STROJNIŠKI VESTNIK

LETNIK XV LJUBLJANA, V MARCU 1969 ŠTEVILKA 2

DK 624.042

Reševanje skeletnih konstrukcij, ki imajo horizontalne in vertikalne pomike vozlišč

ERVIN PRELOG

Prikazan je iteracijski postopek za reševanje skeletnih konstrukcij, ki imajo horizontalne in vertikalne pomike vozlišč. Zaradi horizontalnih obremenitev nepopolnih skeletov nastajajo težave pri reševanju skeletov po Crossovi metodi, zato je avtor dopolnil to metodo z dodatnimi ravnotežnimi enačbami, ki skupno s Crossovo iteracijo omogočajo reševanje poljubno oblikovanih in poljubno obremenjenih skeletnih sistemov dosti enostavno in še za prakso priročno.

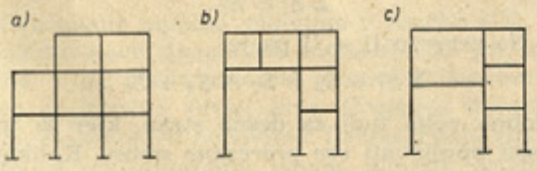
UVOD

Pri reševanju skeletnih in podobnih statično večkratno nedoločenih konstrukcij v praksi prav radi uporabljamo približne iteracijske postopke. Te metode omogočajo hitro in pregledno reševanje statično večkratno nedoločenih sistemov. Porabljeni čas za reševanje takšnih konstrukcij je po navadi nekajkrat krajši od klasičnih metod. Dandanes med iteracijskimi metodami pogosto uporabljamo Crossov postopek, ki je eden najbolj uspelih metod za reševanje tovrstnih sistemov. Žal pa ta postopek ni vedno tako uporaben pri sistemih, ki imajo horizontalne etažne pomike, posebno pa se pojavljajo še težave pri t. i. *nepopolnih* skeletih.

Za nepopolne skelete imamo skelete, kjer so izpuščeni bodisi posamezni stebri ali nosilci (sl. 1 b) ali pa so etažne višine posameznih polj skeleta različno visoke (sl. 1 c). S posebnimi težavami pa imamo še opraviti, če so takšni skeleti obremenjeni s horizontalno obremenitvijo, kar pa se zdaj, ko moramo upoštevati tudi potresne obremenitve, dogaja redno.

Pri metodi, ki jo obravnavamo v tem delu, skušamo pomanjkljivosti Crossovega postopka za takšne skelete izboljšati in prikazati v praktično razmeroma enostavni, a pregledno zgrajeni metodi. Pokaže se, da Crossova iteracija v tem postopku v splošnem nekoliko počasneje konvergira, vendar je sama iteracija tôliko enostavna, ko si poprej izdelamo vse potrebne začetne priprave, da postopek ne povzroča nobenih težav pri praktični uporabi.

Osnovna ideja te metode je kombinacija Crossove metode za *nepomična* vozlišča s sistemom ravnotežnih enačb, ki jih dobimo iz posameznih prerezov konstrukcije. Teh enačb, ki jih rešimo za vse iteracije samo enkrat, je toliko, kolikor *pomičnih* prostostnih stopenj ima posamezen obravnavani skelet. Pogostoma so te enačbe zelo preproste oblike, tako da je njihovo reševanje enostavno, posebno še, kadar razpadejo v med seboj neodvisne skupine enačb. Za *popolne* skelete (sl. 1a), kjer se dá ta metoda tudi s pridom uporabljati, pa so te enačbe povsem odvečne, kar še nadalje poenostavlja postopek.



Slika 1

OSNOVNE ENAČBE ZA NEPOPOLNE SKELETE

Kadar je obremenjen skelet z zunanjimi silami (oz. momenti), nastopajo v vozliščih skeleta momenti, ki se pojavljajo zaradi *zasuka* in *pomika* vozlišča. Pri Crossovem postopku jemljemo za začetno stanje skelet z nepomičnimi vozlišči. Če obremenimo takó fiksiran skelet z zunanjo obremenitvijo, dobimo v vozliščih *vozliščne momente* M_{ij}, imenovane tudi *gonilne momente*. Le-te moramo postopoma od vozlišča do vozlišča izravnavati, tj. uravnovešati. Kolikor dopuščamo samo *zavrtitev* vozlišča, velja za ta Crossov postopek znana iteracija (glej npr. [1], [2]).

Ponovimo na kratko — zaradi poznejših aplikacij — ta postopek!

Gonilni moment razdeljujemo v vozlišču i po *razdelilni* enačbi

$$M_{ij}^{r} = -\mu_{ij} M_{ij} \tag{1}$$

Tu je M_{ij} gonilni moment, ki pripada vozlišču i; koeficient μ_{ij} pa je *razdelilno* število, ki ga dobimo iz togosti nosilcev in je

$$\mu_{ij} = \frac{k_{ij}}{K_i} \tag{2}$$

V enačbi (2) je k_{ij} *togost* nosilca ij, ki je

$$k_{ij} = \frac{aEI}{lI_c} \tag{3}$$

kjer je

$a = 4$ za obojestransko vpeti nosilec,
$a = 3$ za enostransko vpeti, na drugi strani pa členkasto priključeni nosilec.

Dalje je še

I — vztrajnostni moment nosilca
I_c — poljubno izbran primerjalni vztrajnostni moment.

Koeficient K_i pa je *vozliščna togost* in je vsota togosti vseh nosilcev, ki se stikajo v obravnavanem vozlišču, torej

$$K_i = \Sigma k_{ij} \tag{4}$$

Hkrati z razdelitvijo momentov v vozlišču i pa se pojavljajo še v vseh sosednjih vozliščih *prenosni momenti*, ki jih dobimo po *prenosni* enačbi

$$M_{ji} = \gamma M_{ij}^r = -\gamma \mu_{ij} M_{ij} \tag{5}$$

Koeficient γ je *prenosno število* in je

$\gamma = 0{,}5$ za prenos v vpeto vozlišče,

$\gamma = 0$ za prenos v členkasto vozlišče.

Če skelet ni izpostavljen *pomikom* vozlišč, bi takšna zaporedna iteracija *razdelitve in prenosa* po nekaj krogih privedla do izravnave vseh gonilnih momentov v vozliščih, s čimer bi bili momenti v skeletu znani. Končne momente dobimo namreč s seštevanjem vseh razdelilnih momentov na posameznih krajiščih nosilcev.

Pri splošnih obremenitvah skeletov pa nastajajo razen vozliščnih momentov še *dopolnilni momenti v stebrih* zaradi horizontalnih pomikov in *dopolnilni momenti v nosilcih* zaradi morebitnih vertikalnih pomikov vozlišč. Ti momenti povečujejo (ali zmanjšujejo) vozliščne momente in jih je treba upoštevati pri izravnavi gonilnih momentov.

Dopolnilne momente dobimo takole. Naj ima poljuben skelet n etaž in s polj. Naredimo prerez čez stebre v i-ti etaži (sl. 2).

Med zunanjo obremenitvijo nad prerezom

$$Q_i^o = \sum_{i=i}^{n} S_i \tag{6}$$

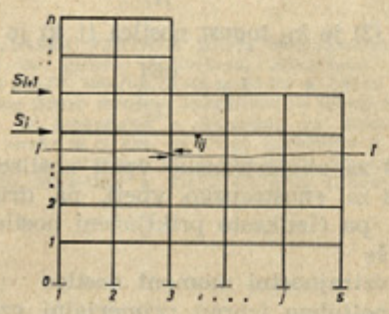
in prečnimi silami v stebrih T_{ij} ($j = 1,2 \ldots s$) velja ravnotežna enačba

$$Q_i^o = \sum_{j=1}^{s} T_{ij}, \tag{7}$$

ki sestavlja osnovno enačbo za izračun dopolnilnih momentov.

Če je relativni premik i-te etaže $\Delta_i - \Delta_{i-1}$, tedaj velja med prečno silo T_{ij} stebra ij in pomikom $\Delta_i - \Delta_{i-1}$ znana enačba [1]

$$T_{ij} = \frac{bEI_j}{h_i^2}(\Delta_i - \Delta_{i-1}) \tag{8}$$



Slika 2

kjer je

$b = 12$ za obojestransko vpeti steber

$b = 3$ za enostransko vpeti, na drugi strani pa členkasto priključeni steber.

Podobna enačba velja med momentom M_{ij} v stebru in pomikom stebra

$$M_{ij}^{zg} = M_{ij}^{sp} = \frac{cEI_j}{h_i^2}(\Delta_i - \Delta_{i-1}) \tag{9}$$

kjer je

$c = 6$ za obojestransko vpeti steber,

$c = 3$ za enostransko vpeti, na drugi strani pa členkasto priključeni steber (pri členku je tudi $M_{ij} = 0$!).

Obe enačbi (8) in (9) zapišemo še nekoliko drugače v obliki

$$T_{ij} = \frac{1}{h_i^2}\frac{b\,I_j}{h_i I_c}[E\,I_c(\Delta_i - \Delta_{i-1})]$$

ali

$$T_{ij} = \frac{r_{ij}}{h_i^2}(\Delta_i - \Delta_{i-1}) \tag{10}$$

kjer je

$$r_{ij} = \frac{b\,I_j}{h_i\,I_c} \tag{11}$$

in

$$\Delta_i - \Delta_{i-1} = E\,I_c(\Delta_i - \Delta_{i-1}) \tag{12}$$

Podobno dobimo za momente

$$M_{ij}^{zg} = M_{ij}^{sp} = \frac{p_{ij}}{h_i}(\Delta_i - \Delta_{i-1}) \tag{13}$$

in je

$$p_{ij} = \frac{c\,I_j}{h_i\,I_c} \tag{14}$$

Sedaj vstavimo vrednosti iz enačbe (10) v ravnotežno enačbo (7). Tako je

$$Q_i^o = \sum_{j=1}^{s} \frac{r_{ij}}{h_i^2}(\Delta_i - \Delta_{i-1}) \tag{15}$$

ali še z upoštevanjem enačbe (6)

$$\sum_{i=i}^{n} S_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{r_{ij}}{h_i^2}(\Delta_i - \Delta_{i-1}) \tag{16}$$

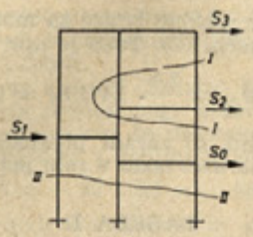
V tej enačbi so neznanke $\Delta_i - \Delta_{i-1}$; torej pomiki. Posebej poudarimo, da je potrebno levo stran enačbe razlagati smiselno. Vsota S_i zajema vse sile v horizontalni smeri, ki jih zajame izbrani *prerez*. Tako je npr. na sl. 3, za prerez I — I

$$\Sigma S_i = S_2 .$$

Na prerezu II — II pa je

$$\Sigma S_i = S_3 + S_2 + S_1 + S_0 .$$

Podobno velja tudi za desno stran, kjer je treba v vsoti upoštevati *vse prerezane* stebre. Kolikor bi izbirali zaradi potrebe vertikalne prereze, veljajo



Slika 3

enake ugotovitve za vertikalno obremenitev oziroma za prerezane nosilce (glej primer 2).

Enačb (16) za pomike je toliko, kolikor smo izbrali *prerezov*, teh pa moramo izbrati zopet toliko, kolikor *pomičnih* prostostnih stopenj ima skelet. Če zdaj iz enačb (16) izračunamo relativne pomike $\Delta_i - \Delta_{i-1}$ in dobljene rezultate vstavimo v enačbo (13), dobimo že *dopolnilne* momente v vozliščih skeleta.

Zdaj izvedemo prvo Crossovo iteracijo s tem, da upoštevamo, da sestavljajo zdaj *gonilne momente: začetni momenti* in pravkar izračunani *dopolnilni momenti*. Razdelitev po enačbi (1) in prenos po enačbi (5) dasta že prvo Crossovo iteracijo (tako bomo v prihodnje imenovali razdelitev in prenos). Crossova iteracija povzroča v stebrih *nove* momente, ki pa niso v *ravnotežju* z zunanjo obremenitvijo, kar ima za posledico nov pomik vozlišča. Ta pomik je treba pred nadaljnjo Crossovo iteracijo uravnovesiti z *nasprotno* delujočo etažno obremenitvijo ($Q_i^{(I)}$).

To obremenitev lahko določimo hitro. Za vsak prerez izračunamo po znani enačbi prečne sile v stebrih. Te dobimo po enačbi

$$T_{ij}^{(I)} = \frac{1}{h_{ij}} (M_{ij}^{zg} + M_{ij}^{sp}) \qquad (17)$$

kjer sta M_{ij}^{zg} in M_{ij}^{sp} momenta, ki jih je dal prvi krog Crossove iteracije. Prečne sile, izračunane po enačbi (17), pa vstavimo v že znano enačbo (7), toda z nasprotnim predznakom, torej

$$Q_i^{(I)} = -\sum T_{ij}^{(I)} = -\sum \frac{1}{h_{ij}} (M_{ij}^{zg} + M_{ij}^{sp}) \qquad (18)$$

Zdaj izračunamo po enačbi (16) še relativne pomike

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{r_{ij}}{h_i^2} (\Delta_i - \Delta_{i-1}) = Q_i^{(I)} \qquad (19)$$

oziroma

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{r_{ij}}{h_i^2} (\Delta_i - \Delta_{i-1}) = -\sum \frac{1}{h_{ij}} (M_{ij}^{zg} + M_{ij}^{sp}) \qquad (20)$$

Izračunane pomike vstavimo v enačbo (13), pa že dobimo nove *dopolnilne* momente, ki jih zdaj skupno s še neizravnanimi momenti izravnamo. S tem je končan drugi krog Crossove iteracije. Zatem celotni potek ponovimo. Iteracijo ponavljamo tolikokrat, da dosežemo dovolj majhne ostanke. Rezultirajoče momente dobimo naposled s seštevanjem vseh momentov, ki jih vsebuje pripadajoča kolona Crossove iteracije.

Iz opisanega postopka vidimo, da je potrebno v primeru pomičnih skeletov med vsak krog Crossove iteracije vključevati računanje *dopolnilnih* momentov.

Podajmo zdaj še pregled operacij celotnega postopka.

1. Določanje konstant skeleta (tabela konstant).

$$k = \frac{a\,EI}{h\,I_c}, \quad K = \Sigma\, k_{ij}, \quad \mu = \frac{k}{K}$$

$$r_{ij} = \frac{b\,I_j}{h_i\,I_c}, \quad p_{ij} = \frac{c\,I_j}{h_i\,I_c}$$

2. Določanje začetnih momentov.

a) Momenti polne vpetosti — za nosilce in stebre, ki so obremenjeni v polju.

b) Dopolnilni momenti.

α) Izpisovanje ravnotežnih enačb, za vsak prerez (prerezov je toliko, kolikor je prostostnih stopenj)

$$\Sigma\, T_{ij} = \Sigma\, S_i \qquad (A)$$

β) Določanje pomikov iz enačb

$$\Sigma\, (\Delta_i - \Delta_{i-1})\, \frac{r_{ij}}{h_i^2} = \Sigma\, S_i \qquad (B)$$

γ) Določanje dopolnilnih momentov po enačbi

$$M_{ij}^{zg} = M_{ij}^{sp} = \frac{p_{ij}}{h_i} (\Delta_i - \Delta_{i-1}) \qquad (C)$$

3. Prva Crossova iteracija.

a) Razdelitev po enačbi

$$M_{ij}^{(r)} = -\mu_{ij}\; M_{ij} \qquad (D)$$

b) Prenos po enačbi

$$M_{ij}^{(p)} = \gamma\, M_{ij}^{(r)} \qquad (E)$$

4. Določanje dopolnilnih momentov.

a) Določanje prečnih sil

$$T_{ij}^{(I)} = -\frac{1}{h_{ij}} (M_{ij}^{zg} + M_{ij}^{sp}) \qquad (F)$$

b) Določanje premikov iz ravnotežnih enačb

$$\sum \frac{r_{ij}}{h_i^2} (\Delta_i^{(I)} - \Delta_{i-1}^{(I)}) = -\sum \frac{1}{h_{ij}} (M_{ij}^{zg} + M_{ij}^{sp}) \qquad (G)$$

c) Določanje dopolnilnih momentov po enačbi

$$M_{ij}^{zg} = M_{ij}^{sp} = \frac{p_{ij}}{h_i} (\Delta_i^{(I)} - \Delta_{i-1}^{(I)}) \qquad (H)$$

5. Druga Crossova iteracija (kakor točka 3).

6. Določanje dopolnilnih momentov (kakor točka 4) itd.

7. Sumiranje momentov.

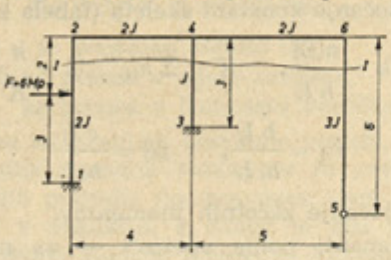
8. Kontrola.

9. Risanje diagramov upogibnih momentov.

Na naslednjih primerih si bomo ogledali nekaj značilnih primerov, ki bodo pokazali celoten tehnični postopek. Ta naj bo čimbolj sistematičen z vmesnimi kontrolami ob vsaki pomembnejši fazi dela.

1. PRIMER

Na sl. 4 je narisan enoetažni skelet, ki ima dve polji. Ta skelet ima eno samo pomično prostostno stopnjo, namreč horizontalni pomik Δ_I.



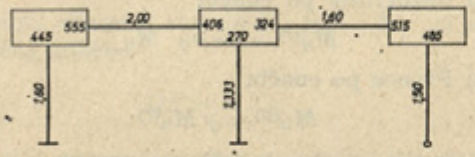
Slika 4

Tabela konstant je podana v tabeli I. Primerjalni vztrajnostni moment je $I_c = I$.

TABELA I. *Konstante*

Element	h,l	I	I/I_c	a	K	b	c	r_{jj}	p_{jj}
12	5	2 I	2	4	1,6	12	6	4,80	2,40
34	3	I	1	4	1,333	12	6	4,00	2,00
56	6	3 I	3	3	1,5	3	3	1,50	1,50
24	4	2 I	2	4	2,0	—	—	—	—
46	5	2 I	2	4	1,6	—	—	—	—

Razdelilne koeficiente, pomnožene s 1000, napišemo v shemi na sl. 5.



Sl. 5. *Shema μ k 1. primeru*

Določanje začetnih momentov. Sila $F = 6$ Mp povzroča vpetostna momenta v vpetem stebru

$$M_{12} = 6 \,.\, 5 \,.\, \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 2{,}88 \text{ Mpm}$$

$$M_{21} = 6 \,.\, 5 \,.\, \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 4{,}32 \text{ Mpm.}$$

Določanje dopolnilnih momentov. Horizontalna sila F, reducirana v *vozlišči* 1 in 2, dá v vozlišču 2 horizontalno silo

$$S_I = \frac{6 \,.\, 3}{5} = 3{,}6 \text{ Mp}$$

Če prerežemo skelet s prerezom I — I, dobimo ravnotežno enačbo za zgornji del prereza (enačba A)

$$T_{12} + T_{34} + T_{56} = S_I$$

Enačba (B) se glasi

$$\frac{4{,}8}{5^2}(\Delta_I - 0) + \frac{4{,}0}{3^2}(\Delta_I - 0) + \frac{1{,}5}{6^2}(\Delta_I - 0) = S_I$$

ali po ureditvi

$$\Delta_I = 1{,}475\, S_I$$

Zdaj določimo še splošne izraze za momente v stebrih. Te dobimo po enačbi (C). Tako je npr.

$$M_{12} = M_{21} = \frac{2{,}4}{5} \,.\, 1{,}475\, S_I = 0{,}709\, S_I$$

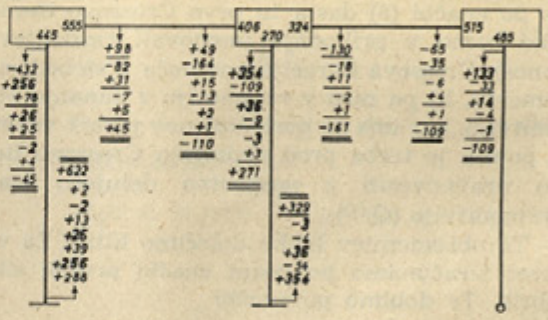
Nadaljnji momenti so zaradi pregleda vneseni v tabelo II, kajti ti obrazci bodo v rabi pri vseh nadaljnjih iteracijah.

TABELA II

Moment	Enačba	Iteracije		
		0	1	2
	$100\, S_I$	360	37	—3
$M_{21} = M_{12}$	$0{,}709\, S_I$	256	26	—2
$M_{34} = M_{43}$	$0{,}984\, S_I$	354	36	—3
M_{65}	$0{,}369\, S_I$	133	14	—1

V tabeli smo še vzeli silo S_I v velikosti $100\, S_I$ tako, da so momenti pri crossiranju cela števila in prikazujejo dobljene številke vrednosti momentov v Mp cm!

S temi začetnimi pripravami preidemo k 1. Crossovni iteraciji. To izvedemo v posebni delovni shemi (sl. 6).



Sl. 6. *Delovna shema k 1. primeru*

V delovno shemo vnesemo začetne in pravkar dobljene dopolnilne momente. Pri tem označimo momente, ki vrtijo v nasprotni smeri gibanja kazalca na uri, za pozitivne.

Ponovimo začetek crossiranja! Tako je npr. v vozlišču 2 gonilni moment

$$M_2 = -432 + 256 = -176$$

Ta moment razdelimo po enačbi (D) na izravnalna momenta

$$M_{21} = -176\,(-0{,}445) = 78,$$
$$M_{24} = -176\,(-0{,}555) = 98.$$

Prenosna momenta pa sta po enačbi (E)

$$M_{12} = 0{,}5 \,.\, 78 = 39\,; \qquad M_{24} = 0{,}5 \,.\, 98 = 49\,.$$

Podobno ravnamo v vozliščih 4 in 6. V znak izravnave momentov za posamezna vozlišča podčrtujemo izravnalne momente. Račun je še preglednejši, če tudi posebej označimo (npr. z drugačno barvo) začetne in dopolnilne momente; pri naših delovnih shemah jih bomo označevali z debelo tiskanimi številkami.

V vozliščih 1 do 6 so se pojavili po crossiranju novi momenti v *stebrih*, tako npr.: $M_{21} = +78$; $M_{12} = +39$ itd., ki niso v ravnotežju z zunanjo obremenitvijo. Zato preidemo v skladu z izvajanji — k določanju ravnovesnih dopolnilnih momentov.

Po enačbah (F) in (A) je dopolnilna obremenitev

$$S_I^{(1)} = -\left[\frac{1}{5}(78+39) + \frac{1}{3}(-109-54) + \frac{1}{6}(-33)\right] = +37$$

Dobljeno vrednost vnesemo v tabelo II, kolono »1« in izračunamo tudi še momente v stebrih. Rezultati so podani tudi v tej tabeli.

Zdaj preidemo k drugi Crossovi iteraciji. Dobljene momente v stebrih prenesemo v delovno shemo in jih izravnamo skupno z vsemi še neizravnanimi momenti. Tako je npr. v vozlišču 2 gonilni moment

$$M_2^{(1)} = -82 + 26 = -56 \text{ itd.}$$

Po končani iteraciji (izravnava in prenos) določimo ponovno po enačbah (F) in (A) dopolnilno obremenitev. Tako je

$$S_1^{(2)} = -\left[\frac{1}{5}(25+13) + \frac{1}{3}(-9-4) + \frac{1}{6}(-4)\right] = -3$$

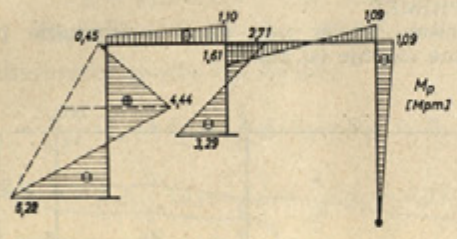
Dobljeno vrednost vnesemo v tabelo II, kolono »2«, kjer zopet dobimo dopolnilne momente. Ponovna Crossova iteracija dá že zadovoljivo majhne ostanke, tako da niso potrebni nadaljnji krogi iteracije. Seštevek momentov v posameznih kolonah dá že končne rezultate za vozliščne momente.

Kontrola horizontalnih sil dá po enačbi (F)

$$360 \approx +\left[\frac{1}{5}(-45+622) + \frac{1}{3}(272+329) + \frac{1}{6}.109\right] = 334$$

Dobljeni rezultat se za 26 kp razlikuje od natančne vrednosti.

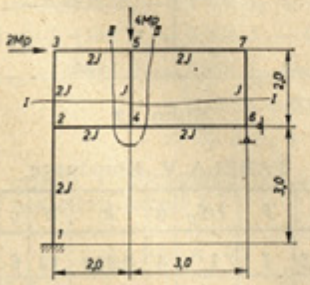
Izvedeni primer je pokazal, da so že trije koraki Crossove iteracije dali povsem zadovoljive rezultate. Na sl. 7 so še narisani diagrami upogibnih momentov.



Slika 7

2. PRIMER

Na sl. 8 je narisan skelet, ki ima dve pomični prostostni stopnji, eno v smeri nosilca 3, 5, 7 in eno vertikalno v smeri stebra 5, 4.



Slika 8

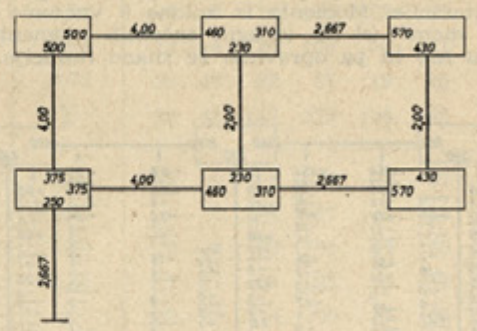
Ko si določimo tabelo konstant (tab. III) in shemo razdelilnih koeficientov (sl. 9), preidemo k določanju dopolnilnih momentov. Začetnih momentov skelet nima, ker delujejo vse obremenitve samo v vozliščih skeleta.

Določanje dopolnilnih momentov. Ker ima skelet dve pomični prostostni stopnji, izberemo prerez I — I in II—II za zapis osnovnih ravnotežnih enačb (A) (sl. 10 a, b). Tako je

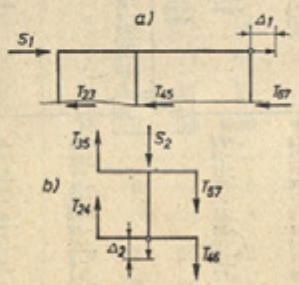
$$T_{23} + T_{45} + T_{67} = S_1$$
$$T_{35} + T_{24} - T_{46} - T_{57} = S_2$$

TABELA III. *Konstante*

Element	h,l	I	I/I_c	a	k	b	c	r_{ij}	p_{ij}
12	3	2 I	2	4	2,667	—	—	—	—
23	2	2 I	2	4	4,00	12	6	12,00	6,00
45	2	I	1	4	2,00	12	6	6,00	3,00
67	2	I	1	4	2,00	12	6	6,00	3,00
35	2	2 I	2	4	4,00	12	6	12,00	6,00
57	3	2 I	2	4	2,667	12	6	8.00	4,00
24	2	2 I	2	4	4,00	12	6	12,00	6,00
46	3	2 I	2	4	2,667	12	6	8,00	4,00



Sl. 9. *Shema μ k 2. primeru*



Slika 10

Z izpisovanjem enačb (B) pa je

$$(\Delta_1 - 0)\frac{12}{2^2} + (\Delta_1 - 0)\frac{6}{2^2} + (\Delta_1 - 0)\frac{6}{2^2} = S_1$$

$$(\Delta_2 - 0)\frac{12}{2^2} + (\Delta_2 - 0)\frac{12}{2^2} - (0 - \Delta_2)\frac{8}{3^2} - (0 - \Delta_2)\frac{8}{3^2} = S_2$$

Rešitev obeh enačb dá

$$\Delta_1 = 0{,}167\, S_1$$
$$\Delta_2 = 0{,}129\, S_2$$

Momente v stebrih in nosilcih dobimo zdaj po enačbi (C). Tako je

$$M_{23} = \frac{6{,}0}{2}\Delta_1 = 0{,}5\, S_1$$

$$M_{45} = M_{67} = \frac{3}{2}\Delta_1 = 0{,}25\, S_1$$

$$M_{35} = M_{24} = \frac{6}{2}\Delta_2 = 0{,}385\, S_2$$

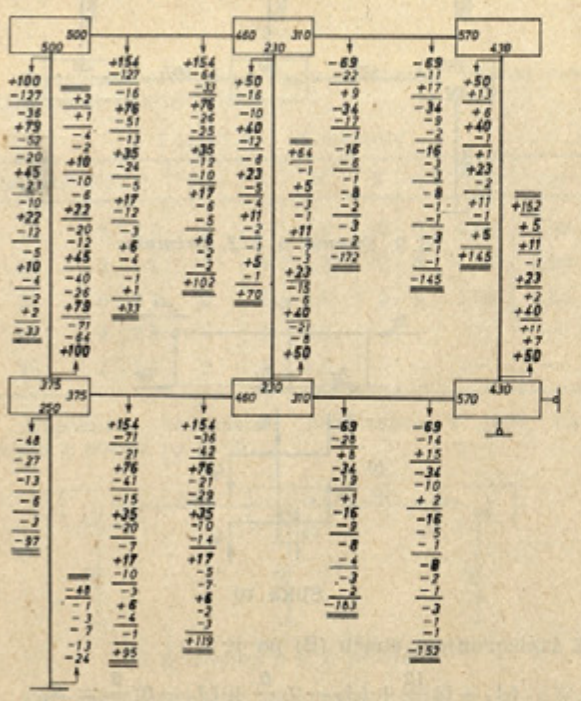
$$M_{57} = M_{46} = \frac{4}{3}(0 - \Delta_2) = -0{,}172\, S_2$$

Te vrednosti vnesemo v tabelo IV.

TABELA IV

	Enačba	ITERACIJA				
		0	1	2	3	4
S_1	—	200	158	90	44	20
S_2	—	400	196	92	44	16
M_{23}	$0{,}5\,S_1$	100	79	45	22	10
M_{45}, M_{67}	$0{,}25\,S_1$	50	40	23	11	8
M_{35}, M_{24}	$0{,}386\,S_2$	154	76	35	17	6
M_{57}, M_{46}	$-0{,}172\,S_2$	—69	—34	—16	—8	—3

S temi začetnimi pripravami se oprimemo prve Crossove iteracije. Momente iz kolone 0 vnesemo v delovno shemo (sl. 11) (drugih začetnih momentov na skeletu ni), tu pa opravimo že znano iteracijo.



Sl. 11. *Delovna shema k 2. primeru*

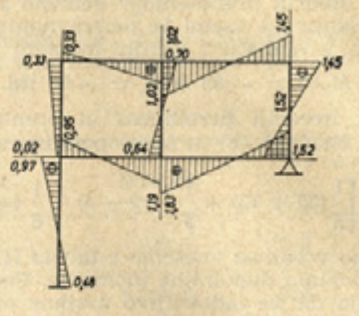
Novi krog računa pričnemo z določanjem dopolnilnih obremenitev $S_1^{(I)}$ in $S_2^{(I)}$. Po enačbi (F) dobimo

$$S_1^{(I)} = -\left[\frac{1}{2}(-127-36-64-71)+\frac{1}{2}(-16-10-8-21)+\frac{1}{2}(13+6+7+11)\right] = 158$$

$$S_2^{(I)} = -\left[\frac{1}{2}(-127-16-64-33)+\frac{1}{2}(-71-21-36-42)-\frac{1}{3}(-22+9-11+17)-\frac{1}{3}(-28+8-14+15)\right] = 196$$

Obe vrednosti vnesemo v tabelo IV, kolono »1« in določimo momente v stebrih in nosilcih po enačbah, ki so podane v tej tabeli. Dobljene momente vnesemo v delovno shemo, kjer opravimo drugo Crossovo iteracijo itd. Štirje krogi so potrebni, da so ostanki po zadnji iteraciji dovolj majhni.

Rezultirajoči momenti so podani v shemi, narisani pa na sl. 12.



Slika 12

Kontrola prečnih sil je naslednja. Prva ravnotežna enačba dá

$$2{,}00 \approx \tfrac{1}{2}(-0{,}37+0{,}02+0{,}70+0{,}64+1{,}45+1{,}50) = 1{,}97,$$

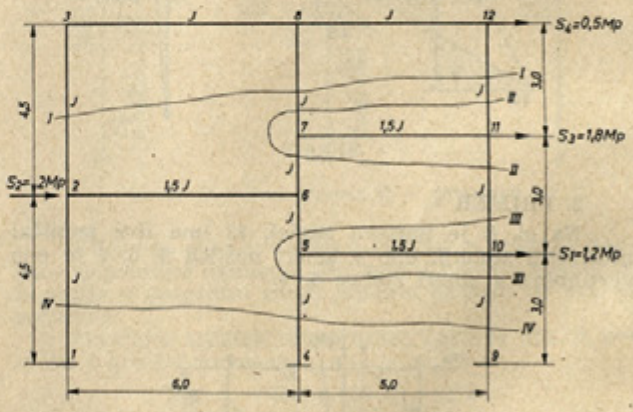
druga pa

$$4{,}00 \approx \tfrac{1}{2}(0{,}33+1{,}03+0{,}95+1{,}19)-\tfrac{1}{4}(-1{,}72-1{,}45-1{,}83-1{,}52) = 3{,}92$$

Oba rezultata se zopet dobro ujemata.

3. PRIMER

Narisani skelet ima štiri horizontalne pomične prostostne stopnje (sl. 13).

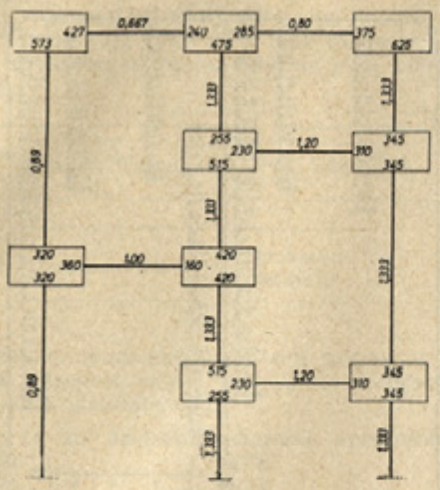


Slika 13

TABELA V. *Konstante*

Element	l	I	I/I_c	a	k	b	c	r_{ij}	p_{ij}
12; 23	4,5	I	1	4	0,890	12	6	2,666	1,333
45; 78; 910 1011; 1112	3	I	1	4	1,333	12	6	4,000	2,000
56; 67	1,5	I	1	4	2,667	12	6	8,000	4,00
26	6	1,5 I	1,5	4	1,00				
38	6	I	1	4	0,667				
511; 711	5	1,5 I	1,5	4	0,80				
812	5	I	1	4	1,20				

Začetnih momentov polne vrednosti skelet nima, saj delujejo vse obremenitve samo v vozliščih. Dopolnilne momente v stebrih pa dobimo iz štirih ravno-



Sl. 14. *Shema μ k 3. primeru*

težnih enačb, ki izhajajo iz prerezov I — I do IV — IV na sl. 13.

$$T_{23} + T_{78} + T_{1112} = S_4$$
$$T_{67} + T_{1011} - T_{78} - T_{1112} = S_3$$
$$T_{45} + T_{910} - T_{56} - T_{1011} = S_1 \qquad \text{(a)}$$
$$T_{12} + T_{45} + T_{910} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

Z upoštevanjem enačbe (B) dobimo

$$\frac{2{,}666}{4{,}5^2}(\Delta_4 - \Delta_2) + \frac{2}{3^2}\,4\,(\Delta_4 - \Delta_3) = S_4$$

$$\frac{8}{1{,}5^2}(\Delta_3 - \Delta_2) + \frac{4}{3^2}(\Delta_3 - \Delta_1) - \frac{4}{3^2}(\Delta_4 - \Delta_3)\,2 = S_3$$

$$2\,\frac{4}{3^2}\Delta_1 - \frac{8}{1{,}5^2}(\Delta_2 - \Delta_1) - \frac{4}{3^2}(\Delta_3 - \Delta_1) = S_1$$

$$\frac{2{,}666}{4{,}5^2}\Delta_2 + 2\,\frac{4{,}00}{3^2}\Delta_1 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

Po ureditvi izhaja

$$1{,}0204\,\Delta_4 - 0{,}8888\,\Delta_3 - 0{,}1316\,\Delta_2 = S_4$$
$$-0{,}8888\,\Delta_4 + 4{,}887\,\Delta_3 - 3{,}555\,\Delta_2 - 0{,}4444\,\Delta_1 = S_3$$
$$-0{,}444\,\Delta_3 - 3{,}555\,\Delta_2 + 4{,}887\,\Delta_1 = S_1$$
$$0{,}1316\,\Delta_2 + 0{,}8888\,\Delta_1 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

Rešitev teh enačb v odvisnosti od S_1, S_2, S_3 in S_4 je podana v naslednji tabeli VI.

TABELA VI

	S_1	S_2	S_3	S_4
Δ_1	0,984	0,952	0,956	0,956
Δ_2	0,952	1,167	1,144	1,147
Δ_3	0,956	1,143	1,366	1,340
Δ_4	0,955	1,146	1,337	2,300

Začetne dopolnilne momente dobimo po enačbi (C). Tako je npr.

$$M_{23} = M_{32} = \frac{1{,}333}{4.5}(\Delta_4 - \Delta_2) = 0{,}297\,(\Delta_4 - \Delta_2)$$

TABELA VIII

Cikel	S_i [Mp]	Momenti v stebrih						
		23	78, 1112	67	56	1011	12	45, 911
0	2,00	0	0	2	—17	—4	56	132
	1,50	—1	0	—9	86	19	52	95
	1,80	10	—3	107	90	50	62	115
	0,50	17	32	26	25	13	17	32
	Σ	27	29	126	184	78	187	374
1	—3,11	0	0	—3	+26	+6	—98	—204
	1,82	—1	0	—12	105	23	63	116
	2,09	12	—4	124	105	58	71	133
	0,73	25	47	38	37	19	25	47
	Σ	36	43	147	273	106	62	92
2	—2,03	0	0	—2	+17	+4	—57	—133
	+0,65	0	0	—4	37	8	23	41
	1,61	9	—3	95	81	44	55	102
	0,49	17	31	25	25	13	17	31
	Σ	26	28	114	160	69	38	41
3	—1,4	0	0	—1	12	3	—39	—92
	0,25	0	0	—1	14	3	9	16
	1,19	7	—2	71	60	33	41	76
	0,33	11	21	17	17	8	11	21
	Σ	18	19	86	103	47	22	21
4	—0,95	0	0	—1	+8	+2	—27	—62
	0,09	0	0	—1	5	1	3	6
	0,84	4	—2	50	42	23	28	54
	0,24	8	15	12	12	6	8	15
	Σ	12	13	60	67	32	12	13
5	—0,65	0	0	—1	5	1	—18	—43
	0,06	0	0	0	3	1	2	4
	0,58	3	—1	34	29	16	20	37
	0,15	5	10	8	8	4	5	10
	Σ	8	9	41	45	22	9	8
6	—0,44	0	0	0	4	1	—12	—29
	0,05	0	0	0	3	0	2	3
	0,39	2	—1	23	20	11	13	25
	0,10	3	6	5	5	3	3	6
	Σ	5	5	28	32	15	6	5
7	—0,31	0	0	0	3	0	—8	—20
	0,04	0	0	0	2	0	1	2
	0,27	1	0	17	14	8	10	18
	0,06	2	4	3	3	2	2	4
	Σ	3	4	20	22	10	5	4

Z vstavljanjem premikov iz tabele VI v to enačbo izhaja

$$M_{23} = M_{32} = 0{,}297\,(0{,}003\,S_1 - 0{,}021\,S_2 + 0{,}1938\,S_3 + 1{,}153\,S_4)$$

Podobno dobimo vrednosti še za druge momente. Rezultati so zbrani v tabeli VII.

TABELA VII

	Momenti v stebru						
	23	78	67	56	1011	12	45
S_1	0,1	0	1,0	—8,5	—1,8	28,2	65,6
S_2	—0,6	0	—6,4	57,5	12,7	34,6	63,5
S_3	5,7	—1,9	59,4	50,0	27,5	34,0	63,6
S_4	34,2	64,0	51,5	50,9	25,6	34,0	63,6

S temi začetnimi pripravami preidemo zdaj k posameznim krogom Crossove iteracije. Za podano obremenitev S_1 do S_4 izračunamo s pomočjo tabele VII začetne dopolnilne momente v stebrih. Te vrednosti so podane v tabeli VIII (na str. 43) v vrsti, ki je označena s Σ.

Po prvi Crossovi iteraciji moramo določiti po enačbi (F) prečne sile v stebrih. Rezultati so zbrani v tabeli IX v koloni »1«. Iz teh rezultatov in ravnotežnih enačb tega primera pa dobimo nove dopolnilne obremenitve S_i. Te so zbrane v tabeli X. v koloni »1«.

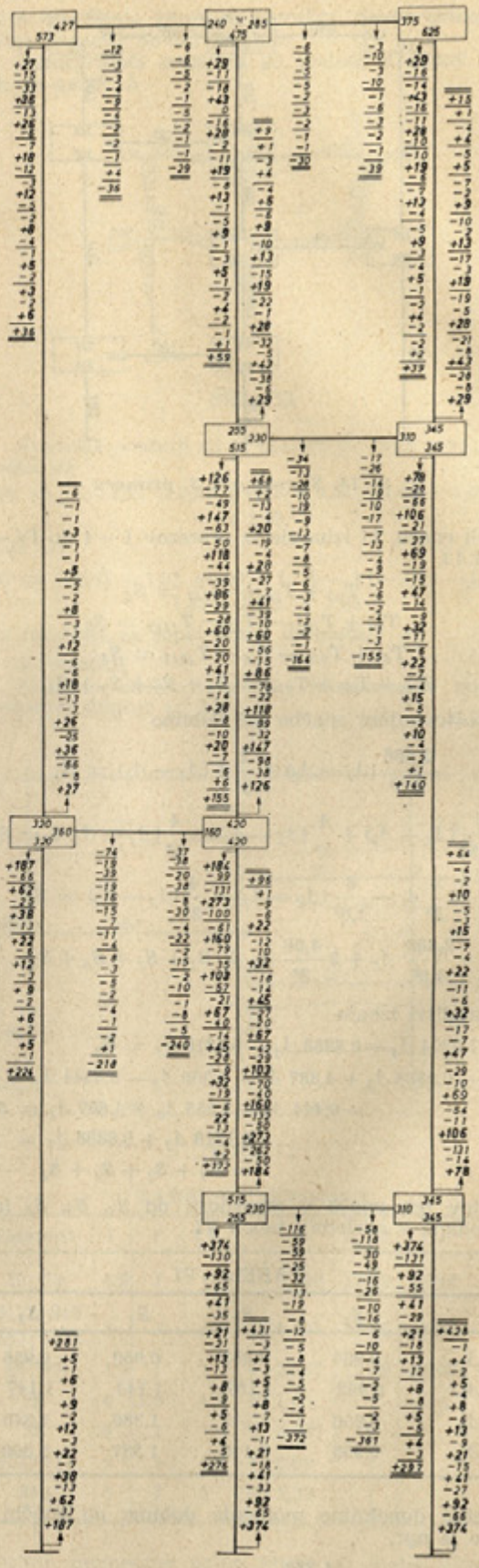
TABELA IX. *Prečne dopolnilne sile*

	h	1	2	3	4	5	6	7
T_{23}	4,5	27	9	6	6	3	2	1
T_{78}	3	24	21	12	8	5	3	2
T_{1112}	3	22	19	15	10	7	5	3
T_{67}	1,5	175	163	122	86	59	40	27
T_{1011}	3	80	38	24	16	11	7	5
T_{56}	1,5	362	229	149	99	67	46	31
T_{12}	4,5	22	8	4	2	1	1	1
T_{45}	3	65	33	18	11	7	5	3
T_{910}	3	66	31	15	9	6	4	2

TABELA X. *Dopolnilne sile S_i*

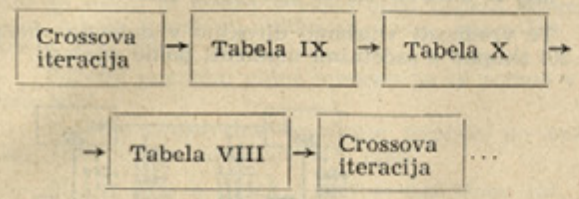
S_i	Enačba
S_1	$T_{45} + T_{910} - T_{56} - T_{1011}$
S_2	$T_{12} + T_{56} - T_{23} - T_{67}$
S_3	$T_{67} + T_{1011} - T_{78} - T_{1112}$
S_4	$T_{23} + T_{78} + T_{1112}$

S_i	Iteracija						
	1	2	3	4	5	6	7
S_1	—311	—203	—140	—95	—65	—44	—31
S_2	182	65	25	9	6	5	4
S_3	209	161	119	84	58	39	27
S_4	73	49	33	24	15	10	6



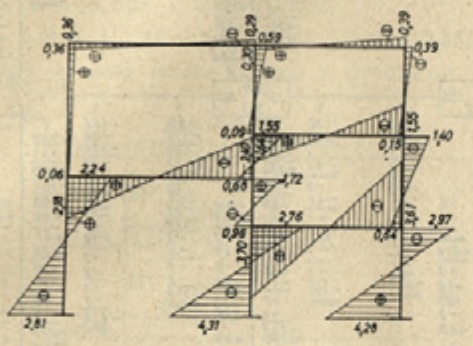
Sl. 15. *Delovna shema k 3. primeru*

Dopolnilne vrednosti sil S_i vstavimo po enačbah v tabeli VII v tabelo VIII (cikel 1). S temi momenti pričnemo drugo Crossovo iteracijo. Zdaj se cikli ponavljajo v zaporedju



Zaradi posebno neugodnih togostnih razmer v stebru 56 in 67 je potrebnih celo 7 iteracij, da dosegamo napake le okoli 5 odstotkov.

Na sl. 16 so narisani diagrami upogibnih momentov.

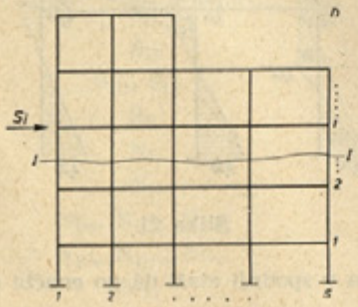


Slika 16

NORMALNI SKELET

Pri normalnih skeletih s horizontalnimi pomiki se prikazani postopek še precej poenostavi. Med drugim ni pri tovrstnih skeletih potrebno niti izpisovati niti reševati nobenih sistemov enačb. Sistem reševanja skrčimo na en sam vmesni dodatni postopek pri navadni Crossovi iteraciji.

Naj ima skelet n etaž in s polj (sl. 17). Zunanje obremenitve S_i naj delujejo v vozliščih skeleta. Kolikor pa delujejo sile tudi v poljih stebrov, jih na znani način reduciramo v sosednji vozlišči.



Slika 17

Prerez I — I npr. na sl. 17 dá enačbo

$$Q_i^o = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{j=1}^{s} T_{ij}\,, \tag{21}$$

ki jo že poznamo. Če za T_{ij} vstavljamo znano enačbo (15), dobimo

$$Q_i^o = \sum \frac{b_j E I_j}{h_i^3} (\bar{\Delta}_i - \bar{\Delta}_{i-1})$$

oziroma iz te enačbe

$$\bar{\Delta}_i - \bar{\Delta}_{i-1} = \frac{h_i^3}{E} Q_i^o \cdot \frac{1}{\sum b_j I_j}$$

Ker so momenti v stebrih podani z enačbo (9)

$$M_{ij}^{zg} = M_{ij}^{sp} = \frac{c_j E I_j}{h_i^2} (\bar{\Delta}_i - \bar{\Delta}_{i-1}),$$

izhajajo dopolnilni momenti v etaži i v obliki

$$M_{ij}^{zg} = M_{ij}^{sp} = h_i Q_i^o \frac{c_j I_j}{\sum b_j I_j} \tag{22}$$

ali če še označimo razmerje vztrajnostnih momentov s

$$s_{ij} = \frac{c_j I_j}{\sum b_j I_j} \tag{23}$$

izhaja preprosta enačba za izračun *začetnih* dopolnilnih momentov

$$M_{ij}^{zg} = M_{ij}^{sp} = h_i Q_i^o s_{ij} \tag{24}$$

Kadar so vsi stebri obojestransko vpeti, se enačba (23) še glasi

$$s_{ij} = \frac{I_j}{2 \sum_j I_j} \tag{23a}$$

Ko z začetnimi momenti, ki so podani z enačbo (24) in morebitnimi momenti polne vpetosti, opravimo prvo Crossovo iteracijo, dobimo dopolnilno obremenitev $Q_i^{(1)}$ z enačbo (18), torej

$$Q_i^{(1)} = -\frac{1}{h_i} \sum_j (M_{ij}^{zg} + M_{ij}^{sp}) \tag{25}$$

oziroma takoj dopolnilne momente po enačbi (24), ki se zdaj glasi

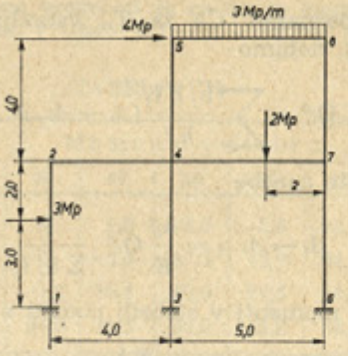
$$M_{ij}^{(1)zg} = M_{ij}^{(1)sp} = -s_{ij} \sum_j (M_{ij}^{zg} + M_{ij}^{sp}) \tag{26}$$

Nadaljnji postopek je znan. Z vstavljanjem dopolnilnih momentov iz enačbe (26) v delovno shemo lahko opravimo drugo Crossovo iteracijo, nato ponovno izračunamo dopolnilne momente po enačbi (26) in izvedemo tretjo Crossovo iteracijo itd.

Ko so ostanki itaracije dovolj majhni, preidemo k seštevanju momentov posameznih kolon. Ti seštevki pa dajo, kakor je že znano, končne momente v skeletu.

4. PRIMER.

Skelet, ki spada v skupino popolnih skeletov, ima dve pomični prostostni stopnji: horizontalni pomik zgornje in spodnje etaže (sl.18).



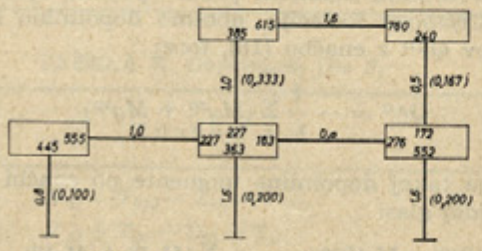
Slika 18

V tabeli XI so zbrane konstante. Ker so vsi stebri obojestransko vpeti, smo upoštevali enačbo (23a) za določanje koeficienta s_{ij}.

TABELA XI

Element	l	I	I/I_c	a	K	I	s_{ij}
45	4	I	1	4	1,00	1,5 I	0,333
78	4	0,5 I	0,5	4	0,5		0,167
58	5	2 I	2	4	1,6	—	—
12	5	I	1	4	0,8	5,0 I	0,100
34	5	2 I	2	4	1,6		0,200
67	5	2 I	2	4	1,6		0,200
24	4	I	1	4	1,0	—	—
47	5	I	1	4	0,8	—	—

Shema razdelilnih koeficientov pa je podana na sl. 19. V to shemo vnesemo tudi koeficiente s_{ij} (vrednosti v oklepajih).



Sl. 19. *Shema μ k 4. primeru*

Začetni momenti polne vpetosti so dani v tabeli XII.

TABELA XII

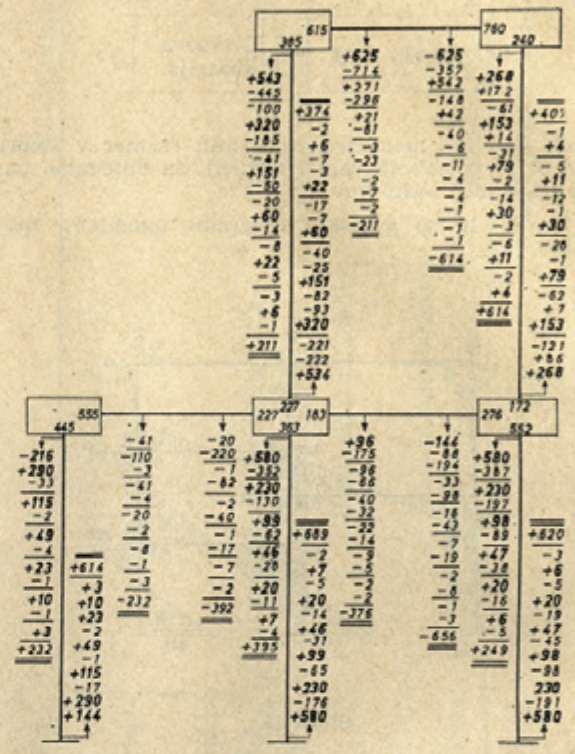
Element	Obremenitev	M_{or}	M_L	M_D
58	$q = 3$ Mp/m	9,38	6,25	6,25
47	$F = 2$ Mp	2,40	0,96	1,44
12	$F = 3$ Mp	3,60	1,44	2,16

Začetni dopolnilni momenti pa so po enačbi (24) npr.:

$$M_{15} = 0{,}333 \,.\, 4 \,.\, 4 = 5{,}34 \text{ Mpm}$$

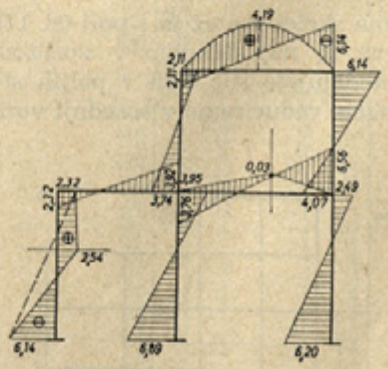
$$M_{12} = 0{,}100 \,.\, 5 \,.\, 5{,}8 = 2{,}90 \text{ Mpm, itd.}$$

Te vrednosti vnašamo direktno v delovno shemo (sl. 20) skupno z začetnimi momenti polne vpetosti.



Sli. 20. *Delovna shema k 4. primeru*

Sedaj izvedemo prvo Crossovo iteracijo. Po končanem krogu določimo z uporabo enačbe (26) takoj dopolnilne momente $M_{ij}^{(I)zg} = M_{ij}^{(I)sp}$, nakar opravimo že drugo Crossovo iteracijo. Nato poslednji krog ponavljamo še trikrat. V delovni shemi so podani rezultirajoči momenti. Na sl. 21 pa so narisani diagrami upogibnih momentov.



Slika 21

Kontrola v spodnji etaži dá po enačbi (25)

$$5.8 \approx \frac{1}{5}(2{,}33 + 6{,}14 + 3{,}95 + 6{,}89 + 2{,}49 + 6{,}20) = 5{,}65$$

5. PRIMER.

Skelet na sl. 22 je obremenjen povrh horizontalnih sil S_1 do S_5 še z vertikalnimi enakomernimi obtežbami $q_1 = 1{,}0$ Mp/m, $q_2 = 2{,}0$ Mp/m in $q_3 = 3{,}0$ Mp/m. Ker so stebri in nosilci v vsaki etaži enakih dimenzij, dobi tabela konstant obliko (S-stebri, N-nosilci), kakršno kaže tabela XIII.

Začetni momenti polne vpetosti pa so podani v tabeli XIV.

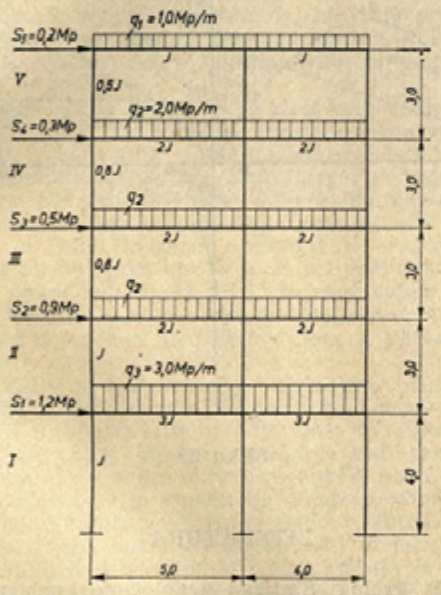
Začetne dopolnilne momente dobimo po enačbi (24); tako je npr. za stebre v 5. etaži

$$M_{zg} = M_{sp} = 3 \,.\, 0{,}2 \,.\, 0{,}1667 = 0{,}10 \text{ Mpm} \quad \text{itd.}$$

Če tudi te vrednosti vnesemo v delovno tabelo, lahko pričnemo s prvo Crossovo iteracijo. Dopolnilne momente za drugo iteracijo dobimo po enačbi (26). Ob strani delovne tabele si zaradi pregleda vpišemo vrednost $\sum M_s = (\sum M_{ij}^{zg} + \sum M_{ij}^{sp})$ ter izračunamo $M_{ij}^{(I)zg} = M_{ij}^{(I)sp}$. Nato izvedemo naslednjo iteracijo itd. Po štirih iteracijah je problem rešen. Povrh različnih kontrol izvedemo še kontrole horizontalne obremenitve. Tako je npr. v spodnji etaži

$$3{,}1 \approx \tfrac{1}{4}\,(0{,}40 + 1{,}54 + 2{,}65 + 2{,}63 + 2{,}49 + 2{,}55) = 3{,}07$$

Rezultat se zelo dobro ujema s prvotnimi podatki.

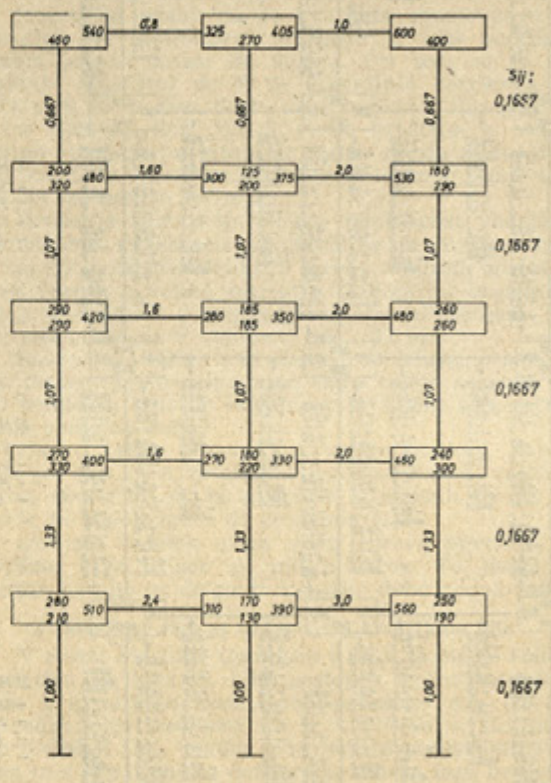


Slika 22

TABELA XIV

Tabela začetnih momentov pri polni vpetosti

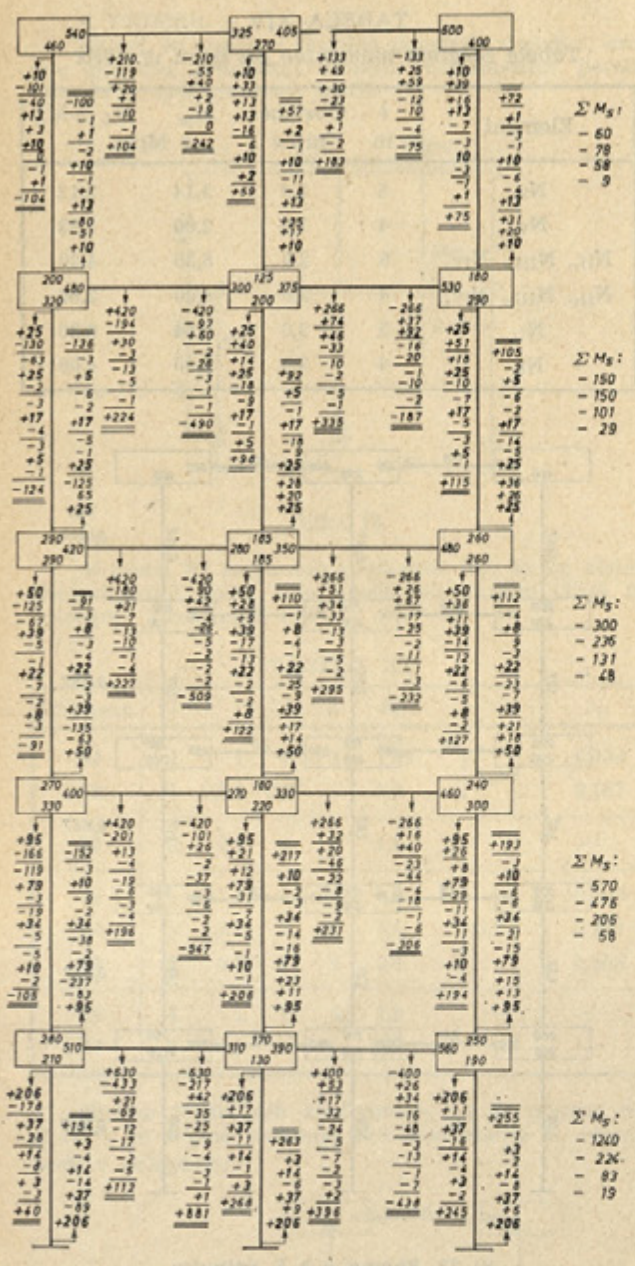
Element	l m	Obremenitev	M_{pr} v Mpm	$M_L = M_D$
N_{V_1}	5	1,0	3,14	2,12
N_{V_2}	4	1,0	2,00	1,33
N_{II_1}, N_{III_1}, N_{IV_1}	5	2,0	6,30	4,20
N_{II_2}, N_{III_2}, N_{IV_2}	4	2,0	4,00	2,66
N_{I_1}	5	3,0	9,44	6,30
N_{I_2}	4	3,0	6,00	4,00



Sl. 23. *Shema μ k 5. primeru*

TABELA XIII. *Konstante*

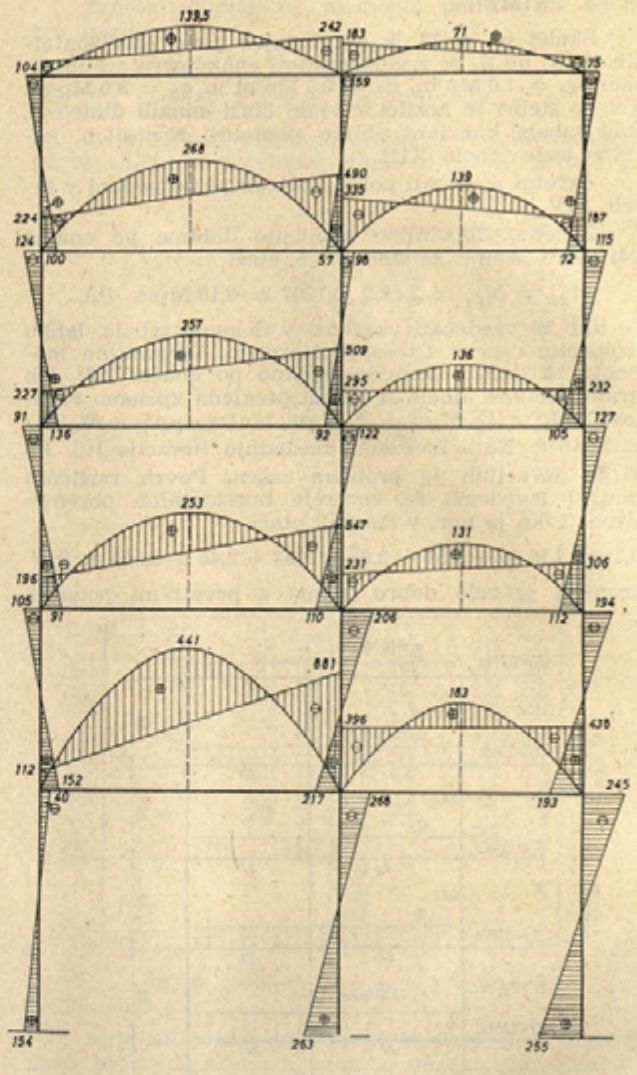
Element	l,h	I	I/I_c	a	k	I	s_{ij}
S_I	4	I	1	4	1,000	3 I	0,167
S_{II}	3	I	1	4	1,333	3 I	0,167
S_{III}, S_{IV}	3	0,8 I	0,8	4	1,070	2,4 I	0,167
S_V	3	0,5 I	0,5	4	0,667	1,5 I	0,167
N_{I_1}	5	3 I	3	4	2,400	—	—
N_{I_2}	4	3 I	3	4	3,000	—	—
N_{II_1}, N_{III_1}, N_{IV_1}	5	2 I	2	4	1,600	—	—
N_{II_2}, N_{III_2}, N_{IV_2}	4	2 I	2	4	2,000	—	—
N_{V_1}	5	I	1	4	0,800	—	—
N_{V_2}	4	I	1	4	1,000	—	—



Sl. 24. *Delovna shema k 5. primeru*

Prikazani primer ima zelo dobro konvergenco, to pa zato, ker so nosilci bolj togi kakor stebri. V nasprotnem primeru bi trajala iteracija dalj časa.

Na sl. 25 so še podani diagrami upogibnih momentov.



Slika 25

LITERATURA

[1] E. Prelog: Statično nedoločene konstrukcije v strojništvu. Univerzitetna založba, Ljubljana 1965.

[2] G. Raczat: Das vervollständigte Cross-Verfahren in der Rahmenberechnung. Springer-Verlag, Berlin, 3. izd., 1962.

Avtorjev naslov:

prof. dr. ing. Ervin Prelog,
Fakulteta za strojništvo,
Univerze v Ljubljani