

UDK 539.384

## Upogib elastične plošče s točkovnimi dvojicami

MILAN MURŠIČ

Osnovne enačbe za upogib zmersno debelih elastičnih plošč, izražene s pomočjo dveh funkcij kompleksne spremenljivke [1, 2]<sup>1)</sup>, so v tem članku prijejene za določanje napetostnega stanja v neskončni plošči, obremenjeni z eno ali več točkovnimi dvojicami v poljubno situiranih prijemališčih. Podobno kakor pri Muskelijevi [3] za ravninske probleme sta tukaj določeni singularnosti za točkovno dvojico v koordinatnem začetku. V nadaljevanju je prikazana transformacija (vzporeden premik) singularnosti v poljubno končno točko plošče in superpozicija vpliva več hkratnih točkovnih dvojic v plošči. Za dva primera kombinacije dveh točkovnih dvojic sta določeni upogibni napetostni stanji plošče in je podan komentar o rezultatih.

1) Stevilke v oglatih oklepajih se nanašajo na literaturo, priobčeno na koncu članka.

### 1. SINGULARNOSTI, KI DOLOCATA TOČKOVNO DVOJICO V KOORDINATNEM ZAČETKU

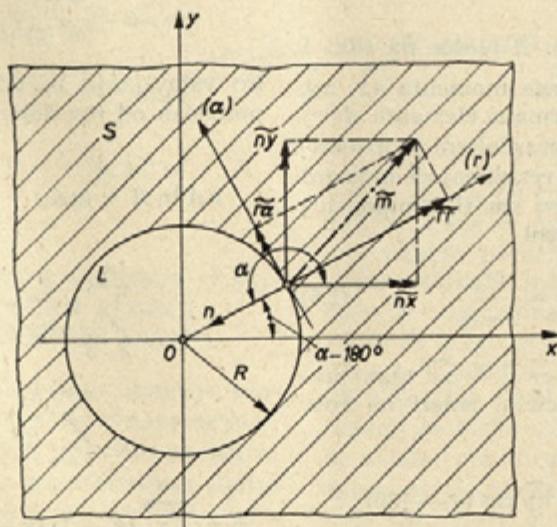
Proučimo enostavno sovisno neskončno območje plošče  $S$ , ki ima krožni rob  $L$  z radijem  $R$  (neskončna plošča z okroglo luknjo, slika 1). Koordinatni začetek  $O$  postavimo v središče krožnice  $L$  (torej zunaj območja  $S$ ) in vpeljemo kompleksno spremenljivko  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$  v ravnini  $xy$  plošče. Koordinata  $Z$  je normalna na središčno ravno ploščo, debelino plošče označimo z  $2h$ . V nadaljevanju bomo označevali komponente napetostnega in deformacijskega stanja plošče ter njihove sestave enako kakor Stevenson [1]. Poissonovo

konstanto označimo z  $\nu$ , prečna črta med veličinami pomeni njihove konjugirano-kompleksne vrednosti, črtice pri funkcijah pa pomenijo njihove odvode po ustreznih spremenljivkah.

Funkciji kompleksne spremenljivke  $\Omega(z)$ ,  $\omega'(z)$  imata v enostavno sovisnem neskončnem območju, v katerem v neskončni točki ni končno velikih napetosti, takšnole obliko [2, 3]

$$\begin{aligned}\Omega(z) &= iTM \ln z + \Omega_0(z) \\ \omega'(z) &= -i\overline{T\bar{M}} \ln z + \omega'_0(z)\end{aligned}\quad (1.1)$$

V njih je  $T = 3/2\pi h^2$  realna konstanta, z  $M = M_x + iM_y$ ,  $\bar{M} = M_x - iM_y$  pa je označena rezul-



Slika 1

tanta momenta zunanjih sil na edinem robu  $L$  območja. Funkciji  $\Omega_o(z)$ ,  $\omega_o'(z)$  sta analitični (holomorfnii) v neskončnem območju  $S$  plošče in se lahko izrazita s potenčnima vrstama, v katerih so koeficienti  $a_k$ ,  $a_k'$  v splošnem kompleksne veličine

$$\Omega_o(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} \quad (1.2)$$

$$\omega_o'(z) = a_0' + \frac{a_1'}{z} + \frac{a_2'}{z^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k' z^{-k}$$

S pomočjo teh dveh funkcij in njunih odvodov lahko izrazimo vse veličine napetostnega in deformacijskega stanja plošče [2]. Napetostno stanje je podano z naslednjimi sestavami

$$\begin{aligned} S_1 &= \tilde{xy} - \tilde{yx} = \frac{(1+\nu) h^2}{6} [\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z})] \\ S_2 &= -\tilde{xy} - \tilde{yx} + i 2 \tilde{yy} = \\ &= -\frac{(1-\nu) h^2}{6} [z \Omega''(z) + \omega''(z) + n_I \Omega'''(z)] \\ S_3 &= \tilde{xz} - \tilde{iyz} = \frac{h^2}{3} \Omega''(z) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Prvi dve sestavi vsebujejo oba upogibna ter torzijski moment, slednja pa srednji vrednosti prečnih tangencialnih napetosti v plošči. Pri rotaciji koordinatnega sistema za kot  $\alpha$  v pozitivnem (protiurnem) smislu se sestave (1.3) transformirajo takole [1, 3]

$$\begin{aligned} \tilde{ra} - \tilde{ar} &= \tilde{xy} - \tilde{yx} \\ -\tilde{ra} - \tilde{ar} + i 2 \tilde{aa} &= \\ &= (-\tilde{xy} - \tilde{yx} + i 2 \tilde{yy}) e^{i 2 \alpha} \\ \tilde{rz} - \tilde{iaz} &= (\tilde{xz} - \tilde{iyz}) e^{i \alpha} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Na krožnem robu  $L$  z radijem  $R$  plošče na sliki 1 naj bosta komponenti zunanjega momenta  $\tilde{nx}$ ,  $\tilde{ny}$ , ( $n$  je označena zunanja normala elementa  $ds = R d\alpha$  roba), enakomerno porazdeljeni (konstantni) vzdolž roba in naj imata rezultirajoči moment  $M = M_x + iM_y$ . V tem primeru sta ti komponenti zunanje obremenitve roba takšni

$$\tilde{nx} = \frac{M_x}{2 \pi R}; \quad \tilde{ny} = \frac{M_y}{2 \pi R} \quad (1.5)$$

Določimo komponenti  $\tilde{ra}$  in  $\tilde{rr} = -\tilde{aa}$  tega momenta v normalni in tangencialni smeri na rob. S slike 1 sta razvidni zvezni

$$\tilde{ra} = -\tilde{nx} \sin(\alpha - 180) + \tilde{ny} \cos(\alpha - 180)$$

$$\tilde{rr} = -\tilde{nx} \cos(\alpha - 180) + \tilde{ny} \sin(\alpha - 180)$$

Ko ju uredimo in združimo v kompleksno sestavo, pridemo do izraza

$$\tilde{ra} - i\tilde{aa} = -\frac{iM}{2\pi R} e^{i\alpha} \quad (1.6)$$

ki sestavlja zunanje obremenitev na robu plošče, kakršno je treba upoštevati v robnem pogoju [2]. Ustrezeni robni pogoj se glasi (na krožnici  $L$ )

$$\begin{aligned} n \Omega(z) + z \bar{\Omega}'(\bar{z}) + \bar{\omega}'(\bar{z}) + n_I \bar{\Omega}''(\bar{z}) &= \\ &= F_I + iF_2 + iK''z + K_I'' \end{aligned} \quad (1.7)$$

V njem sta konstanti  $n$  in  $n_I$  (slednjo smo srečali v enačbah (1.3), podani z [2]

$$n = -\frac{3+\nu}{1-\nu}; \quad n_I = -\frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{2h^2}{5} \quad (1.8)$$

funkcija  $F_I + iF_2$  pa z [2]

$$F_I + iF_2 = -\frac{12}{(1-\nu)h^2} \int_0^s (\tilde{ra} + i\tilde{aa}) dz$$

Za integrand na desni strani te enačbe vstavimo (1.6). Pri integraciji vzdolž krožnega roba z radijem  $R$  je  $z = Re^{i\alpha}$ ,  $dz = iRe^{i\alpha} d\alpha$ . Za funkcijo  $F_I + iF_2$  dobimo izraz

$$F_I + iF_2 = \frac{12Ma}{2\pi(1-\nu)h^2} \quad (1.9)$$

Za enostavno sovisna območja smemo v (1.7) izbrati konstanti  $K''$  in  $K_I''$  poljubno [4]. V našem primeru ju kar izničimo ( $K_I'' = K'' = 0$ ). Sedaj lahko vstavimo (1.1), (1.2) in (1.9) v robni pogoj (1.7). Izkaže se, da v obravnavanem primeru v funkcijah  $\Omega(z)$ ,  $\omega'(z)$  ni treba poznati koeficientov pri členih z  $\log z$ , temveč ju smemo označiti splošneje z  $A$  oziroma  $\bar{A}$ , torej

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= A \ln z + \Omega_o(z) \\ \omega'(z) &= \bar{A} \ln z + \omega_o'(z) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Po vstavljanju in ureditvi posameznih členov po potencah od  $i\alpha$  dobimo za (1.7) tole enačbo

$$\begin{aligned} nA \ln R + inAa + n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{R^k} e^{-ik\alpha} + \bar{A} e^{iz\alpha} - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\bar{a}_k}{R^k} e^{-ik\alpha} + A \ln R - iAa + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{a}_k'}{R^k} e^{ik\alpha} + \frac{n_I}{R^2} \bar{A} e^{iz\alpha} + \\ + n_I \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)(k-2) \frac{\bar{a}_{k-2}}{R^k} e^{ik\alpha} - \frac{12Ma}{2\pi(1-\nu)h^2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

V njej primerjamo člene, ki so neodvisni od  $a$ , člene, ki so odvisni od  $a$ , in tiste z enakimi eksponenti  $i\alpha$ . Tako pridemo do sistema enačb, ki določa neznane koeficiente. Koeficientov  $a_0$  in  $a_0'$  ne iščemo, ker ne vplivata na napetostno stanje v plošči. Za ostale koeficiente pa dobimo tele vrednosti

$$A = iTM, \quad \bar{A} = -iT\bar{M}; \quad a_k = 0 \text{ za vse } k \geq 1$$

$$a_1' = 0, \quad a_2' = -iTMR^2 \left( 1 - \frac{n_I}{R^2} \right); \quad a_k' = 0 \text{ za vse } k \geq 3$$

Iskani funkciji (1.1) oziroma (1.10) sta v obravnavanem primeru takile

$$\Omega(z) = iTM \ln z$$

$$\omega'(z) = -iT\bar{M} \ln z - iTMR^2 \left( 1 - \frac{n_I}{R^2} \right) \frac{1}{z^3} \quad (1.12)$$

Če ju vstavimo v sestave (1.3), dobimo napetostno stanje v plošči, ki jo kaže slika 1. Sedaj pa predpostavimo, da se radij  $R$  luknje v plošči zmanjšuje proti nič ( $R \rightarrow 0$ ) in da robni napetosti  $\tilde{n}_x, \tilde{n}_y$  pri tem naraščata prek vseh meja tako, da ostane rezultirajoči vektor momenta  $M$  nespremenjen. V tem primeru vpliva v koordinatnem začetku točkovni moment  $M = M_x + iM_y$  in pripadajoči funkciji (1.12) prideta v obliko (dejansko se spremeni le druga)

$$\Omega(z) = iTM \ln z$$

$$\omega'(z) = -iT\bar{M} \ln z + iTM \frac{n_I}{z^3} \quad (1.13)$$

ki ju imenujemo singularnosti točkovne dvojice v koordinatnem začetku. Pripadajoče napetostno stanje v plošči dobimo z vstavljanjem (1.13) v sestave (1.3) oziroma (1.4) in s separacijo posameznih veličin

$$\begin{aligned} \tilde{r}a &= -\tilde{a}r = -\frac{1+\nu}{4\pi r} (M_x \sin \alpha - M_y \cos \alpha) \\ \tilde{a}a &= -\tilde{r}r = -\frac{1-\nu}{4\pi r} (M_x \cos \alpha + M_y \sin \alpha) \\ \tilde{r}z &= -\frac{1}{2\pi r^2} (M_x \sin \alpha - M_y \cos \alpha) \\ az &= -\frac{1}{2\pi r^2} (M_x \cos \alpha + M_y \sin \alpha) \end{aligned} \quad (1.14)$$

## 2. TRANSFORMACIJA SINGULARNOSTI V POJEDINCI LJUBNO KONČNO TOČKO PLOŠČE SUPERPOZICIJA TOČKOVNIH DVOJIC

Naj bo sedaj enostavno sovisno območje plošče  $S$  iz prejšnje točke v takšnem napetostnem stanju, kakršno določata v tem območju analitični funkciji  $\Omega'_o(z), \omega''_o(z)$ . Temu napetostnemu stanju superponirajmo še napetostno stanje zaradi točkovne dvojice v koordinatnem začetku (1.13). Rezultirajoče napetostno stanje v okolici prijemališča toč-

kovnega momenta  $z = 0$  je potem takem podano s funkcijama

$$\Omega'(z) = iTM \frac{1}{z} + \Omega'_o(z) \quad (2.1)$$

$$\omega''(z) = -iT\bar{M} \frac{1}{z} - iTM \frac{2n_I}{z^3} + \omega''_o(z)$$

Poščimo obliko funkcij (2.1) za primer, ko vpliva točkovna dvojica v poljubni končni točki  $z = z_0$  plošče namesto v koordinatnem začetku  $z = 0$ . V ta namen prestavimo v  $z_0$  začetek pomožnega koordinatnega sistema  $z_I = x_I + iy_I$ , ki nastane iz prvotnega sistema s translacijo koordinatnega začetka iz  $z = 0$  v  $z = z_0$ . Funkciji (2.1) se v novem koordinatnem sistemu glasita

$$\Omega'_I(z_I) = iTM \frac{1}{z_I} + \Omega'_{oI}(z_I) \quad (2.2)$$

$$\omega''_I(z_I) = -iT\bar{M} \frac{1}{z_I} - iTM \frac{2n_I}{z_I^3} + \omega''_{oI}(z_I)$$

pri čemer je  $z_I = z - z_0$ . Sedaj pa se vrnimo na prvotni koordinatni sistem tako, da ostane napetostno stanje v plošči nespremenjeno in ugotovimo, kako ta prehod vpliva na funkciji (2.1). Izkaže se, da je zveza prav takšna kakor pri ravninskih problemih [3].

$$\begin{aligned} \Omega'(z) &= \Omega'_I(z - z_0) \\ \omega''(z) &= \omega''_I(z - z_0) - \bar{z}_0 \Omega''_I(z - z_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ko vstavimo (2.3) prek (2.2) v (2.1), dobimo izraza za funkcije  $\Omega'(z), \omega''(z)$  v prvotnem koordinatnem sistemu s točkovno dvojico, prijemajočo v poljubni končni točki  $z_0$  plošče

$$\begin{aligned} \Omega'(z) &= iTM \frac{1}{z - z_0} + \Omega'_o(z) \\ \omega''(z) &= -iT\bar{M} \frac{1}{z - z_0} + iTM \frac{\bar{z}_0}{(z - z_0)^3} - \\ &\quad - iTM \frac{2n_I}{(z - z_0)^3} + \omega''_o(z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

V njih sta  $\Omega'_o(z)$  in  $\omega''_o(z)$  analitični funkciji v območju plošče  $S$  (slednja je linearna kombinacija ustrezajočih funkcij v enačbah (2.1)). Z integracijo lahko dobimo funkcije  $\Omega(z), \omega(z)$ . Ker nas zanimalo le napetostna stanja, teh funkcij v nadaljevanju ne bomo potrebovali. Funkciji (2.4) lahko določamo za različna prijemališča  $z_{01}, z_{02}, \dots$  posameznih točkovnih dvojic  $M_1, M_2, \dots$  Tako nastale sisteme funkcij pa lahko superponiramo s seštevanjem. Tako dobimo rezultirajoč par funkcij  $\Omega'_I(z), \omega''_I(z)$ , ki določa rezultirajoče napetostno stanje v plošči. Kolikor delujejo v plošči le točkovne dvojice, upoštavamo v (2.4) samo singularnosti, medtem ko funkcije  $\Omega'_o(z), \omega''_o(z)$  izginejo.

### 3. PRIMERA SUPERPOZICIJE DVEH TOČKOVNIH DVOJIC

3.1. Točkovni dvojici  $\pm m$  v točkah  $z_0 = \pm a$  (slika 2).

V tem primeru superponiramo dva sistema funkcij (2.4) za točkovni dvojici

$$\begin{aligned} z_0 &= +a : M = M_x + iM_y = +m \\ z_0 &= -a : M = M_x + iM_y = -m \end{aligned}$$

Po sumiranju in ureditvi dobimo rezultirajoč par funkcij

$$\begin{aligned} \Omega_r'(z) &= iTm \left( \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right) \\ \omega_r''(z) &= -iTm \left\{ \left( \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right) - \right. \\ &\quad - a \left[ \frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{(z+a)^2} \right] + \\ &\quad \left. + 2n_I \left[ \frac{1}{(z-a)^3} - \frac{1}{(z+a)^3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Z njima dobimo sestave (1.3). Dosti pregledneje jih lahko zapišemo po vpeljavi bipolarnih koordinat  $r_I, r_2, \vartheta_I, \vartheta_2$  (glej sliko 2) s pomočjo zvez

$$\begin{aligned} z-a &= -r_I e^{-i\vartheta_I} ; \quad \bar{z}-a = -r_I e^{i\vartheta_I} \\ z+a &= r_2 e^{i\vartheta_2} ; \quad \bar{z}+a = r_2 e^{-i\vartheta_2} \\ \frac{2a}{\sin(\vartheta_I + \vartheta_2)} &= \frac{r_I}{\sin \vartheta_2} = \frac{r_2}{\sin \vartheta_I} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Po primerni ureditvi in z upoštevanjem nekaterih zvez med trigonometričnimi funkcijami dobimo tele sestave

$$\begin{aligned} S_I &= \tilde{xy} - \tilde{yx} = \\ &= \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{m}{2a} \left( \frac{\sin \vartheta_I}{\sin \vartheta_2} - \frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_I} \right) \sin(\vartheta_I + \vartheta_2) \end{aligned}$$

$$S_2 = -\tilde{xy} - \tilde{yx} + i2\tilde{yy} =$$

$$= \frac{1-\nu}{2\pi} \frac{m}{2a} \left[ \left( \frac{\sin 2\vartheta_I \cos \vartheta_I}{\sin \vartheta_2} - \frac{\sin 2\vartheta_2 \cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_I} \right) - \right.$$

$$\left. - i \left( \frac{\cos 2\vartheta_I \cos \vartheta_I}{\sin \vartheta_2} + \frac{\cos 2\vartheta_2 \cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_I} \right) \right] \sin(\vartheta_I + \vartheta_2)$$

$$S_3 = \tilde{xz} - \tilde{iyz} = \frac{1}{2\pi(2a)^2} \left[ \left( \frac{\sin 2\vartheta_I}{\sin^2 \vartheta_2} + \frac{\sin 2\vartheta_2}{\sin^2 \vartheta_I} \right) - \right.$$

$$\left. - i \left( \frac{\cos 2\vartheta_I}{\sin^2 \vartheta_2} - \frac{\cos 2\vartheta_2}{\sin^2 \vartheta_I} \right) \right] \sin^2(\vartheta_I + \vartheta_2)$$

Iz njih izločimo komponente napetostnega stanja v plošči. Po ureditvi dobimo tele veličine

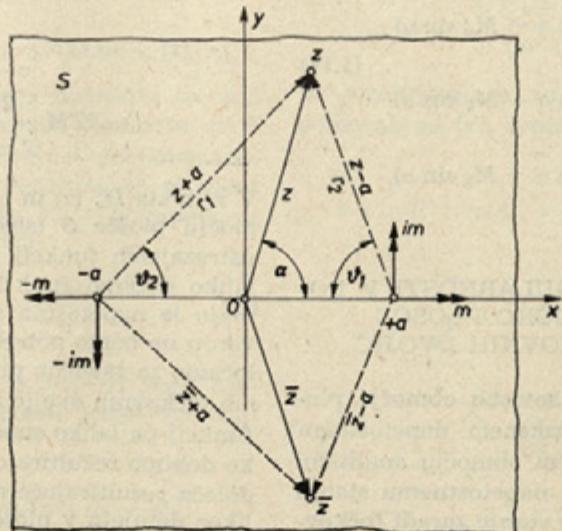
$$\begin{aligned} \tilde{xy} &= \frac{1+\nu}{4\pi} \frac{m}{2a} \left[ \frac{\sin \vartheta_I}{\sin \vartheta_2} \left( 1 - 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \cos^2 \vartheta_I \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_I} \left( 1 - 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \cos^2 \vartheta_2 \right) \right] \sin(\vartheta_I + \vartheta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\tilde{yx} &= \frac{1+\nu}{4\pi} \frac{m}{2a} \left[ \frac{\sin \vartheta_I}{\sin \vartheta_2} \left( 1 + 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \cos^2 \vartheta_I \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_I} \left( 1 + 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \cos^2 \vartheta_2 \right) \right] \sin(\vartheta_I + \vartheta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{yy} &= -\frac{1-\nu}{4\pi} \frac{m}{2a} \left( \frac{\cos 2\vartheta_I \cos \vartheta_I}{\sin \vartheta_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos 2\vartheta_2 \cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_I} \right) \sin(\vartheta_I + \vartheta_2) \end{aligned}$$

$$\tilde{xz} = \frac{1}{2\pi(2a)^2} \left( \frac{\sin 2\vartheta_I}{\sin^2 \vartheta_2} + \frac{\sin 2\vartheta_2}{\sin^2 \vartheta_I} \right) \sin^2(\vartheta_I + \vartheta_2)$$

$$\tilde{yz} = \frac{1}{2\pi(2a)^2} \left( \frac{\cos 2\vartheta_I}{\sin^2 \vartheta_2} - \frac{\cos 2\vartheta_2}{\sin^2 \vartheta_I} \right) \sin^2(\vartheta_I + \vartheta_2).$$



Slika 2

Oglejmo si na kratko to napetostno stanje! Vzdolž imaginarni osi ( $x = 0$ ) imamo  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$ . Na tej premici sta upogibna momenta  $xy$  in  $yx$  ter prečna tangencialna napetost  $yz$  nična, torzijski moment  $-yy$  in prečna tangencialna napetost  $xz$  pa sta takile

$$\begin{aligned} -\tilde{yy} &= \tilde{xx} = \frac{1-\nu}{\pi} \frac{m}{2a} \cos 2\vartheta \cos^2 \vartheta \\ \tilde{xz} &= \frac{8}{\pi (2a)^2} \frac{m}{\sin^2 \vartheta} \sin \vartheta \cos^3 \vartheta \end{aligned}$$

Podobno raziščemo napetostno stanje vzdolž realne osi ( $y = 0$ ). Zaradi singularnosti v  $x = \pm a$  raziščemo stanje posebej na vsakem izmed odsekov:  $-a < x < +a$ ,  $x < -a$ ,  $x > +a$ . Tako dobimo za odsek osi  $x$  med obema prijemališčema točkovnih dvojic tole stanje: upogibna momenta  $\tilde{xy}$  in  $\tilde{yx}$  ter prečni tangencialni napetosti  $\tilde{xz}$  in  $\tilde{yz}$  so nični, torzijski moment pa je konstanten in znaša

$$-\tilde{yy} = \tilde{xx} = \frac{1-\nu}{\pi} \frac{m}{2a}$$

3.2. Točkovni dvojici  $\pm im$  v točkah  $z_o = \pm a$  (slika 2).

V tem primeru ravnamo čisto podobno kakor v prejšnjem, le da to pot superponiramo dva sistema funkcij (2.4) za točkovni dvojici

$$\begin{aligned} z_o = +a: M &= M_x + iM_y = +im; \bar{M} = -im \\ z_o = -a: M &= M_x + iM_y = -im; \bar{M} = +im. \end{aligned}$$

Rezultirajoč par funkcij je takle

$$\begin{aligned} \Omega_r'(z) &= -Tm \left( \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right) \\ \omega_r''(z) &= -Tm \left\{ \left( \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right) + \right. \\ &\quad + a \left[ \frac{1}{(z-a)^2} + \frac{1}{(z+a)^2} \right] - \\ &\quad \left. - 2n_f \left[ \frac{1}{(z-a)^3} - \frac{1}{(z+a)^3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Z njima napravimo sestave (1.3) in vpeljemo bipolarne koordinate (3.2). Po ureditvi so sestave takele

$$\begin{aligned} S_I &= \tilde{xy} - \tilde{yx} = \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{m}{2a} \left( \frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} \right) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= -\tilde{xy} - \tilde{yx} + i2\tilde{yy} = \\ &= -\frac{1-\nu}{2\pi} \frac{m}{2a} \left[ \left( \frac{\sin 2\vartheta_1 \sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} + \frac{\sin 2\vartheta_2 \sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + i \left( \frac{\cos 2\vartheta_1 \sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} - \frac{\cos 2\vartheta_2 \sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} \right) \right] \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \tilde{xz} - \tilde{iyz} = \frac{1}{2\pi (2a)^2} \left[ \left( \frac{\cos 2\vartheta_1}{\sin^2 \vartheta_2} - \frac{\cos 2\vartheta_2}{\sin^2 \vartheta_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + i \left( \frac{\sin 2\vartheta_1}{\sin^2 \vartheta_2} + \frac{\sin 2\vartheta_2}{\sin^2 \vartheta_1} \right) \right] \sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned}$$

Posamezne komponente napetostnega stanja so tele

$$\begin{aligned} \tilde{xy} &= \frac{1+\nu}{4\pi} \frac{m}{2a} \left[ \frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} \left( 1 + 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \sin^2 \vartheta_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} \left( 1 + 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \sin^2 \vartheta_2 \right) \right] \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\tilde{yx} &= \frac{1+\nu}{4\pi} \frac{m}{2a} \left[ \frac{\cos \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} \left( 1 - 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \sin^2 \vartheta_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} \left( 1 - 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \sin^2 \vartheta_2 \right) \right] \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{yy} &= \frac{1-\nu}{4\pi} \frac{m}{2a} \left( \frac{\cos 2\vartheta_1 \sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos 2\vartheta_2 \sin \vartheta_2}{\sin \vartheta_1} \right) \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned}$$

$$\tilde{xz} = \frac{1}{2\pi (2a)^2} \left( \frac{\cos 2\vartheta_1}{\sin^2 \vartheta_2} - \frac{\cos 2\vartheta_2}{\sin^2 \vartheta_1} \right) \sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

$$\tilde{yz} = -\frac{1}{2\pi (2a)^2} \left( \frac{\sin 2\vartheta_1}{\sin^2 \vartheta_2} + \frac{\sin 2\vartheta_2}{\sin^2 \vartheta_1} \right) \sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

To napetostno stanje lahko raziščemo podobno kakor poprejšnje. Izkaže se, da znašata upogibna momenta  $xy$  in  $yx$  vzdolž imaginarni osi

$$\tilde{xy} = \frac{1+\nu}{\pi} \frac{m}{2a} \left( 1 + 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \sin^2 \vartheta \right) \cos^2 \vartheta$$

$$-\tilde{yx} = \frac{1+\nu}{\pi} \frac{m}{2a} \left( 1 - 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \sin^2 \vartheta \right) \cos^2 \vartheta.$$

Prikazana primera sta samo dva izmed mnogih možnih, ki jih lahko po potrebi poiščemo s pomočjo superpozicije sistemov funkcij (2.4).

#### LITERATURA

- [1] A. C. Stevenson, On the Equilibrium of Plates, Phil. Mag. 33 (1942), 639.
- [2] M. Muršič, Complex-Variable Approach in the Theory of Moderately Thick Elastic Plates, Publ. Dept. Mech., 1/2 (1966), University of Ljubljana, Yugoslavia.
- [3] N. I. Muskelishvili, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, P. Noordhoff, Groningen 1953.
- [4] G. N. Savin, Stress Concentration Around Holes, Pergamon Press, London 1961.

#### Avtorjev naslov:

dr. Milan Muršič,  
Matematično-fizikalni oddelek  
Fakultete za naravoslovje in  
tehnologijo, Univerza v Ljubljani