

UDK 531.391.2

**Stabilnostni problemi pravokotnih sten z odprtinami**

Poročilo o preskusih na kvadratnih stenah s krožnimi odprtinami

MARKO ŠKERLJ

## UVOD

Čedalje hitrejša prodiranje tenkostenskih nosilnih elementov v vse veje strojne in gradbene tehnike zahteva tudi nove načine dimenzioniranja. Trdnostni računi, ki so bili do nedavna osnova za določanje debeline stenskih nosilcev, pri čedalje lažjih konstrukcijah izgubljajo veljavo in v ospredje prihajajo stabilnostni računi, ki narekujejo dimenzije.

Stabilnostni problemi sten brez odprtin so teoretično in praktično že precej obdelani. Rezultati teh raziskav so zbrani v mnogih knjigah ter priročnikih in podani v obliki, ki omogoča konstrukterjem razmeroma enostavno in hitro računanje. Nikjer — ne v domači ne v tuji literaturi — pa ni zaslediti nobenih podatkov o reševanju stabilnostnih problemov pri stenah z odprtinami, čeprav se čedalje pogosteje pojavljajo v modernih konstrukcijah. Raziskovanje tega področja je še v povojih, izjema so samo krožni kolobarji, katerih stabilnostni problem je že rešen.

Ta razprava bo skušala vsaj nekoliko osvetliti nakazane probleme, in sicer z rezultati poskusov na kvadratnih stenah s centričnimi krožnimi odprtinami.

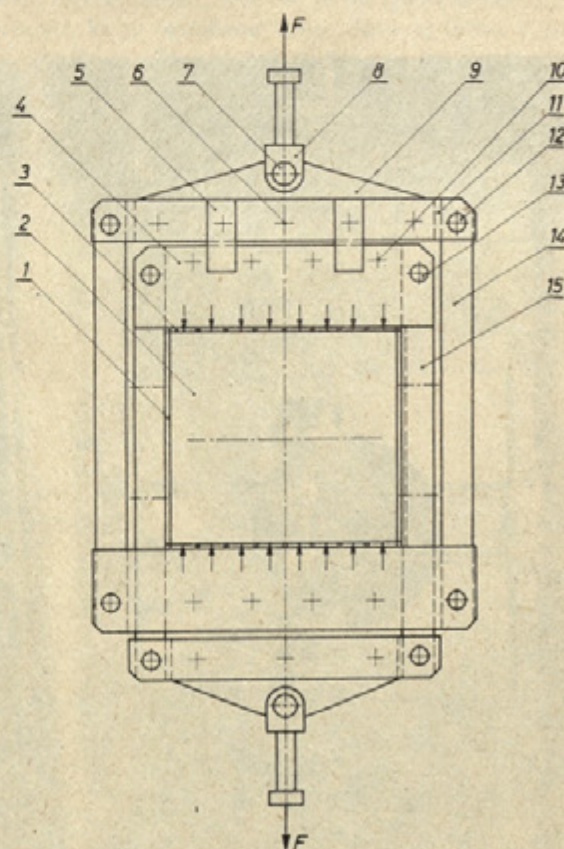
Neposreden pobudnik za take raziskave je bila tovarna LITOSTROJ. Pred nekaj leti je bil tudi na njeno pobudo in z njeno finančno pomočjo ter sodelovanjem Sklada Borisa Kidriča izdelan elaborat o določanju napetostnega stanja v stenah z odprtinami [1]. Tam je bila obširno obdelana aproksimativna (diferenčna) metoda za računanje napetostnega stanja v takih nosilnih elementih, ki sicer ni eksaktna, vendar pa z zadostno natančnostjo uporabna pri poljubnih oblikah sten in odprtin.

Pri eksperimentalnih raziskavah stabilnosti je tovarna Litostroj sodelovala tako, da je dala na uporabo svoj tehnološki laboratorij, Sklad Borisa Kidriča in Fakulteta za strojništvo v Ljubljani pa sta poskrbela za potrebna finančna sredstva.

Težišče naloge so bili eksperimentalni poskusi. Zanje je bilo potrebno izdelati vpenjalno napravo, njeno uporabnost verificirati s pomočjo že znanih rezultatov za stene brez lukenj ter izvesti vrsto poskusov na stenah z odprtinami. Pri teh eksperimentih so bili trije robovi stene vedno prosto operti, četrti, in sicer neobremenjeni rob pa je bil prosto oprt ali pa popolnoma prost.

## VPENJALNA NAPRAVA

Za izvedbo poskusov je bilo treba izdelati vpenjalno napravo, ki je morala zagotavljati enosni centrični in enakomerno porazdeljeni tlak na dveh robovih stene, povrh tega pa na vseh štirih robovih zadostiti zahtevanim robnim pogojem. Konstrukcija trgalnega stroja AMSLER, na katerem so bili izvedeni poskusi, je narekovala zunanje mere te naprave in s tem tudi velikost preskušanih sten. Zaradi tega in potrebne togosti vpenjalne naprave smo bili omejeni na kvadratne stene z zunanjimi merami  $300 \times 300$  mm.



Sl. 1. Vpenjalna naprava

1 — vložek, 2 — preskušana stena, 3 — sistem zgornje tehnice, 4 — vodilna plošča, 5 — vodilo, 6 — zgornji prilagodni vijak, 7 — sornik, 8 — jarek, 9 — zgornji nosilec, 10 — pritrdilni vijak, 11 — nosilna plošča, 12 — sornik, 13 — sornik, 14 — natezna palica (zunanja), 15 — natezna palica (notranja)



Vpenjalna naprava je narisana na sl. 1. Dvojni jarem spreminja natezno silo trgalnega stroja v tlačno obremenitev stene, enakomeren tlak pa dosegamo z dvema sistemoma tehtnic. Zadnji členi obeh tehtnic so opremljeni z utori, v katere se prilegata priostrena robova preskušane stene, tako da izpolnjujeta pogoj prosto oprti robovi. Tudi v obe notranji natezni palici sta vstavljena dva vložka z utorom za priostrena vzdolžna neobremenjena robova. Z odstranitvijo enega ali obeh vložkov lahko dosegamo robni pogoj prostega enega ali obeh robov. S stranskimi vijaki na notranjih palicah sta vložka pritisnjena k steni.

Opravljeni poskusi in rezultati so pokazali, da manjše deformacije, ki so nastale na površini nosilcev tehtnice, niso imele bistvenega vpliva na natančnost eksperimentov. Natančen pregled vseh elementov je pokazal, da je naprava brezhibna in sposobna za nadaljevanje podobnih raziskav.

Za testiranje vpenjalne naprave in določanje oblike neizbočene (neobremenjene) kakor tudi izbočene stene je bila izdelana posebna merilna naprava. Ta je omogočala merjenje prečnih pomikov

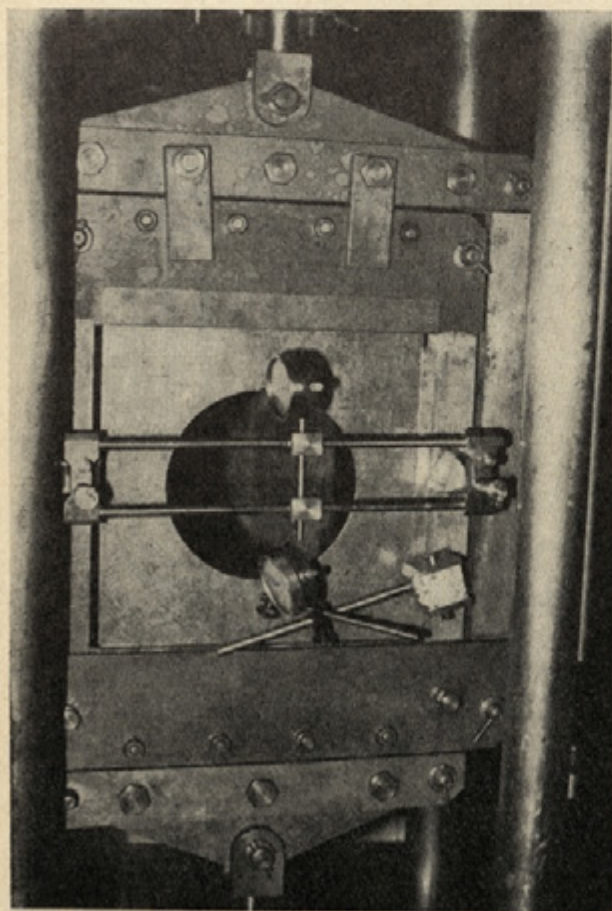
v poljubni točki stene (sl. 2). Magnetni držali, s katerima je merilna priprava pritrjena na obe natezni palici vpenjalne naprave, omogočata premikanje merilnih uric v smeri obremenitve, prečno pa urice drsijo po dveh valjastih vodilih.

### MERITVE NA STENAH BREZ ODPRTIN

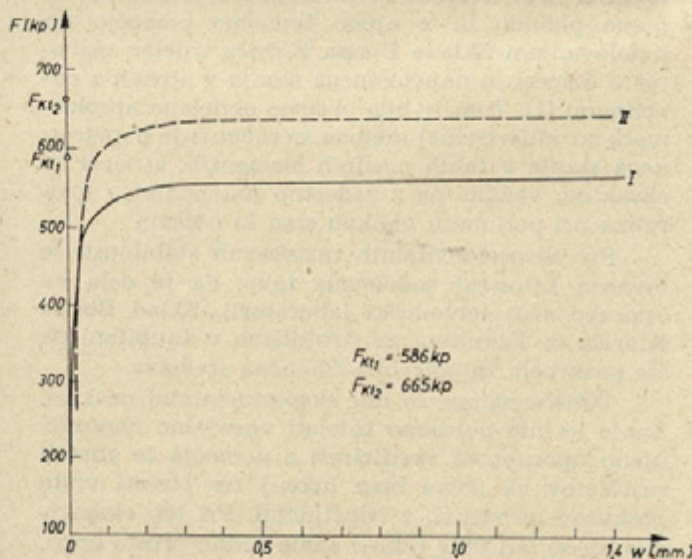
Poskusi so bili opravljeni v dveh etapah. Prvi del je bil posvečen poskusom na polnih stenah brez odprtin z namenom, da bi verificirali vpenjalno in merilno napravo ter določili velikostni red napake zaradi začetne neplanosti preskušanih sten kakor tudi zaradi nenatančne izpolnitve robnih pogojev. V drugi etapi pa je bila opravljena serija poskusov na stenah z odprtinami.

Za testiranje vpenjalne naprave smo uporabili kvadratne stene  $300 \times 300$  mm iz lužene in dekapirane jeklene pločevine z nazivno debelino 2 mm. Eksperimentalno je bilo obdelanih pet različnih primerov robnih pogojev. V vseh primerih so bile stene obremenjene v srednji ravnini z enakomernim enosnim tlakom. Pri vrednotenju rezultatov so bile upoštevane tudi razlike v debelinah posameznih sten, ker so se pokazali precejšnji odstopki od nazivne debeline.

Z merilnimi uricami smo merili pomike  $w$  pravokotno k ravnini stene pri večanju tlačne obremenitve, rezultate vseh meritev pa sproti vnašali v tabele in pozneje risali ustrezne diagrame. Za primer je na sl. 3 narisana diagram meritev za steno, ki je imela oba obremenjena robova prosto oprta, neobremenjena pa popolnoma prosta. Razlika obeh krivulj nastaja zaradi različnih debelin obeh sten.



Slika 2



Slika 3



Za primerjavo sta vneseni tudi obe teoretično izračunani kritični sili  $F_{kt1}$  in  $F_{kt2}$ , dobljeni po znani enačbi

$$F_{kt} = k \frac{E \pi^2 h^3}{12 (1 - \mu^2) b} \quad (1)$$

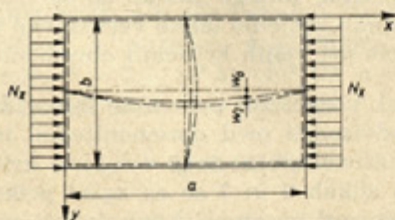
Obe krivulji na sliki 3 prikazujeta srednje vrednosti treh meritev. Tabelarično sta podani v tabeli 1.

Tabela 1.

| Obremenitev<br>[kp] | Pomiki<br>[mm] |       |
|---------------------|----------------|-------|
|                     | I              | II    |
| 100                 | 0              | 0     |
| 200                 | 0,01           | 0     |
| 300                 | 0,02           | 0,03  |
| 400                 | 0,03           | 0,03  |
| 450                 | 0,035          |       |
| 500                 | 0,05           | 0,04  |
| 550                 | 0,26           |       |
| 600                 |                | 0,085 |
| 620                 |                | 0,12  |

Najenostavnejše določanje kritične obremenitve je nedvomno tako, da skuša preskuševalec s pritiskanjem na izbočeno steno ugotoviti najnižjo vrednost obremenitve, pri kateri pod roko še začuti zaznaven preskok stene v nasprotno stran. Izkazalo se je, da je ta metoda preveč subjektivna in premalo natančna. Prav tako je nezanesljiva približna postavitev asimptote k narisanim krivuljam v diagramih. Zato smo poiskali drugo možnost za vrednotenje rezultatov eksperimentov in se odločili za modificirano SOUTHWELLOVO metodo.

Pri idealno ravni steni bi se dala — ne glede na to, ali ima luknjo ali ne — enostavno določiti velikost kritične sile  $F_k$ . Idealno izveden eksperiment bi dal namreč znani razvejiten diagram, v katerem bi bila razvejitvena krivulja izrazito prelomljena. Dejansko pa nobena stena ni popolnoma ravna, ampak izkazuje vedno neko začetno ukrivljenost, ki se praktično ne da odpraviti. Z obremenjevanjem se prične ta začetna ukrivljenost takoj večati. Namesto razvejitvene krivulje dobimo diagram, kakršen je prikazan na sliki 3. Naša naloga je torej, da iz take krivulje določimo velikost  $F_k$ . R. V. Southwell je leta 1932 objavil metodo, po kateri lahko za palice dobimo kritično silo iz znane



Slika 4

deformacijske krivulje. Modifikacija te metode in njena uporaba pri ravninskih sistemih je v kratkem naslednja:

Pravokotna stena je obremenjena z enakomerno porazdeljeno tlačno silo na enoto dolžine  $N_x$  na robovih  $x = 0$  in  $x = a$  (sl. 4). Hkrati ima srednja ravnina neko začetno ukrivljenost, ki je majhna v primerjavi z debelino stene. Predpostavimo, da je ta ukrivljenost podana z enačbo

$$w_0 = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2)$$

Po obremenitvi se pojavi dodatni premik  $w_I$ , tako da je skupni premik  $w = w_0 + w_I$ . Diferencialna enačba izbočenja stene v našem primeru je

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{1}{D} N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3)$$

Leva stran te enačbe je dobljena iz ravnotežnih pogojev za prečne sile in momente, ki so izraženi s pomiki. Upogibni momenti pa niso odvisni od celotne ukrivljenosti, temveč le od spremembe ukrivljenosti, ki je označena v  $w_I$ . Zato je treba v zgornji enačbi na levi strani pisati  $w_I$ , na desni strani pa namesto  $w$  vzeti  $w_0 + w_I$ . Tako spremenjeno enačbo lahko pišemo tudi

$$\Delta \Delta w_I = \frac{1}{D} \left( -N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - N_x \frac{\partial^2 w_I}{\partial x^2} \right) \quad (4)$$

V enačbo (4) lahko vstavimo izraz (2) in dobimo enačbo za  $w_I$  v obliki

$$\Delta \Delta w_I = \frac{1}{D} \left( N_x \frac{\pi^2 A}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - N_x \frac{\partial^2 w_I}{\partial x^2} \right) \quad (5)$$

Če predpostavimo rešitev zgornje diferencialne enačbe

$$w_I = B \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (6)$$

dobimo konstanto  $B$

$$B = \frac{A \cdot N_x}{\frac{D \pi^2}{a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) - N_x} \quad (7)$$

Z izrazi (2), (6) in (7) je slednjič celotni premik

$$w = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \left[ 1 + \frac{N_x}{\frac{D \pi^2}{a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) - N_x} \right] \quad (8)$$



Prvi del imenovalca v oglatem oklepaju pa je prav že znana kritična obremenitev za ravno steno  $N_{xk}$ . Če vpeljemo še označbo  $\alpha = N_x/N_{xk}$ , dobimo

$$w = w_0 + w_I = A \frac{1}{1-\alpha} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (9)$$

Največji pomik je pri  $x = a/2$  in  $y = b/2$ . V tem primeru lahko iz (9) izrazimo

$$w_{I \max} = \frac{A}{\frac{N_{xk}}{N_x} - 1} \quad (10)$$

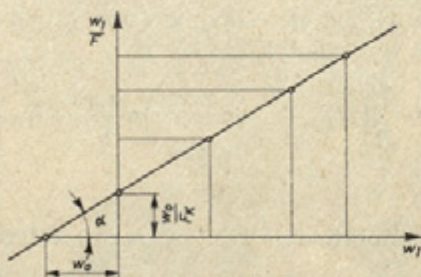
Če preidemo k označbam, ki smo jih uporabljali pri poskusih, lahko zgornjo enačbo zapišemo tudi splošneje

$$w_I = \frac{w_0}{\frac{F_k}{F} - 1}$$

oziroma dokončno

$$\frac{w_I}{F} = \frac{1}{F_k} w_0 + \frac{w_0}{F_k} \quad (11)$$

To je enačba premice v diagramu na sl. 5, njen smerni koeficient pa je:  $\tan \alpha = 1/F_k$ .



Slika 5

Pri vrednotenju rezultatov po poskusih pa te premice ne moremo narisati neposredno, ker ne poznamo niti  $F_k$  niti  $w_0$ . Zato ravnamo tako, da med obremenjevanjem razbiramo silo in ustrezne deformacije v več točkah, izračunamo ustrezna razmerja  $w_I/F$  in iz teh podatkov narišemo premico. Odsek na abscisni osi pokaže velikost začetne deformacije v merjeni točki, iz naklonskega kota pa dobimo velikost kritične sile  $F_k$ .

Metoda daje dobre rezultate za eksperimente v elastičnem območju, pri majhnih pomikih ter v primerih, ko se izbočenje vsaj približno ujema s sinusovo krivuljo.

Naši poskusi so pokazali, da so tako dobljeni rezultati res zelo blizu teoretično izračunanim. V zgoraj omenjenem primeru stene z dvema prostima robovoma je bila po Southwellovi metodi dobljena kritična sila 580 kp, medtem ko je teoretično izračunana dosegla 586 kp. Napaka znaša torej samo okrog 1 %. Enako napako smo dognali tudi v primeru stene, ki je imela en vzdolžni rob prosto oprt, drug pa je bil popolnoma prost. Analiza napak pri stenah z drugačnimi robnimi pogoji je pokazala, da dobimo najbolj natančne rezultate v omenjenih dveh primerih. Tretji primer, to je pri steni s prosto oprtimi robovi na vseh štirih straneh, je pokazal napako 6 %. Dejstvo, da smo dobili  $F_k > F_{kt}$ , si lahko razlagamo s prevelikim trenjem na robovih. Zadnja dva primera z enim ali obema vpetima roboma kažeta napako nad 10 %. Pri tem je bila  $F_k < F_{kt}$  nedvomno zaradi tega, ker ni uspelo doseči robnih pogojev popolne vpetosti.

S tem je bila vpenjalna naprava verificirana vsaj za prve tri primere in določen velikostni red napak, s kakršnimi lahko računamo tudi pri poskusih s stenami z odprtinami, ter ustvarjena metoda za vrednotenje rezultatov.

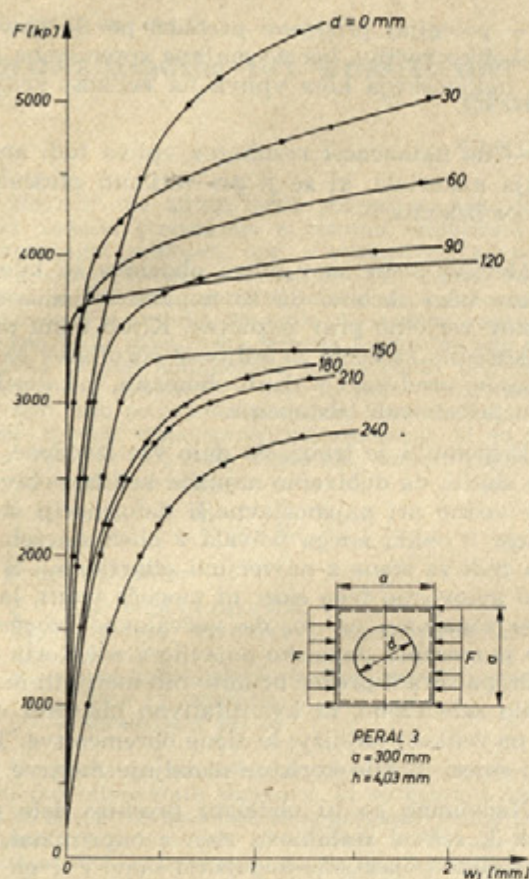
#### MERITVE NA STENAH Z ODPRTINAMI

V drugi fazi poskusov smo preskušali kvadratne stene z različno velikimi centrično postavljenimi krožnimi odprtinami. Trije robovi so bili vedno prosto oprti, četrti, in sicer neobremenjeni, rob pa je bil enkrat prosto oprt, drugič pa popolnoma prost. Prva serija poskusov je bila narejena s stenami iz jeklene pločevine v debelini 2,18 mm, pri drugi seriji pa je bila uporabljena pločevina iz aluminijeve zlitine. Tovarna IMPOL nam je dostavila navzkrižno valjano pločevino (zaradi zagotovitve izotropije) iz zlitine peral 3 v debelini 4,03 mm. Premer odprtin smo spreminjali v skokih po 30 mm od 0 do 240 mm pri zunanji dimenziji sten  $300 \times 300$  mm.

Instrumente smo nastavljali vsakokrat tam, kjer smo pričakovali največje pomike. Merili smo jih tudi s po več uricami hkrati, in to predvsem takrat, kadar je bilo možno pričakovati v eni točki pozitiven, v drugi pa negativen pomik. Pri tem smo ugotovili, da se pri najmanjši kritični obremenitvi na robu odprtine vedno pojavlja osno simetrična oblika izbočenja. Iz tega izhaja, da se tudi pri velikih odprtinah verjetno lahko večvalovno izbočenje pojavlja šele pri višjih kritičnih obremenitvah.

Za vsak posamezni primer so bile v diagramih narisane odvisnosti med obremenitvami in pomiki ter po Southwellovi metodi določene kritične velikosti. Na slikah 6 in 7 so za zgled prikazani rezultati poskusov na steni iz perala pri prosto položenih vseh štirih robovih.





Slika 6

V praksi se je ustalilo računanje kritičnih obremenitev sten  $N_k$  (kp/cm) s pomočjo izbočitvenega koeficienta  $k$  po enačbi

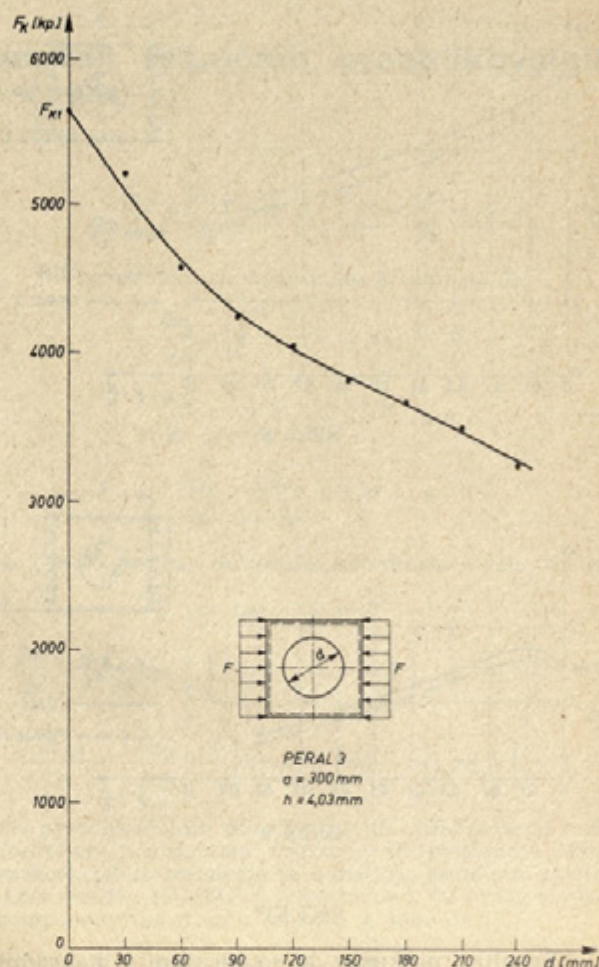
$$N_k = k \frac{\pi^2 D}{a^2}$$

Zato preračunamo dobljene rezultate še tako, da dobimo končno vrednost koeficienta  $k$  v odvisnosti od premera luknje — oziroma zaradi lažjega primerjanja — od razmerja  $\gamma = d/a$ .

Iz prejšnjih izsledkov izhaja, da so eksperimentalno določene kritične obremenitve pri stenah, ki so na vseh štirih robovih prosto oprte, približno za 6 % previsoke. Če upoštevamo to, dobimo za jeklene stene s stranico  $a = 300$  mm, debelino  $h = 2,18$  mm,  $E = 2,1 \cdot 10^6$  kp/cm<sup>2</sup> ter  $\mu = 0,3$  enačbo za izbočitveni koeficient

$$k = 0,001428 F_k$$

Rezultati tega računa so grafično prikazani na sl. 8. Po podobni enačbi je bila dobljena tudi zgor-

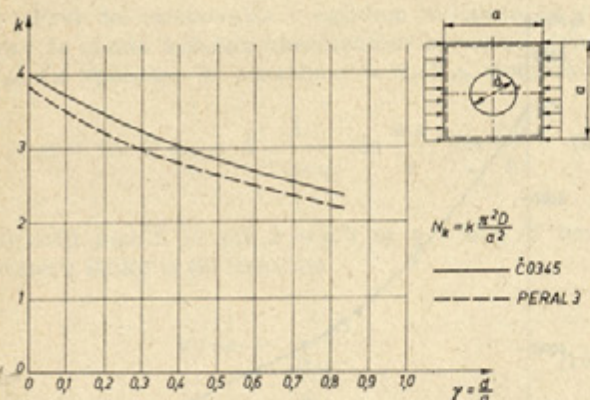


Slika 7

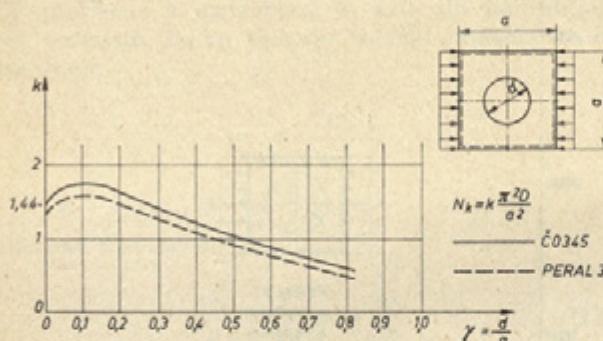
nja krivulja na sl. 9 za stene z enim prostim robom, le da pri tem nismo upoštevali 6 % napake, saj smo pri verifikaciji vpenjalne naprave ugotovili, da je napaka eksperimentov pri teh robnih pogojih verjetno zanemarljiva.

Rezultati eksperimentov s stenami iz perala so prav tako vneseni na slikah 8 in 9, in sicer s črtkanima črtama. Pri računanju je bilo upoštevano:  $a = 300$  mm,  $h = 4,03$  mm,  $E = 7,10^5$  kp/cm<sup>2</sup> in  $\mu = 0,3$ . Obe krivulji ležita pod ustreznima krivuljama za jeklene stene, čeprav bi pričakovali, da bosta z njima sovpadali, saj je materialna konstanta že upoštevana v upogibni togosti  $D$ . To napako si lahko razlagamo z nenatančno predpostavko za elastični modul perala 3. Če bi bili za  $E$  vzeli  $6,7 \cdot 10^5$  kp/cm<sup>2</sup> (namesto  $7,10^5$ ), bi dobili praktično enako krivuljo, kakršno smo dobili za jekleno pločevino. Ta vrednost za elastični modul pa je še v možnih mejah. Zato lahko imamo obe polni krivulji za dokončni rezultat meritev.





Slika 8



Slika 9

## SKLEP

Rezultati poskusov, ki so združeni v diagramih na sl. 8 in 9, dajejo kar dober vpogled v potek funkcije  $k(\gamma)$  in po njej tudi v potek funkcije  $F_k(d)$ . Pri steni, ki je na vseh štirih robovih prosto vpeta, se z naraščanjem premera odprtine kritična sila precej enakomerno manjša, kar je fizikalno lahko razumljivo. Nekoliko presenetljiv pa je potek te funkcije pri steni z enim prostim robom. Pri taki steni kritična obremenitev sprva nekoliko narašča, čeprav se odprtina večja, in pade na vrednost kritične sile pri steni brez luknje šele pri  $\gamma = 0,25$ , od tod naprej pa se skoraj enakomerno zmanjšuje. Fizikalno je to anomalijo težko pojasniti, kaže pa na neko podobnost s potekom krivulje  $k(\gamma)$  pri kolo-barju, ki je vpet na zunanem robu.

Ti izsledki so opazni na prvi pogled. Njihova pravilnost je seveda v tesni zvezi z natančnostjo meritev, ki so vedno združene z napakami. Nekateri vzroki za napake so:

— vprašanje, koliko so bili izpolnjeni robni pogoji; nekaj trenja priostrenih robov v vložkih je bilo kljub skrbni obdelavi;

— začetna ukrivljenost preskušancev nedvomno ni potekala povsem po sinusovi krivulji, tako da je tudi natančnost računanja po Southwellovi metodi manjša;

— potegljaj prirejene premice po Southwello je nekoliko kočljiv, ker že majhna sprememba njenega naklonskega kota vpliva na velikost kritične sile;

— na natančnost rezultatov vpliva tudi anizotropija materiala, ki se ji pri valjanih ploščah ni mogoče izogniti.

Meritve same in njihova obdelava so bile izpeljane tako skrbno, da so napake iz omenjenih vzrokov verjetno prav neznatne. Kljub temu pa bi bilo koristno za večjo zanesljivost rezultatov še več poskusov, predvsem v tistih območjih, v katerih bi lahko pričakovali odstopanja.

Pripomniti je treba, da dajo vse izvedene meritve slutiti, da dobivamo najnižje kritične obremenitve vedno pri najenostavnejši deformaciji stene, in sicer v obliki enega polvala v obeh smereh. To velja tudi za stene z največjimi odprtinami. S popolno gotovostjo tega sicer ni mogoče trditi, lahko pa se zanašamo na to, da večvalovno izbočenje, ki se je morebiti dejansko pojavilo v nekaterih primerih, pa zaradi preveč primitivnih merilnih metod ni bilo zabeleženo, ni kvantitativno bistveno vplivalo na velikost najnižje kritične obremenitve. Tudi v tej smeri bi bile koristne nadaljnje meritve.

Nedvomno so tu obdelani preskusi šele prvi korak k rešitvi stabilnosti sten z odprtinami, saj so nekoliko pojasnjena dogajanja samo v dveh primerih robnih pogojev, in še to samo pri kvadratni obliki stene z okroglo odprtino. Odprta so še vprašanja drugih oblik zunanje in notranje konture, vprašanja večjega števila odprtin v različnih oblikah ter druge kombinacije robnih pogojev. Prav tako lahko za zdaj samo malo povemo o vplivu ojačitev v obliki različnih reber in o njihovi najbolj ekonomični razvrstitvi. Res pa je, da bodo skušnje, ki smo si jih pridobili pri teh prvih poskusih, bistveno olajšale nadaljnje delo.

## LITERATURA

- [1] Škerlj, M.: Določanje napetostnega stanja v steh z odprtinami z aproksimativno metodo. Strojniški vestnik št. 1, 1965, strani 1 do 10.
- [2] Stüssi, Kollbrunner, Walt: Versuchsbericht über das Ausbeulen der auf einseitigen, gleichmäßig und ungleichmäßig verteilten Druck beanspruchten Platten. Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik, str. 25, 1951, ETH Zürich.
- [3] Živojinović, S.: Konstrukcija vpenjalne naprave za preskušanje stabilnosti sten in njena verifikacija. Diplomsko delo, Ljubljana, 1966.
- [4] Pregelj, A.: Poskusi stabilnosti sten z odprtinami. Diplomsko delo, Ljubljana, 1969.

Avtorjev naslov:

prof. dr. ing. Marko Škerlj,  
Fakulteta za strojništvo  
Univerze v Ljubljani