dots (16) \end{aligned}$$

Pogoje za enoličnost rotacij (14–16) smo izpeljali brez kakršnih koli omejitev, pri pogojih za enoličnost pomikov (9, 11 in 12) pa smo upoštevali samo tiste sklenjene krivulje C , ki jih je mogoče skrečiti na poljubno točko, ne da bi pri tem zapustili integracijsko področje.

Povrnimo se sedaj k pogojem za enoličnost pomikov (2), vendar brez pravkar omenjene omejitve. V ta namen napišemo še enkrat pogojno enačbo (7) v nekoliko spremenjeni obliki:

$$\begin{aligned} \int_C du = \int_C (\varepsilon_x dx + \frac{1}{2} \gamma_{xy} dy + \frac{1}{2} \gamma_{xz} dz) - \\ - \int_C (\omega_{xy} dy + \omega_{xz} dz) = 0 \quad \dots (17) \end{aligned}$$

Če drugega izmed krivuljnih integralov (17) parcialno integriramo z upoštevanjem, da je krivulja C sklenjena, dobimo:

$$\int_C (\omega_{xy} dy + \omega_{xz} dz) = - \int_C y d\omega_{xy} + z d\omega_{xz} \quad \dots (18)$$

Totalna diferenciala $d\omega_{xy}$ in $d\omega_{xz}$ lahko izražamo z upoštevanjem enačb (9, 11 in 12), ki veljajo vsepovsod znotraj integracijskega področja in torej tudi vzdolž poljubne sklenjene krivulje C . Pogojna enačba (17) prehaja sedaj v takole obliko:

$$\begin{aligned} \int_C du = \int_C \left[\varepsilon_x + y \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right) - \right. \\ \left. - z \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} \right) \right] dx + \\ + \int_C \left[\frac{1}{2} \gamma_{xy} + y \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial y} \right) - \right. \\ \left. - z \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \right] dy + \\ + \int_C \left[\frac{1}{2} \gamma_{xz} + y \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) - \right. \\ \left. - z \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) \right] dz = 0 \quad \dots (19) \end{aligned}$$

oziroma, če izvedemo Stokesovo transformacijo krivuljnih integralov v ploskovne, dobimo:

$$\begin{aligned} \int_C du = \int_S \left[y \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \right) - \right. \\ \left. - z \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy + \\ + \int_S \left[y \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial y \partial z} \right) - \right. \\ \left. - z \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} \right) \right] dy dz + \\ + \int_S \left[y \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial x} \right) - \right. \\ \left. - z \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} \right) \right] dz dx = 0 \quad \dots (20) \end{aligned}$$

Popolnoma analogno dobimo pogoja za enoličnost pomikov v in w :

$$\begin{aligned} \int_C dv = \int_S \left[z \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} \right) - \right. \\ \left. - x \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \right) \right] dx dy + \\ + \int_S \left[z \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} \right) - \right. \\ \left. - x \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial y \partial z} \right) \right] dy dz + \\ + \int_S \left[z \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial x} \right) - \right. \\ \left. - x \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial x} \right) \right] dz dx = 0 \quad \dots (21) \end{aligned}$$

$$\int_c dw = \int \int \left[x \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} \right) - y \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} \right) \right] dx dy +$$

$$+ \int \int \left[x \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} \right) - y \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} \right) \right] dy dz +$$

$$+ \int \int \left[x \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} \right) - y \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial x} \right) \right] dz dx = 0 \quad \dots (22)$$

Če pregledamo pogoje za enoličnost rotacij (14—16) in pogoje za enoličnost pomikov (20—22), vidimo, da se v ustreznih enačbah pojavlja devet različnih izrazov in je zato koristno, če vpeljemo naslednji tenzor:

$$R_{ij} = \begin{Bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{Bmatrix} \quad \dots (23)$$

pri čemer so posamezni elementi definirani takole:

$$R_{xx} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$R_{yy} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \quad \dots (24)$$

$$R_{zz} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$R_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x \partial y} = R_{yx}$$

$$R_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y \partial z} = R_{zy} \quad \dots (25)$$

$$R_{zx} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial z \partial x} = R_{xz}$$

Pri tem smo upoštevali, da so tako deformacijski tenzor kakor tudi mešani odvodi drugega reda simetrični in mora tedaj biti simetričen tudi tenzor (23). Ta tenzor bomo imenovali »kompatibilitetni tenzor«; kakor kaže sl. 1, obstaja popolna analogija z napetostnim tenzorjem. Prav tako se

da pokazati, da so komponente tenzorja R_{ij} v medsebojnem »ravnovesju«:

$$\frac{\partial R_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial R_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial R_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial R_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial R_{yx}}{\partial x} = 0 \quad \dots (26)$$

$$\frac{\partial R_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial R_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial R_{zy}}{\partial y} = 0$$

Zato trdimo, da ima kompatibilitetni tenzor šest komponent, ki so samo linearno neodvisne, ne pa tudi diferencialno.

Hkrati se pokaže koristno, če vpeljemo še »sile kompatibilnosti«, ki jih definiramo naslednje:

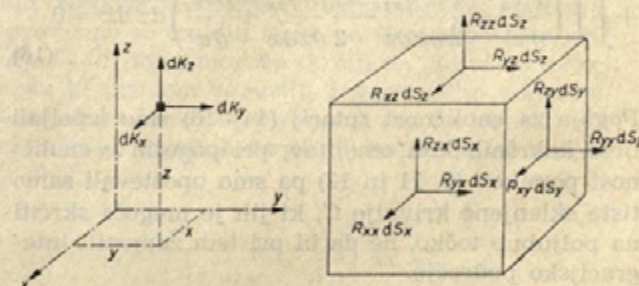
$$dK_x = R_{xx} dS_x + R_{xy} dS_y + R_{xz} dS_z$$

$$dK_y = R_{yy} dS_y + R_{yz} dS_z + R_{yx} dS_x \quad \dots (27)$$

$$dK_z = R_{zz} dS_z + R_{zx} dS_x + R_{zy} dS_y$$

pri čemer je:

$$dS_x = dy dz; \quad dS_y = dz dx; \quad dS_z = dx dy \quad \dots (28)$$



Sl. 1. »Sile« kompatibilnosti

Sedaj lahko napišemo pogoje enačbe (14—16) in (20—22) v takile pregledni obliki:

$$\int_c d\omega_{xy} = \int \int dK_z = 0 \quad \dots (29)$$

$$\int_c d\omega_{yz} = \int \int dK_x = 0 \quad \dots (30)$$

$$\int_c d\omega_{zx} = \int \int dK_y = 0 \quad \dots (31)$$

$$\int_c du = \int \int (y dK_z - z dK_y) = 0 \quad \dots (32)$$

$$\int_c dv = \int \int (z dK_x - x dK_z) = 0 \quad \dots (33)$$

$$\int_c dw = \int \int (x dK_y - y dK_x) = 0 \quad \dots (34)$$

To pomeni, da pogoje za integrabilnost Cauchyjevih enačb (1) lahko izražamo v obliki ravnovesnih pogojev za sile kompatibilnosti.

Kompatibilitetni pogoji — enkrat sovisna področja

Pri obravnavanju pogojev za integrabilnost Cauchyjevih enačb se nismo ozirali na to, ali je integracijsko področje sovisno enkrat ali večkrat. Če sedaj upoštevamo, da so enkrat sovisna področja takšna, pri katerih lahko poljubno sklenjeno krivuljo C skrečimo na točko, ne da bi pri tem zapustili integracijsko področje, tedaj lahko pogoje za integrabilnost napišemo v enostavnejši obliki. V tem primeru izvira namreč iz enačb (29—34), da morajo biti sile kompatibilnosti vsepovsod enake nič:

$$dK_x = dK_y = dK_z = 0 \quad \dots (35)$$

ozir. zaradi (27), da so komponente kompatibilitetnega tenzorja vsepovsod enake nič:

$$R_{xx} = R_{yy} = R_{zz} = 0 \quad \dots (36)$$

$$R_{xy} = R_{yz} = R_{zx} = 0 \quad \dots (37)$$

Z upoštevanjem enačbe (24—25) pridemo tako do znanih Saint Venantovih kompatibilitetnih pogojev:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0 \quad \dots (38) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= 0 \quad \dots (39) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Pri enkrat sovisnih področjih so kompatibilitetni pogoji (38—39) torej potrebni in zadostni za zagotovitev integrabilnosti Cauchyjevih enačb (1).

Dodatni robni pogoji — večkrat sovisna področja

Kompatibilitetni pogoji (38—39) so potrebni tudi pri večkrat sovisnih področjih, vendar niso zadostni. Pri večkrat sovisnih področjih obstajajo namreč tudi takšne sklenjene krivulje, ki jih ni mogoče skrečiti na poljubno točko integracijskega področja, ne da bi pri tem naleteli na mejno ploskev. Obstaja pač določeno število sklenjenih krivulj C_a , ki ležijo na mejni ploskvi in na katere lahko zreduciramo vsako izmed krivulj, ki jih ni bilo mogoče skrečiti na poljubno točko. Pri n -krat sovisnem področju je število teh krivulj $(n-1)$, ločimo pa jih s pomočjo indeksa a , ki lahko pri-

vzame vrednosti 1, 2, 3, ... $(n-1)$.^{*} Iz tega izvira, da lahko skrečimo poljubno sklenjeno krivuljo C bodisi na točko integracijskega področja ali pa na eno izmed mejnih krivulj C_a , ne da bi pri tem zapustili integracijsko področje.

Kompatibilitetni pogoji (38—39) zagotavljajo torej enoličnost pomikov in rotacij vzdolž poljubne sklenjene krivulje, ki jo lahko skrečimo na točko integracijskega področja, ne da bi pri tem naleteli na mejno ploskev. Kar pa se tiče drugih sklenjenih krivulj, ki jih je kvečjemu mogoče zreducirati na eno izmed mejnih krivulj C_a , kompatibilitetni pogoji niso zadostni, temveč moramo za vsako takšno krivuljo C_a zagotoviti dodatnim robnim pogojem (glej enačbe 29—34):

$$\begin{aligned} \int_{C_a} d\omega_{xy} &= \iint_{S_a} dK_z = 0 \\ \int_{C_a} d\omega_{yz} &= \iint_{S_a} dK_x = 0 \quad \dots (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_a} d\omega_{zx} &= \iint_{S_a} dK_y = 0 \\ \int_{C_a} du &= \iint_{S_a} (y dK_z - z dK_y) = 0 \\ \int_{C_a} dv &= \iint_{S_a} (z dK_x - x dK_z) = 0 \quad \dots (41) \\ \int_{C_a} dw &= \iint_{S_a} (x dK_y - y dK_x) = 0 \end{aligned}$$

Ti dodatni pogoji (40—41) so skupno s kompatibilitetnimi pogoji (38—39) potrebni in zadostni za zagotovitev integrabilnosti Cauchyjevih enačb pri večkrat sovisnih področjih. Pri tem je S_a poljubna ploskev, ki leži sicer zunaj integracijskega področja, vendar je obrobljena z mejno krivuljo C_a in je bilo zato pri izpeljavanju mogoče jemati v poštev pogoje (9, 11 in 12), ki jim je sicer zadoščeno samo znotraj integracijskega področja. Očitno pa je tudi, da je vzdolž ploskve S_a kompatibilitetni tenzor lahko od nič različen, saj zunaj integracijskega področja pač ni mogoče jemati, da bi bile deformacije kompatibilne.

V enem izmed naslednjih prispevkov bomo objavili navodila za praktično upoštevanje dodatnih robnih pogojev pri numeričnem obravnavanju ravninskih problemov.

^{*} Kot primer večkrat sovisnega področja lahko vzamemo svitek (torus), ki je dvakrat sovisno področje, čeprav ima eno samo mejno ploskev. V tem primeru imamo eno samo mejno krivuljo C_1 , ki jo volimo tako, da leži na mejni ploskvi in da »zajema«^{*} »odprtino«^{*} torusa. Po drugi strani pa je področje med dvema koncentričnima kroglica enkrat sovisno, čeprav je omejeno z dvema mejnima ploskvama.

Literatura

- [1] Sokolnikoff, I. S., *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1956, pp. 25—29.
- [2] Prager, W., *Introduction to Mechanics of Continua*, Ginn and Company, 1961, pp. 70—73.
- [3] Spencer, A. J. M., *Appl. Sci. Res.*, Ser. A, Vol. 12, 1964, pp. 391—406.

Avtorjev naslov: dr. ing. Dragoš Jurišić,
Inštitut za metalne konstrukcije v Ljubljani