

DK 531.25.001

Splošna rešitev osno simetričnega stabilnostnega problema krožnega kolobarja

MARKO ŠKERLJ

V razpravi je obravnavan stabilnostni problem krožnega kolobarja (krožne stene s centrično krožno odprtino), s predpostavko osno simetričnega napetostnega in deformacijskega stanja v elastičnem področju. Rešitev tega problema vsebuje vse do zdaj znane posamezne rešitve posebnih primerov, povrh tega pa omogoča računanje kritične obremenitve poljubnega obremenitvenega primera. Računski primeri osvetljujejo postopek in dopolnjujejo že znane diagrame.

UVOD

Prve rešitve stabilnostnega problema na tlak obremenjene pravokotne stene (samo v lastni ravnini obremenjene plošče) je nakazal že NAVIER leta 1823. Z vključitvijo strižnih robnih obremenitev je ta problem rešil leta 1888 BRYAN, in sicer s pomočjo ravnotežne in energijske metode.

V naslednjih desetletjih se je vrsta raziskovalcev ukvarjala s problemi pravokotnih, izotropnih in anizotropnih, homogenih in nehomogenih sten v elastičnem kakor tudi elastoplastičnem področju, tako da dandanes na tem področju ni več veliko neznanega in neobdelanega. Zanimivo je, da so se prvi rezultati raziskav stabilnosti krožnih plošč pojavili precej pozno. Kritično osno simetrično obremenitev polne krožne stene je obravnaval prvi DINNIK leta 1910, za njim pa leta 1915 NADAY, ki je analiziral razen osno simetrične deformacije tudi neosno simetrično izobčenje.

Stabilnostni problem stene, ki je omejena z več kakor eno samo zaključeno konturo, ni bil načet vse do leta 1933, ko je MEISSNER objavil rešitev krožne stene s centrično krožno odprtino, ki je bila obremenjena z osno simetrično tlačno obremenitvijo po zunanji konturi. Rešitev je zajemala samo prosto položen in pa vpet zunanji rob. To zakasnitev lahko pojasnimo z dejstvom, da povzroča že samo eksaktno reševanje diferencialnih enačb stabilnostnih problemov, ki drugače od klasičnih elasto-mehanskih enačb upoštevajo dodatno še tudi vpliv deformacij na ravnotežno stanje, ponavadi velike težave. Prilagajanje rešitev teh enačb vnaprej podanim robnim zahtevam pa pri stenah z večkrat sovisnimi območji skoraj v vseh primerih odpove že zaradi tega, ker vsebujejo rešitve premalo prostih konstant, s katerimi bi lahko zajeli vse robne pogoje. Zato je tudi razumljivo, da so se raziskovalci najprej lotili stene, ki je omejena z dvema takimi zaključenima konturama, ki se matematično najlaže definirata. Tako konturo nedvomno predstavlja krog. Če sta še obremenitev in deformacija krožne stene osno simetrični, tedaj lahko definiramo tako napetostno kakor tudi deformacijsko

stanje poljubne točke stene z eno samo spremenljivko. Posledica tega je, da je vsak robni pogoj na krožni in osno simetrično obremenjeni ali prav tako deformirani konturi opisan z eno samo enačbo. S tem lahko rešitev diferencialne enačbe četrtega reda s štirimi integracijskimi konstantami prilagodimo po dvema robnima pogojema na vsaki od dveh krožnih kontur.

Dva primera radialno po zunanjem robu obremenjenega krožnega kolobarja pri spremenljivi debelini je rešil EGGER leta 1941, prav tak kolobar, obremenjen s strižnimi obremenitvami, pa FEDERHOFER leta 1943. Eggerjeva rešitev se je nanašala na kolobar s prostim notranjim robom, zunanji rob pa je bil prosto položen ali pa vpet. Federhoferjev kolobar je imel obe konturi vpeti. Istega leta je izšla tudi WILLERSOVA razprava; ta je rešila stabilnostni problem kolobarja, ki je obremenjen poleg radialne tlačne obremenitve na zunanjem robu še z upogibnim momentom v lastni ravnini. Zaradi matematičnih težav je bil problem rešen z diferenčno metodo.

Popolnejšo rešitev stabilnosti krožnega kolobarja, ki je obremenjen z enako veliko radialno tlačno obremenitvijo na obeh robovih, je objavil leta 1947 SCHUBERT. V njegovih rešitvah je zaobseženih šest različnih kombinacij robnih pogojev, manjkata pa primera s popolnoma prostim notranjim robom pri vpetem in prosto položenem zunanjem robu.

Vsi navedeni in tudi mnogi drugi avtorji, ki so se ukvarjali s temi problemi, so pri nastavljanju enačb uporabili vse tiste poenostavljajoče supozicije iz teorije plošč in teorije stabilnosti, ki so ravno še zadostne, da se dobijo uporabni rezultati. Osnova vseh računov je torej KIRCHHOFFOVA teorija, ki daje zadosti natančne rezultate samo pri tankih stenah. Pri vseh stabilnostnih problemih pa imamo opravka samo s takimi stenami, saj prihaja pri debelih prej do plastifikacije kakor pa do izbočenja. Da ne dobimo samo enoličnih pomikov in torej sploh lahko dobimo stabilnostni problem, moramo seveda nastaviti ravnotežne enačbe na deformira-

nem telesu in s tem zajeti še vpliv deformacij na napetostno stanje. S tem, da zanemarimo deformacije same srednje ravnine stene in pa da računamo po teoriji II. reda, dobimo še vedno linearne diferencialne enačbe. Ker predpostavljajo zgornje supozicije tudi teorijo majhnih pomikov, dobimo iz nje lahko samo velikost kritične obremenitve, ne moremo pa kvantitativno določiti pomikov.

Zgornji kratki zgodovinski pregled dokazuje, da stabilnostni problem stene, ki je omejena z več kakor eno samo zaključeno konturo, v splošnem sploh še ni obdelan. Še več — niti problem krožne stene s krožno odprtino še ni rešen dokončno. Poleg obeh primerov, ki jih Schubertova rešitev ne vsebuje, manjkajo še primeri za drugačne robne pogoje iz Meissnerjeve rešitve, manjkajo primeri obremenjenega samo notranjega roba, in naposled manjkajo vsi primeri kombinacije poljubnih zunanjih in notranjih obremenitev.

Cilj te razprave naj bo razjasnitev zgornjih vprašanj.

NASTAVITEV STABILNOSTNEGA KRITERIJA ZA OSNO SIMETRIČNI PRIMER KROŽNEGA KOLOBARJA

Znano je, da imamo za računanje stabilnostnih problemov na razpolago dve metodi, in sicer ravnotežno in energijsko. Druga metoda je splošnejša in bolj vsestransko uporabna glede na to, da omogoča poleg eksaktnega reševanja še aplikacijo približnih metod, ki izhajajo iz nje. Brez posebnih težav lahko iz energijskih enačb izpeljemo tudi diferencialne enačbe, ki bi jih dobili s pomočjo ravnotežne metode, medtem ko nasprotna pot ni možna.

Osnova naših izvajanj naj bo znani Trefftzov energijski kriterij za indiferentno ravnotežno stanje [2]

$$\delta(\delta^2 U) = 0 \quad (1)$$

ki pravi, da mora biti nična prva variacija druge variacije celotnega elastičnega potenciala.

Celotni elastični potencial krožnega kolobarja pri prehodu iz plane v osno-simetrično izbočeno lego je sestavljen iz elastične energije sil v srednji ravnini [10]

$$U_s = \frac{\pi h E}{1 - \mu^2} \int_a^b \left[\left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + 2 \mu \left(\frac{u}{r} u' + \frac{u}{2r} w'^2 \right) \right] r dr$$

ter elastične energije upogiba

$$U_u = D \pi \int_a^b \left[w''^2 + \left(\frac{1}{r} w' \right)^2 + 2 \mu \frac{1}{r} w' w'' \right] r dr$$

V zgornjih izrazih pomeni u pomik v radialni smeri, w pomik v smeri normale k srednji ravnini, a notranji in b zunanji radij ter h konstantno debelino kolobarja. S črtico so označeni odvodi po r .

Celotni elastični potencial je torej

$$U = \pi \int_a^b \left\{ \frac{E h}{1 - \mu^2} \left[\left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + 2 \mu \left(\frac{u}{r} u' + \frac{u}{2r} w'^2 \right) \right] + D \left[w''^2 + \left(\frac{1}{r} w' \right)^2 + 2 \mu \frac{1}{r} w' w'' \right] \right\} r dr \quad (2)$$

Stabilnostnemu kriteriju (1) zadostimo tako, da najprej poiščemo drugo variacijo izraza (2). Pri tem variiramo seveda samo pomik w , ki definira prehod iz osnovnega v sosedno ravnotežno stanje. Virtualni pomik naj bo dan z izrazom $z(r)$, ki je poljubna funkcija in mora zadoščati le robnim pogojem. Druga variacija bo tako

$$\delta^2 U = 2 \pi \int_a^b \left[\frac{E h}{1 - \mu^2} (r u' + \mu u) z' + D \left(r z'' + \frac{1}{r} z'^2 + 2 \mu z' z'' \right) \right] dr \quad (3)$$

V radialnem pomiku u se skriva zunanja obremenitev. Po Hookovem zakonu lahko namreč pišemo

$$\varepsilon_r = u' = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\varphi)$$

Potek obeh napetosti pa je znan. Če označimo konstantno tlačno obremenitev na zunanjem robu s p_s , na notranjem pa s p_n , tedaj je [3]

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_s - p_n)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_n a^2 - p_s b^2}{b^2 - a^2} \quad (4)$$

$$\sigma_\varphi = - \frac{a^2 b^2 (p_s - p_n)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{p_n a^2 - p_s b^2}{b^2 - a^2}$$

Če označimo obe razmerji

$$\frac{a}{b} = \gamma \quad \text{in} \quad \frac{p_n}{p_s} = \varrho \quad (5)$$

ter vpeljemo okrajšavi

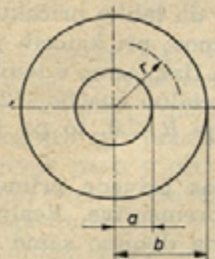
$$P_I = \frac{a^2 (1 - \varrho)}{1 - \gamma^2} \quad \text{in} \quad R = \frac{\varrho \gamma^2 - 1}{1 - \gamma^2}$$

lahko napišemo obe napetosti tudi tako

$$\sigma_r = p_s \left(P_I \frac{1}{r^2} + R \right)$$

$$\sigma_\varphi = p_s \left(-P_I \frac{1}{r^2} + R \right)$$

Iz teh izrazov izhaja, da ostane napetostno stanje enako ne glede na velikost stene, če sta le obe obremenitvi enaki pri enakem razmerju γ . Nedvomno se torej izplača zamenjati koordinato r z neko brezdimenzijsko koordinato in si s tem olajšati primerjanje rezultatov. Ta brezdimenzijska koordinata, označimo jo z x , naj bo definirana z



$$r = xb$$

$$x = \frac{r}{b}$$

Ker je po tej definiciji

$$a = x_a b \quad x_a = \frac{a}{b} = \gamma$$

$$b = x_b b \quad x_b = 1$$

mora ležati koordinata x v območju

$$\gamma \leq x \leq 1$$

Obe napetosti sta zdaj

$$\sigma_r = p_z \left(P \frac{1}{x^2} + R \right)$$

$$\sigma_\varphi = p_z \left(-P \frac{1}{x^2} + R \right)$$

kjer pomenita

$$P = \frac{\gamma^2 (1 - \varrho)}{1 - \gamma^2} \quad R = \frac{\varrho \gamma^2 - 1}{1 - \gamma^2} \quad (6)$$

Vpeljava obeh izrazov za napetosti v Hookov zakon, le-tega pa v enačbo (3), da z okrajšavama

$$a^2 = \frac{N b^2}{D}$$

$$N = p_z h \quad (7)$$

drugo variacijo celotnega elastičnega potenciala v obliki

$$\delta^2 U = \frac{2\pi D}{b^2} \int_{\gamma}^1 \left\{ x z''^2 + z'^2 \left[\frac{1}{x} \left((1 + a^2 P) + a^2 R x \right) + 2\mu z' z'' \right] \right\} dx \quad (8)$$

Trefftzov stabilnostni kriterij dobimo zdaj tako, da izraz (8) ponovno variiramo z vpeljavo virtualnega pomika $t(x)$, ki je spet poljubna funkcija, ki pa zadošča geometrijskim robnim pogojem in dobimo

$$\delta (\delta^2 U) = \frac{2\pi D}{b^2} \int_{\gamma}^1 \left\{ 2 x z'' t'' + 2 z' t' \left[\frac{1}{x} (1 + a^2 P) + a^2 R x \right] + 2\mu (z'' t' + z' t'') \right\} dx = 0$$

Zgornji izraz lahko integriramo per partes tako, da zmanjšamo red odvoda funkcije $t(x)$ ter dobimo končno stabilnostni kriterij v obliki

$$t' (x z'' + \mu z') + t \left\{ -x z''' - z'' + z' \left[\frac{1}{x} (1 + a^2 P) + a^2 R x \right] \right\} + \int_{\gamma}^1 t \left\{ x z'''' + 2 z'' - z' \left[\frac{1}{x} (1 + a^2 P) + a^2 R x \right] + z' \left[\frac{1}{x^2} (1 + a^2 P) - a^2 R x \right] \right\} dx = 0 \quad (9)$$

Obe meji vseh treh členov zgornje enačbe pomenita:

$$x = \gamma \dots \text{notranji rob}$$

$$x = 1 \dots \text{zunanji rob}$$

ROBNI POGOJI

Glede na to, da pomeni funkcija $t(x)$ virtualni pomik in je torej poljubna z edino omejitvijo, da mora ustrezati robnim pogojem, lahko zadostimo stabilnostnemu kriteriju (9) v vseh treh mejnih možnostih, in sicer za popolnoma prost, prosto oprt ali pa vpet rob:

a) prosti rob: za funkcijo $t(x)$ ni pogojev. Da zadostimo enačbi (9), morajo biti vsi trije oklepaji nični.

b) Prosto oprti rob: funkcija $t(x) = 0$. Prvi in tretji oklepaj enačbe (9) morata biti nična.

c) Vpeti rob: funkcija $t(x) = 0$ in njen prvi odvod $t'(x) = 0$. Enačba (9) zahteva torej, da bo tretji oklepaj ničen.

Vsem trem primerom je skupen pogoj, da mora biti tretji oklepaj enačbe (9) ničen. Če tako dobljeno enačbo pomnožimo še z x^3 ter vpeljemo zamenjavi

$$\lambda^2 = -a^2 R = a^2 \frac{1 - \varrho \gamma^2}{1 - \gamma^2} \quad (10)$$

$$n^2 = 1 + a^2 P = 1 + a^2 \frac{\gamma^2 (1 - \varrho)}{1 - \gamma^2} \quad (11)$$

dobimo diferencialno enačbo v obliki

$$x^4 z'''' + 2 x^3 z''' + x^2 z'' (\lambda^2 x^2 - n^2) + x z' (\lambda^2 x^2 + n^2) = 0 \quad (12)$$

Pogojna enačba za prosto oprti rob bo

$$x z'' + \mu z' = 0 \quad (13)$$

tej pa se pri popolnoma prostem robu pridruži še pogoj

$$x^2 z'' + x z' + z' (\lambda^2 x^2 - n^2) = 0 \quad (14)$$

Zadnji dve enačbi seveda nista nič drugega kakor pogoja za upogibni moment in prečno silo.

ANALIZA REŠITVE DIFERENCIALNE ENAČBE

Diferencialna enačba (12) je Besselovega tipa. Njena splošna rešitev je [5]

$$z = A \int J_n(\lambda x) dx + B \int J_n(\lambda x) dx + C \int [-J_n(\lambda x) \int J_n(\lambda x) dx + J_n(\lambda x) \int J_n(\lambda x) dx] + D \quad (15)$$

Ta rešitev velja, če n ni celo število. V primeru, če je n celo število, moramo v rešitvi (15) Besselove funkcije $J_n(\lambda x)$ zamenjati z Neumannovimi funkcijami $N_n(\lambda x)$.

Rešitve (15) v splošnem ni mogoče napisati v zaključeni obliki razen v primerih, če je n celo liho število, ko lahko s pomočjo integralnih formul za Besselove funkcije dobimo rešitve v obliki končnih vrst. Z uporabo omenjenih formul lahko v primeru, če n ni celo število, napišemo rešitev (15) tudi tako

$$z = A \sum_{k=1}^{\infty} J_{n-2k-1}(\lambda x) + B \sum_{k=1}^{\infty} J_{n-2k-1}(\lambda x) + C \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k + D \quad (16)$$

kjer pomeni

$$\eta_k = (-1)^{k-1} \frac{(\lambda x)^{2k}}{k(1^2 - n^2)(3^2 - n^2) \dots [(2k-1)^2 - n^2]} \quad (17)$$

V posebnem primeru, če je $n = 1$, se rešitev (15) poenostavi v

$$z = A J_0(\lambda x) + B N_0(\lambda x) + C \ln(x) + D \quad (18)$$

Vse zgornje rešitve so dobljene s predpostavko, da je kolobar obremenjen na zunanem in notranjem robu s tlačnima obremenitvama. Zato mora biti tudi vrednost α^2 v izrazu (7) vedno pozitivna. Sprememba predznaka pri α^2 nakazuje torej prehod od zunanje tlačne obremenitve v natezno. Smer obremenitve na notranjem robu pa je odvisna od predznaka pri razmerju ϱ . Dokler je ϱ pozitivno, je tudi notranja obremenitev nasprotno usmerjena zunanji, če pa je ϱ negativno, imata obe obremenitvi isto smer.

Osnovno diferencialno enačbo lahko z zamenjavanjem

$$\lambda^2 = \alpha^2 R \\ n^2 = 1 + \alpha^2 P$$

pretvorimo v obliko

$$x^4 z^{IV} + 2x^3 z''' - x^2 z'' (\lambda^2 x^2 + n^2) - x z' (\lambda^2 x^2 - n^2) = 0$$

ki se od enačbe (12) razlikuje samo v predznakih v zadnjih dveh členih. Ta enačba je prav tako Besselovega tipa, njena rešitev pa vsebuje samo Besselove funkcije s čisto imaginarnim argumentom. Glede na to, da so vse te funkcije samo monotono naraščajoče ali monotono pojemajoče in imajo samo eno ali pa nobene ničle, tudi ne morejo prinašati rešitve stabilnostnega problema.

Do podobnega zaključka pridemo lahko tudi z neposrednim opazovanjem izraza za λ^2 v (10). Pri vnaprej podanem obremenitvenem primeru, to je pri podanih razmerjih ϱ in γ , ima R enolično določen predznak, α^2 pa mora biti pozitivno število. Če zdaj λ^2 spremeni predznak, pomeni to, da postane α^2 negativno in torej ne more prinašati realne rešitve zastavljenega problema.

Iz vsega povedanega izhaja, da lahko pričakujemo realne rešitve vseh problemov, pri katerih je zunanja kontura obremenjena na tlak, samo v tistih primerih, ki so podani z diferencialno enačbo (12), in še to samo v območjih, ko je $R < 0$, to pa je pri $\varrho < 1/\gamma^2$.

Do podobnega zaključka nas privede primer zunanje in notranje natezne obremenitve. Realne rezultate stabilnostnega problema dobimo samo v primerih, ko je $R > 0$, to pa je pri $\varrho > 1/\gamma^2$.

Območja, ki označujejo imaginarne rešitve, so tista, v katerih do izbočenja kolobarja sploh ne more priti. Fizikalno si to lahko razlagamo s tem, da prevladujejo v vseh takih obremenitvenih primerih relativno velike natezne normalne napetosti v cirkularni smeri, ki delujejo stabilizacijsko.

Z matematičnega vidika pomenita enačbi (10) in (11) sistem enačb s tremi neznankami λ^2 , n^2 in α^2 . Tretjo enačbo pa dobimo z robnim pogojem prilagojeno rešitvijo enačbe (12).

Poleg splošnega obremenitvenega primera lahko izluščimo posebne primere:

$\gamma = 0$	(polna krožna stena)
$\varrho = 1$	(znotraj in zunaj enaka obremenitev)
$\varrho = 0$	(obremenitev samo zunaj)
$1/\varrho = 0$	(obremenitev samo znotraj)
$\varrho = -1$	(zunaj tlak, znotraj enako velik nateg)
$\varrho = 1/\gamma^2$	(mejno področje stabilnostnega problema)

HOMOGENO NAPETOSTNO STANJE

Prva dva posebna primera, omenjena na koncu prejšnjega poglavja, imata skupno to značilnost, da imamo opravka s homogenim napetostnim stanjem. Pri obeh je

$$P = 0; \quad R = -1 \\ \lambda^2 = \alpha^2 \quad n^2 = 1$$

in je zaradi tega rešitev podana z enačbo (18).

a) Polna stena ($\gamma = 0$)

Pri polni steni je v rešitvi (18) logaritmčni člen odveč, ker mora biti $C = 0$ zaradi tega, ker doseže $\ln(x)$ pri $x = 0$ neskončno vrednost. Zaradi simetrije mora biti pri $x = 0$ tudi $z' = 0$, torej

$$z' = \alpha [-A J_1(0) - B N_1(0)] = 0$$

Iz tega pa izhaja $B = 0$, ker je $J_1(0) = 0$ in $N_1(0) = -\infty$.

Pri vpetem zunanem robu da robni pogoj $z' = 0$ pri $x = 1$ znano rešitev

$$N_k = 14,68 \frac{D}{b^3}$$

pri prosto oprtem robu pa robni pogoj

$$M_r = xz'' + \mu z' = 0$$

z upoštevanjem $\mu = 0,3$ znano kritično obremenitev

$$N_k = 4,2 \frac{D}{b^3}$$

b) Krožni kolobar ($\rho = 1$)

Enačba (18), ki prinaša rešitev tudi tega problema, se popolnoma ujema z enačbo, s katero je A. Schubert rešil šest različnih kombinacij robnih pogojev pri takem kolobarju [7]. Pri njegovih rešitvah pada v oči dejstvo, da ne vsebujejo še zadnjih dveh možnosti, in sicer prosto oprtega ter vpetega zunanjega roba pri popolnoma prostem notranjem robu. Izkaže pa se, da lahko z vpeljavo šestih novih funkcij, ki se dajo izluščiti iz vseh osmih možnih kombinacij robnih pogojev, ves problem razdelimo v dve skupini rešitev. Druga skupina vsebuje štiri primere z enim prostim robom, prva pa štiri ostale primere.

1. skupina:

- I. Zunanji in notranji rob vpeti
- II. Zunanji rob vpet, notranji prosto oprt
- III. Zunanji rob prosto oprt, notranji vpet
- IV. Zunanji in notranji rob prosto oprti

2. skupina:

- V. Zunanji rob prost, notranji vpet
- VI. Zunanji rob prost, notranji prosto oprt
- VII. Zunanji rob vpet, notranji prost
- VIII. Zunanji rob prosto oprt, notranji prost

Če označimo kombinacije Besselovih funkcij s šestimi novimi funkcijami

$$\Phi_0 = \frac{J_0(a\gamma) - J_0(a)}{\ln \gamma} \quad \Psi_0 = \frac{N_0(a\gamma) - N_0(a)}{\ln \gamma}$$

$$\Phi_1(a\gamma) = a\gamma J_0(a\gamma) - (1-\mu)J_1(a\gamma)$$

$$\Psi_1(a\gamma) = a\gamma N_0(a\gamma) - (1-\mu)N_1(a\gamma)$$

$$\Phi_1(a) = aJ_0(a) - (1-\mu)J_1(a)$$

$$\Psi_1(a) = aN_0(a) - (1-\mu)N_1(a)$$

lahko stabilnostne pogoje za robne primere 1. skupine napišemo kratko v obliki determinant:

$$\text{I} \begin{vmatrix} \Phi_0 & \Psi_0 & 1 \\ aJ_1(a) & aN_1(a) & -1 \\ a\gamma J_1(a\gamma) & a\gamma N_1(a\gamma) & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{II} \begin{vmatrix} \Phi_0 & \Psi_0 & 1 \\ aJ_1(a) & aN_1(a) & -1 \\ \frac{a\gamma}{1-\mu}\Phi_1(a\gamma) & \frac{a\gamma}{1-\mu}\Psi_1(a\gamma) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{III} \begin{vmatrix} \Phi_0 & \Psi_0 & 1 \\ a\gamma J_1(a\gamma) & a\gamma N_1(a\gamma) & -1 \\ \frac{a}{1-\mu}\Phi_1(a) & \frac{a}{1-\mu}\Psi_1(a) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{IV} \begin{vmatrix} \Phi_0 & \Psi_0 & 1 \\ \frac{a}{1-\mu}\Phi_1(a) & \frac{a}{1-\mu}\Psi_1(a) & 1 \\ \frac{a\gamma}{1-\mu}\Phi_1(a\gamma) & \frac{a\gamma}{1-\mu}\Psi_1(a\gamma) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Druga skupina ima to skupno značilnost, da je v vseh njenih primerih odveč tretji člen v rešitvi (18). Če vstavimo namreč ustrezne odvode v pogojno enačbo za prosti rob (14), dobimo $C = 0$. Zaradi tega lahko pogojne determinante napišemo v razviti obliki:

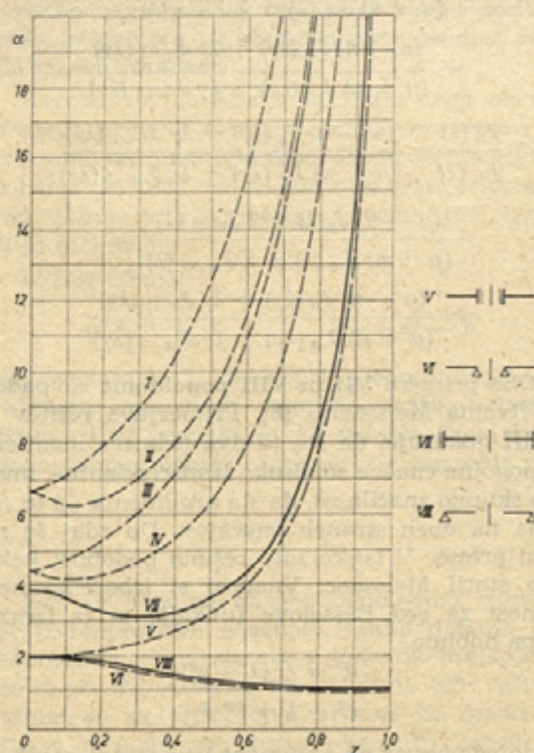
$$\begin{aligned} \text{V} \quad & \Psi_1(a)J_1(a\gamma) - \Phi_1(a)N_1(a\gamma) = 0 \\ \text{VI} \quad & \Phi_1(a\gamma)\Psi_1(a) - \Psi_1(a\gamma)\Phi_1(a) = 0 \\ \text{VII} \quad & \Psi_1(a\gamma)J_1(a) - \Phi_1(a\gamma)N_1(a) = 0 \\ \text{VIII} \quad & \Psi_1(a\gamma)\Phi_1(a) - \Phi_1(a\gamma)\Psi_1(a) = 0 \end{aligned}$$

Primerjava pogojnih enačb VIII in VI pokaže, da sta obe enačbi enaki. To pomeni, da rešitev primera VIII sovпада z znano Schubertovo rešitvijo VI, kar tudi fizikalno gledano ni presenetljivo. Bolj presenetljivo je, da oba še nerešena primera VII in VIII spadata v lažje rešljivo drugo skupino, ki ima splošno rešitev brez logaritmičnega člena.

Za numerično računanje sedmega primera sta bili najprej izračunani funkciji Φ_1 in Ψ_1 za argumente od 0,1 do 13, s temi vrednostmi pa so pri poljubnem razmerju γ izračunani koreni a , ki zadoščajo pogojni enačbi primera VII. Rezultati so:

$\gamma = 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$a = 3,6177$	3,2435	3,1817	3,3104	3,6459	4,3163
$\gamma = 0,7$	0,8	0,9	1,0		
$a = 5,5243$	8,0734	16,3760	∞		

Na sliki 1 je črtkano vrisanih vseh šest primerov, ki jih je rešil Schubert, s polno črto pa sta vnesena še tu izračunana primera VII in VIII.



Slika 1

SAMO NA ENEM ROBU OBREMENJEN KOLOBAR

a) Zunanji rob obremenjen na tlak

Napetostno stanje kolobarja, ki je obremenjen samo na zunanjem robu z enakomerno tlačno obremenitvijo $p_z = p$, ni več homogeno. Zaradi $p_n = 0$ bo $q = 0$ in

$$P = \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2} \quad R = -\frac{1}{1 - \gamma^2} \quad \lambda^2 = \frac{\alpha^2}{1 - \gamma^2}$$

$$n^2 = 1 + \frac{\alpha^2 \gamma^2}{1 - \gamma^2} \quad (19)$$

Splošno rešitev lahko napišemo s pomočjo izrazov (15), (16) in (17) tudi tako

$$z = A \int J_n(\lambda x) dx + B \int J_n(\lambda x) dx + C \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k + D \quad (20)$$

Z vstavljanjem odvodov izraza (20) v robni pogoj za prosti rob (14) se brez težav dokaže, da je tudi pri tako obremenjenem kolobarju, ki je na enem robu popolnoma prost, v rešitvi (20) odvečen tretji člen, ker mora biti $C = 0$. Z uporabo ustreznih robnih pogojev dobimo za vse štiri primere druge skupine relativno enostavne stabilnostne enačbe

$$V \quad \frac{J_n(\lambda \gamma)}{J_n(\lambda \gamma)} = \frac{(\mu - n) J_n(\lambda) + \lambda J_{n-1}(\lambda)}{(\mu + n) J_n(\lambda) + \lambda J_{n-1}(\lambda)}$$

$$VI \quad \frac{(\mu - n) J_n(\lambda) + \lambda J_{n-1}(\lambda)}{(\mu + n) J_n(\lambda) + \lambda J_{n-1}(\lambda)} =$$

$$= \frac{(\mu - n) J_n(\lambda \gamma) + \lambda \gamma J_{n-1}(\lambda \gamma)}{(\mu + n) J_n(\lambda \gamma) + \lambda \gamma J_{n-1}(\lambda \gamma)}$$

$$VII \quad \frac{J_n(\lambda)}{J_n(\lambda)} = \frac{(\mu - n) J_n(\lambda \gamma) + \lambda \gamma J_{n-1}(\lambda \gamma)}{(\mu + n) J_n(\lambda \gamma) + \lambda \gamma J_{n-1}(\lambda \gamma)}$$

$$VIII \quad \frac{(\mu - n) J_n(\lambda) + \lambda J_{n-1}(\lambda)}{(\mu + n) J_n(\lambda) + \lambda J_{n-1}(\lambda)} =$$

$$= \frac{(\mu - n) J_n(\lambda \gamma) + \lambda \gamma J_{n-1}(\lambda \gamma)}{(\mu + n) J_n(\lambda \gamma) + \lambda \gamma J_{n-1}(\lambda \gamma)}$$

Oba primera VII in VIII popolnoma sovpadata z rešitvama Meissnerja [8]. Primerjava rešitev VI in VIII dokazuje, da sta ta dva primera identična. Vse pogoje enačbe so visoko transcendentne, imajo pa to skupno značilnost, da sta argumenta (λ) in ($\lambda \gamma$) ločena na obeh straneh enačb. Do zdaj še nerešeni primer V lahko zato rešimo podobno, kakor je to storil Meissner. Vnaprej si izberemo neko vrednost za red Besselove funkcije n . Iz izrazov (19) pa dobimo

$$\alpha^2 = \lambda^2 (1 - \gamma^2)$$

$$n^2 = 1 + \lambda^2 \gamma^2$$

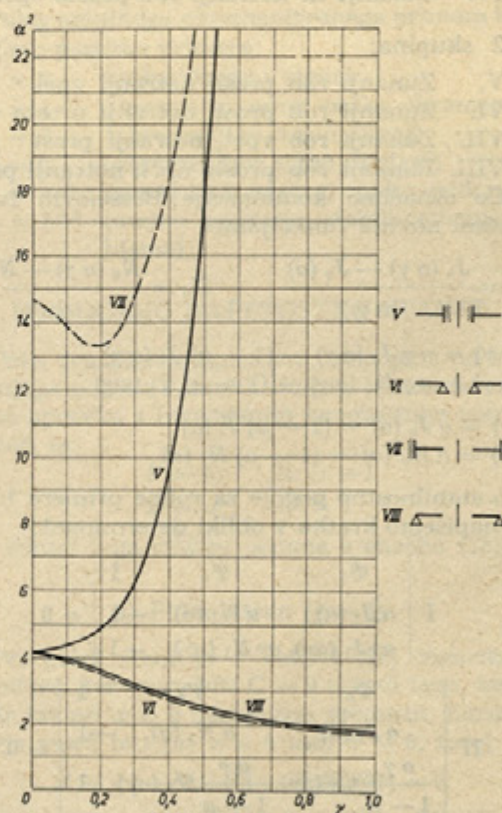
iz zadnjega izraza pa argument leve strani enačbe V

$$\lambda \gamma = \sqrt{n^2 - 1}$$

S to vrednostjo je določen levi ulomek pogoje enačbe. Zdaj pa s poskušanjem določimo argument desne strani (λ) tako, da bo vrednost desnega ulomka enaka vrednosti levega. Tako dobljena vrednost λ pa s pomočjo zgornjih izrazov že določa ustrezno vrednost α^2 . Rezultati V. primera so

n	$\lambda \gamma$	λ	γ	α^2
1	0	2,05	0	4
1,05	0,32	2,17	0,147	4,6
1,2	0,663	2,34	0,283	5,6
1,5	1,12	3,00	0,374	7,7
2	1,73	3,89	0,445	12,1
3	2,83	5,40	0,524	21,2

Na sliki 2 sta črtkano vnesena oba že znana primera, s polno črto pa tu izračunana primera V in VIII.



Slika 2

Pri ostalih štirih robnih pogojih, to je pri kolobarjih, ki nimajo nobenega prostega roba, pa je računanje znatno težje in dolgotrajnejše, ker pri njih poenostavitve $C = 0$ ne velja več. Za primer vzemimo kolobar z vpetima obema robovoma. Iz robnih pogojev

$$x = \gamma : z = 0$$

$$x = 1 : z = 0$$

$$z' = 0$$

$$z' = 0$$

dobimo pogojno determinanto

$$\begin{vmatrix} \int_{x=\gamma} J_n(\lambda x) dx & \int_{x=\gamma} J_{-n}(\lambda x) dx & \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k & 1 \\ J_n(\lambda \gamma) & J_{-n}(\lambda \gamma) & \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} 2k \eta_k & 0 \\ \int_{x=1} J_n(\lambda x) dx & \int_{x=1} J_{-n}(\lambda x) dx & \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k & 1 \\ J_n(\lambda) & J_{-n}(\lambda) & \sum_{k=1}^{\infty} 2k \eta_k & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Podobne determinante dobimo tudi za ostale tri primere iz prve skupine.

Numerično so bile izračunane vse determinante tako, da se je spet predpostavila poljubna vrednost reda n in s spreminjanjem λ določila približna ničla determinante. Natančnejša ničla je bila dobljena s kvadratno interpolacijo.

Rezultati tako računanega primera I so:

n	$\lambda \gamma$	λ	γ	a^2	a
1	0	6,65	0	44,22	6,65
1,05	0,32	6,8504	0,04671	46,82	6,84
1,5	1,12	7,6077	0,1472	56,62	7,53
1,9	1,61	8,472	0,191	67,69	8,22
2,5	2,29	9,298	0,2462	81,21	9,01
3,5	3,35	10,698	0,3168	102,96	10,15
4,5	4,39	12,024	0,3651	125,31	11,20
7,5	7,43	15,76	0,4714	193,18	13,89

Enako so bili izračunani tudi ostali trije primeri [11]. Pregled vseh štirih primerov je prikazan na sliki 3.

b) Notranji rob, obremenjen na nateg

Pri kolobarju, ki je obremenjen samo na notranjem robu z natezno obremenitvijo, je $p_z = 0$ in $1/\varrho = 0$. Zato postaneta izraza (6) za P in R neuporabna. Zato nastavimo za ta primer obe enačbi za napetosti (4), ki ju z novima okrajšavama

$$P_2 = \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} \quad R_2 = -\frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}$$

lahko pišemo tudi tako

$$\sigma_r = p \left(P_2 \frac{1}{x^2} + R_2 \right)$$

$$\sigma_\varphi = p \left(-P_2 \frac{1}{x^2} + R_2 \right)$$

Ponovno izvajanje stabilnostnega kriterija z novima zamenjavama

$$\lambda^2 = -a^2 R_2 = a^2 \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} \quad (21)$$

$$n^2 = 1 + a^2 P_2 = 1 + a^2 \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}$$

nas pripelje spet do znane diferencialne enačbe (12). Iz tega izhaja, da so tudi rešitve že znane in podane z izrazom (15) oziroma (20). Prav tako ostanejo tudi enačbe za robne pogoje nespremenjene.

Glede na to, da je γ lahko samo pozitivno število in manjše od 1, je tudi P_2 vedno pozitivno, R_2 pa vedno negativno. S tem je λ^2 vedno pozitivno število in pomeni ta obremenitveni primer vedno stabilnost problem.

Ker so vsi dosednji zaključki tega obremenitvenega primera formalno popolnoma enaki primeru samo na zunanem robu tlačno obremenjenega kolobarja, so tudi vsi stabilnostni pogoji formalno enaki. Edino razliko dobimo v primerjavi izrazov (19) in (21) za λ^2 .

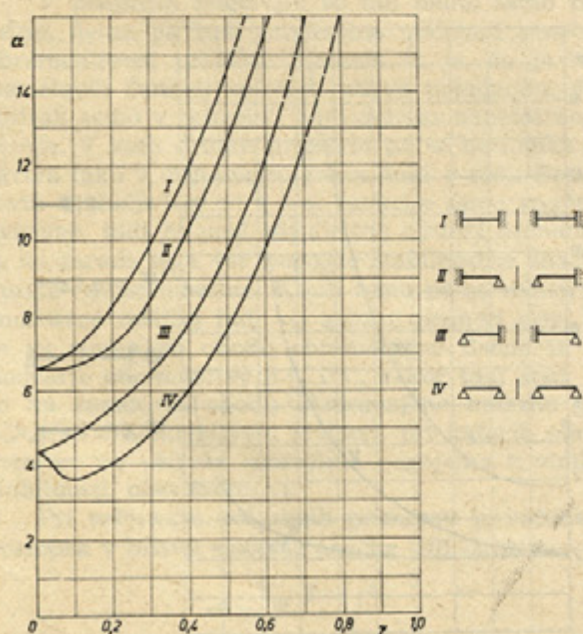
Iz (21) izhaja

$$n^2 = 1 + \lambda^2 \quad \lambda = \sqrt{n^2 - 1}$$

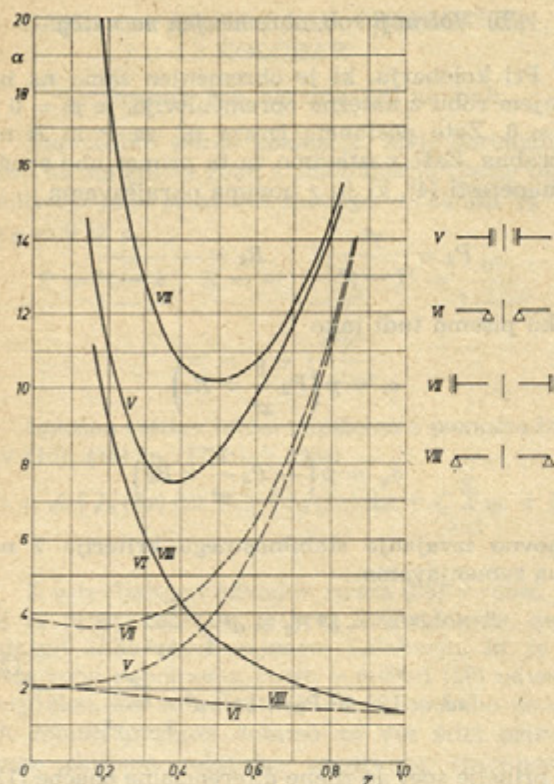
S to vrednostjo λ lahko pri predpostavljenem n izračunamo eno stran pogojnih enačb, potem pa poiščemo tisti produkt $\lambda \gamma$, ki zadošča drugi strani. Iz tega dobimo ustrezno razmerje γ , naposled pa še

$$a^2 = \lambda^2 \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}$$

Ker so pogojne enačbe popolnoma enake že prej izvedenim enačbam, lahko dobimo nove vrednosti za a^2 enostavno s tem, da prejšnje delimo z γ^2 . Na sliki 4 so rezultati teh računov. Črtkano so za primerjavo vrisane že znane krivulje za obremenjeno zunanjo konturo. Zaradi zelo velikih vrednosti, ki jih a^2 dosega, so na sliki narisane funkcije $a = f(\gamma)$ namesto $a^2 = f(\gamma)$.



Slika 3



Slika 4

KOLOBAR, KI JE OBREMENJEN NA ZUNANJEM ROBU S TLAČNO, NA NOTRANJEM PA Z ENAKO VELIKO NATEZNO OBREMENITVIJO

Pri tem obremenitvenem primeru je $\varrho = -1$. Glede na (6) bo

$$P = \frac{2\gamma^2}{1-\gamma^2} \quad R = -\frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2}$$

Stabilnostni kriterij (9) da tudi v tem primeru diferencialno enačbo (12) ter robna pogoja (13) in (14). V primeru, da ima kolobar en rob popolnoma prost, bo spet zaradi $C = 0$ odveč tretji člen splošne rešitve (15). Načelno torej ni nikakršne razlike od že obravnavanih primerov — razen samega računanja. Zaradi

$$\lambda^2 = a^2 \frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2} \quad n^2 = 1 + a^2 \frac{2\gamma^2}{1-\gamma^2}$$

ne moremo pri vnaprej izbranem n več tako enostavno izračunati argumentov λ ali $\lambda\gamma$ ene ali druge strani pogojne enačbe. Vendar lahko iz prvega izraza dobimo

$$a^2 = \lambda^2 \frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2}$$

s tem pa preide drugi izraz v

$$n^2 = 1 + 2 \frac{\lambda^2 \gamma^2}{1+\gamma^2}$$

iz tega pa

$$\lambda = \frac{c}{\gamma}$$

kjer pomeni

$$c = \sqrt{\frac{n^2-1}{2}(1+\gamma^2)}$$

To vrednost za λ lahko vstavimo v pogojne enačbe pri vnaprej izbranem n in spreminjamo γ na obeh straneh enačb tako dolgo, da bo enačbam zadoščeno.

Za zgled vzemimo robni primer V. Pogojno enačbo pri predpostavljenem $n = 2$ in $\mu = 0,3$ lahko napišemo

$$\varphi(\gamma) = \frac{J_2(c)}{N_2(c)} - \frac{1,7 J_2(c/\gamma) + c/\gamma J_1(c/\gamma)}{2,3 N_2(c/\gamma) + c/\gamma N_1(c/\gamma)} = 0$$

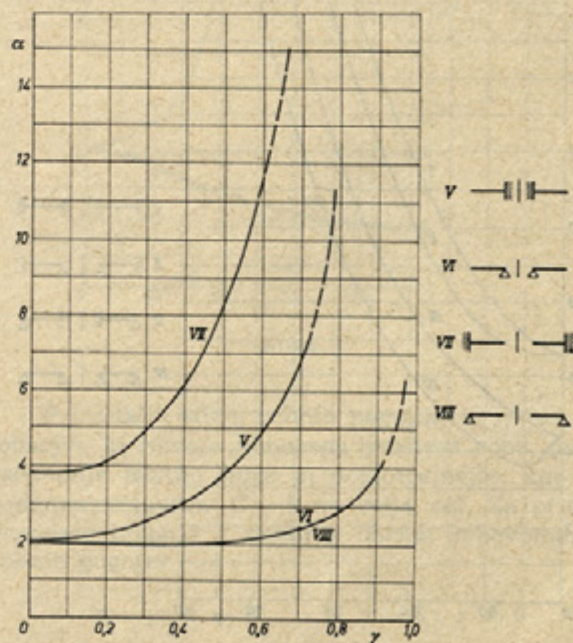
$$c = \sqrt{\frac{3}{2}(1+\gamma^2)}$$

Numerični rezultati so

γ	c	λ	$\varphi(\gamma)$
0,1	1,23	12,3	- 2,39
0,1375	1,24	9,0	- 1,402
0,2	1,25	6,25	- 1,162
0,216	1,253	5,8	- 27,442
0,217	1,2536	5,777	$\mp \infty$
0,22	1,254	5,7	+ 8,608
0,224	1,2544	5,6	+ 3,857
0,23	1,255	5,46	+ 2,717
0,25	1,26	5,05	+ 1,002
0,3	1,28	4,26	+ 0,387
0,38	1,31	3,45	+ 0,0017
0,4	1,32	3,3	- 0,140

Iz zgornje tabele je razvidno, da je približna rešitev pogojne enačbe

$$\gamma = 0,38, \quad c = 1,31, \quad \lambda = 3,45$$



Slika 5

iz česar izhaja

$$\alpha^2 = 8,9$$

Na sliki 5 so rezultati 2. skupine robnih pogojev [12].

POSEBNI PRIMER $\varrho = 1/\gamma^2$

V primeru, ko je obremenitveno razmerje $\varrho = 1/\gamma^2$, bo po (6)

$$P = -1; \quad R = 0$$

ter obe napetosti

$$\sigma_r = -p_z \frac{1}{x^2} \quad \sigma_\varphi = p_z \frac{1}{x^2}$$

ki sta torej enaki, vendar različnega predznaka.

Diferencialna enačba preide z

$$n^2 = 1 - \alpha^2$$

v znano Eulerjevo diferencialno enačbo

$$x^4 z^{IV} + 2 x^3 z''' - n^2 x^2 z'' + n^2 x z' = 0$$

ki ima splošno rešitev

$$z = A x^2 + B x^{1+n} + C x^{1-n} + D$$

Kakor vidimo, je rešitev sestavljena iz treh eksponentnih funkcij in konstante. Prav tako bodo tudi vsi odvodi, ki jih potrebujemo za nastavitve robnih pogojev, v obliki eksponentnih funkcij. Ker pa so te funkcije vedno samo monotono naraščajoče ali pojemajoče, pridemo tudi v tem obremenitvenem primeru do sklepa, da taka rešitev ne more pomeniti stabilnostnega problema.

SPLOŠNI PRIMER

V prejšnjih poglavjih so bili delno samo načelno, delno pa tudi numerično obdelani posebni obremenitveni primeri. Izkazalo se je, da je red Besselovih funkcij splošne rešitve popolnoma definiran samo v primerih homogenega napetostnega stanja. V vseh drugih primerih pa se neznanka α^2 skriva tako v argumentu kakor tudi v redu Besselovih funkcij. Ker so s tem funkcije same vnaprej neznane, tudi ni moč eksplicitno izraziti neznanke in so zaradi tega vse pogoje stabilnostne enačbe visoko transcendentne. Kljub temu pa so relativno enostavno rešljivi tudi vsi splošni primeri sten, ki so na zunanjem obodu obremenjene tlačno in je razmerje obremenitev $\varrho < 1/\gamma^2$, kakor tudi sten, ki so na zunanjem obodu obremenjene natezno pri $\varrho > 1/\gamma^2$. Obremenitveni primeri, pri katerih obremenitev ne ustreza zgornjima pogojema z vidika stabilnosti, niso zanimivi.

Pri reševanju poljubnih primerov je računski postopek v bistvu enak. Iz enačbe (10) izrazimo

$$\alpha^2 = \lambda^2 \frac{1 - \gamma^2}{1 - \varrho \gamma^2}$$

to pa vstavimo v enačbo (11) ter dobimo

$$n^2 = 1 + \lambda^2 \gamma^2 \frac{1 - \varrho}{1 - \varrho \gamma^2}$$

Iz tega izraza pa izločimo

$$\lambda = \frac{c}{\gamma}$$

kjer je

$$c = \sqrt{(n^2 - 1) \frac{1 - \varrho \gamma^2}{1 - \varrho}}$$

Vedno moramo izbrati vnaprej red Besselove funkcije n in s tem to funkcijo definirati. Pri podanem razmerju obremenitev ϱ si izberemo vrednost γ in iz zgornjega izraza izračunamo λ . Tako dobimo še argument Besselove funkcije. Pogojni determinanti zadostimo zdaj s spreminjanjem razmerja γ . Na koncu dobimo izbočitveni koeficient α^2 ter iz njega kritično obremenitev.

Pri praktičnem reševanju je omembe vredno še dejstvo, da vsi robni primeri razpadajo v dve večji skupini, in sicer v skupino, pri kateri je eden obeh robov popolnoma prost, ter v drugo skupino, ki prostega roba nima. Prva skupina je lažja za računanje, ker pri njej ni tretjega člena splošne rešitve.

SKLEP

Rešitev stabilnostnega problema krožne stene s centrično krožno odprtino je bila v tej razpravi obravnavana s temile predpostavkami in omejitvami:

- osna simetrija obremenitve in deformacijskega stanja,
- tanke stene s konstantno debelino,
- veljavnost Hookovega zakona,
- teorija majhnih deformacij.

Vse navedene supozicije, ki so nas pripeljale do relativno enostavnih končnih enačb, seveda pomenijo bistvene omejitve glede splošnosti rešitev. Taka je posebno prva predpostavka, ki zaradi omejitve na osno simetrijo obremenitve že sama po sebi močno krči raznolikost primerov, ki bi se lahko pojavili v praksi. Še večje težave pa povzroča zahteva po osni simetriji deformacijskega stanja, s katero smo dobili sicer teoretično popolnoma jasen odgovor o najmanjši kritični kakor tudi o višjih kritičnih obremenitvah, vendar pa brez odgovora na vprašanje, ali obstaja pri poljubnem razmerju radijev morda neka neosna simetrična deformacijska oblika kot rezultat neke še manjše kritične obremenitve. Pri krožni steni brez odprtine je že dokazano [9], da najnižja kritična obremenitev ustreza osno simetričnemu izbočenju ne glede na pritrjevanje konture, da pa je v cirkularni smeri valovito izbočenje tudi možno, vendar samo pri višji obremenitvi. Razmere pri izbočenju stene z odprtino se pri večanju radija notranje konture vedno bolj oddaljujejo od razmer pri polni steni in približujejo razmeram pri ozki pravokotni steni, o kateri pa vemo, da se bo izbočila v več valovih.

Neosno simetrične razmere pri izbočenju krožnih sten z odprtini, kaže, še niso obdelane. Zato moramo ostati pri uporabi v tej razpravi dobljenih rešitev previdni v vseh primerih velikih odprtin. Pri majhnih in srednjih odprtinah pa so rezultati nedvomno uporabni.

Glede na uporabljeno teorijo majhnih deformacij smo dobili v rezultatih razprave samo kritične obremenitve brez kakršnihkoli kvantitativnih podatkov o velikosti pomikov. Zato uporabljena metoda tudi ne more biti osnova za študiranje obnašanja in nosilnosti stene v nadkritičnem območju. Prav tako nas supozicija preme sorazmernosti med napetostmi in deformacijami omejuje na tanke stene, pri katerih prihaja do izbočenja pri napetostih, ki so pod mejo proporcionalnosti.

Literatura:

1. A. Pflüger: Stabilitätsprobleme der Elastostatik, 1964, Springer, Berlin.
2. E. Trefftz: Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts, ZAMM 1933.

3. S. Timoshenko — J. N. Goodier: Theory of Elasticity, 1951, McGraw-Hill, London.
4. Jahnke-Emde: Tafeln höherer Funktionen, 1960, B. G. Teubner, Leipzig.
5. B. Krušič: Referat v krožku katedre za matematiko in mehaniko Fakultete za strojništvo, 1966.
6. D. S. Mitrinović — D. Z. Djoković: Specijalne funkcije, 1964, Građevinska knjiga, Beograd.
7. A. Schubert: Die Beullast dünner Kreisringplatten, die am Aussen- und Innenrand gleichmässigen Druck erfahren, ZAMM 1947.
8. E. Meissner: Über das Knicken kreisringförmiger Scheiben, Schweiz. Bauzeitung, 1933.
9. C. B. Biezeno — R. Grammel: Technische Dynamik, 1939, Springer, Berlin.
10. H. L. Langhaar: Energy Methods in Applied Mechanics, 1962, John Wiley and Sons, New York-London.
11. S. Lukšič: Diplomsko delo, 1967.
12. V. Zgonik: Diplomsko delo, 1968.

Avtorjev naslov: prof. dr. ing. Marko Škerlj,
Fakulteta za strojništvo
Univerze v Ljubljani

DK 621.515.001

Profil meridianske hitrosti v instacionarnem področju obročnega difuzorja, ki sledi kolesu radialnega turbokompresorja

MARKO PERKAVEC

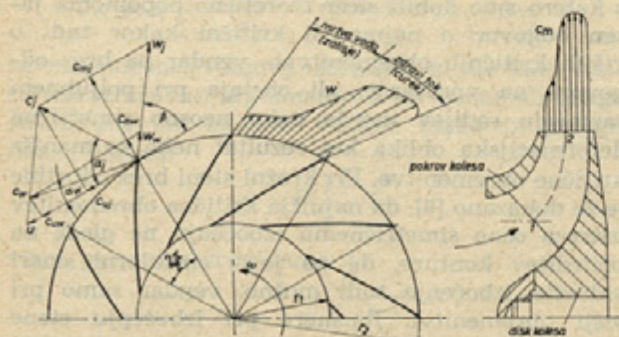
Tok ob izstopu iz kolesa radialnega turbokompresorja je instacionaren in osno asimetričen. V prostoru, ki sledi kolesu, npr. v obročnem difuzorju brez vodilnih lopatic, rotirajo področja zdravega toka (curki) in področja mrtve vode (zatišja) skupaj s kolesom. V večji razdalji od vstopa v obročni difuzor zaradi medsebojnega vpliva razlike med njimi izginejo. Onstran mešalne točke je tok v difuzorju stacionaren in osno simetričen.

Primerjava v področju instacionarnega toka in področju onstran mešalne točke merjene totalne temperature omogoča sklepanja o drugih veličinah v področju instacionarnega toka. Njihove meritve dajejo namreč popačene rezultate.

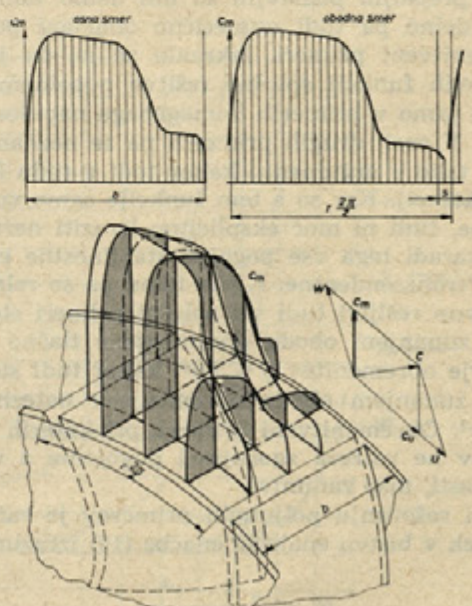
Teoretična metoda za določitev profila meridianske komponente absolutne hitrosti v instacionarnem področju je v pričujočem sestavku opisana in ilustrirana z meritvami.

1. Tok v obročnem difuzorju

Relativna hitrost w oz. njej ustrezna meridianska hitrost c_m v poljubnem, torej tudi v izstopnem prerezu kanala, ki ga omejujeta dve sosednji lopatici ter pokrov in disk kolesa radialnega turbokompresorja (sl. 1), ni konstantna, pač pa ima tako v osni kakor tudi v obodni smeri neki profil (sl. 2).



Sl. 1. Kolo radialnega turbokompresorja; trikotnik hitrosti za rotirajočo mrtvo vodo (indeks w) in curke (indeks j); profil relativne hitrosti w v obodni ter meridianske hitrosti c_m v osni smeri



Sl. 2. Profil meridianske hitrosti c_m ob izstopu iz kanala med dvema lopaticama kolesa radialnega turbokompresorja (z je število lopatic, ki so debele s mm)