STROJNIŠKI VESTNIK

LETNIK 17 LJUBLJANA, V SEPTEMBRU 1971 ŠTEVILKA 4/5

UDK 531.38

Osno simetrični stabilnostni problem krožnega kolobarja z ojačenim notranjim robom

MARKO ŠKERLJ

Posamezne rešitve stabilnostnega problema krožnega kolobarja s konstantno debelino so znane že dalj časa. V praksi pa se skoraj nikjer ne pojavljajo konstrukcije sten z odprtinami, pri katerih notranji rob ne bi bil ojačen. Do nedavna so bili osnova za dimenzioniranje trdnostni izračuni, v novejšem času pa prihajajo v ospredje vse tanjši konstrukcijski elementi, ki potrebujejo predvsem kontrolo stabilnosti; zato postaja trdnostni izračun sekundarnega pomena. V literaturi za zdaj še ni zaslediti nobenih tovrstnih računov in napotkov, ki bi omogočali konstruktorjem tenkostenskih jeklenih konstrukcij vsaj približno upoštevanje ojačitev na robovih odprtin in s tem racionalno dimenzioniranje.

Z dvema podobnima problemoma se je ukvarjal EGGER in ju rešil že leta 1941, vendar obravnavata oba kolobar z linearno spremenljivo debelino v radialni smeri. Skokovite spremembe debeline, kakršna se v praksi pojavlja redno, pa ni — kolikor mi je znano — obravnaval še nihče.

Razprava je v bistvu del širše fundamentalne raziskave o stabilnostnem problemu sten z odprtinami.

Prvi del, ki se je nanašal na splošno rešitev stabilnosti krožnega kolobarja, sta finančno podprla Fakulteta za strojništvo in Inštitut za strojništvo. Rezultati so bili objavljeni v Strojniškem vestniku št. 3, 1968. Drugi del je obravnaval stabilnost kvadratnih sten s krožnimi odprtinami. Ob finančni podpori Sklada Borisa Kidriča in Fakultete za strojništvo je bil že dokončan in so bili rezultati objavljeni v Strojniškem vestniku št. 2, 1971.

Izsledki tretjega dela teh raziskav so razvidni iz tega poročila. Finančno pomoč za njihovo realizacijo so prispevali Sklad Borisa Kidriča, Fakulteta za strojništvo in Inštitut za strojništvo. Vsem tem so nosilec teme in sodelavci dolžni zahvalo.

Energijska enačba

Celotni elastični potencial poljubnega elastičnega telesa lahko pišemo kot vsoto potenciala notranjih in potenciala zunanjih sil. Velja pa to le v primeru, če se omejimo na konservativne sisteme.

$$U = U_n + U_z$$

Potreben in zadosten pogoj za ravnotežje ustvarja princip virtualnih pomikov. Sistem je v ravnotežju takrat, ko je pri variaciji deformacijskega stanja vsota virtualnega dela zunanjih in notranjih sil ničnа.

$$\delta U = \delta U_n + \delta U_z = 0$$

Celotni elastični potencial krožnega kolobarja s konstantno debelino pri prehodu iz plane v osno simetrično izbočeno lego je sestavljen iz elastične energije sil v srednji ravnini stene

$$U_s = \frac{\pi E h}{1-\mu^2} \int \left[\left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\mu \left(\frac{u}{r} u' + \frac{u}{2r} w'^2 \right) \right] r \, dr$$

in elastične energije zaradi upogiba

$$U_u = \pi D \int \left[w''^2 + \left(\frac{1}{r} w' \right)^2 + 2\mu \frac{1}{r} w' w'' \right] r \, dr$$

Pri tem pomenijo:

- U_s — elastično energijo sil v srednji ravnini stene,
- U_u — elastično energijo zaradi upogiba,
- E — elastični modul ($E = 2{,}1.10^6$ kp/cm^2 za jeklo),
- D — upogibno togost plošče,
- u — radialni pomik,
- u' — prvi odvod radialnega pomika po r,
- w', w'' — prvi oziroma drugi odvod pomika w, ki je pravokoten na steno,
- μ — Poissonovo število ($\mu = 0{,}3$ za jeklo).

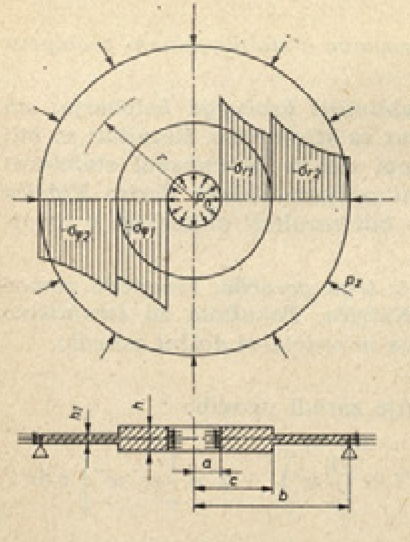
Z združitvijo obeh enačb dobimo osnovno energijsko enačbo osno simetrično obremenjenega krožnega kolobarja. Če označimo z a notranji, z b pa zunanji polmer kolobarja, imamo

$$U = \pi \int_a^b \left\{ \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{u}{r} u' + \frac{u}{2r} w'^2 \right) \right] + D \left[w''^2 + \left(\frac{1}{r} w' \right)^2 + 2\mu \frac{1}{r} w' w'' \right] \right\} r \, dr \qquad (1)$$

Poudariti pa je treba, da velja ta enačba le v primeru neojačene, torej stene s konstantno debelino. Vrhu tega predpostavljamo, da so napetosti σ_r in σ_φ, ki se skrivajo v radialnem pomiku, enakomerno porazdeljene po debelini stene.

Energijska enačba ojačenega krožnega kolobarja

Obravnavamo prosto položeno, na notranjem robu ojačeno krožno steno, ki je na obeh robovih obremenjena s tlačno obremenitvijo p_n oziroma p_z. Obroč je ojačen do radija $r = c$.



Napetosti potekajo zvezno le do roba c, kjer prihaja zaradi različnih debelin do skoka napetosti. Zaradi tega moramo potencialno energijo takega krožnega kolobarja računati v dveh integracijskih mejah, in sicer od roba a do c in od c do b.

Slika 1

$$U = \pi \left\{ \int_a^c \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\left(u_1' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + \left(\frac{u_1}{r} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{u_1}{r} u_1' + \frac{u_1}{2r} w'^2 \right) \right] r \, dr + \int_c^b \frac{Eh_1}{1-\mu^2} \left[\left(u_2' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + \left(\frac{u_2}{r} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{u_2}{r} u_2' + \frac{u_2}{2r} w'^2 \right) \right] r \, dr + D \int_a^c \left[w''^2 + \left(\frac{1}{r} w' \right)^2 + 2\mu \frac{1}{r} w' w'' \right] r \, dr + D \int_c^b \left[w''^2 + \left(\frac{1}{r} w' \right)^2 + 2\mu \frac{1}{r} w' w'' \right] r \, dr \right\} \qquad (2)$$

Če uvedemo razmerje debelin $\lambda = \frac{h_1}{h}$, dobimo za

$$h_1 = \lambda h$$

$$D_1 = \frac{E h_1^3}{12(1-\mu^2)} = \lambda^3 \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} = \lambda^3 D$$

Z vstavljanjem teh vrednosti v enačbo (2) dobimo enačbo za potencialno energijo krožnega kolobarja, reducirano na ojačeni del.

$$U = \frac{\pi E h}{1-\mu^2} \left\{ \int_a^c \left[\left(u_1' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + \left(\frac{u_1}{r} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{u_1}{r} u_1' + \frac{u_1}{2r} w'^2 \right) \right] r \, dr + \lambda \int_c^b \left[\left(u_2' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + \left(\frac{u_2}{r} \right)^2 + 2\mu \left(\frac{u_2}{r} u_2' + \frac{u_2}{2r} w'^2 \right) \right] r \, dr \right\} + \pi D \left\{ \int_a^c \left[w''^2 + \left(\frac{1}{r} w' \right)^2 + 2\mu \frac{1}{r} w' w'' \right] r \, dr + \lambda^3 \int_c^b \left[w''^2 + \left(\frac{1}{r} w' \right)^2 + 2\mu \frac{1}{r} w' w'' \right] r \, dr \right\} \qquad (3)$$

Ker se v pomiku u skrivata napetosti σ_r in σ_φ ($\tau_{r\varphi} = 0$ zaradi osno simetričnega stanja), moramo najprej določiti njun potek, in sicer za obe integracijski območji. Napetosti v notranjem in zunanjem delu so

$$\sigma_{r1} = A_1 + B_1 \frac{1}{r^2} \qquad \sigma_{\varphi 1} = A_1 - B_1 \frac{1}{r^2}$$
$$\sigma_{r2} = A_2 + B_2 \frac{1}{r^2} \qquad \sigma_{\varphi 2} = A_2 - B_2 \frac{1}{r^2} \qquad (4)$$

Z upoštevanjem robnih pogojev

$$r = a\colon \ \sigma_{r1} = -p_n \qquad r = b\colon \ \sigma_{r2} = -p_z$$
$$r = c\colon \ \sigma_{r1} = \lambda \sigma_{r2} \qquad r = c\colon \ u_1 = u_2$$

dobimo sistem štirih linearnih enačb

$$A_1 + B_1 \frac{1}{a^2} = -p_n \qquad A_2 + B_2 \frac{1}{b^2} = -p_z$$

$$A_1 + B_1 \frac{1}{c^2} = \lambda \left(A_2 + B_2 \frac{1}{c^2} \right)$$

$$\frac{1}{E} \left[A_1 (1-\mu) c - B_1 (1+\mu) \frac{1}{c} \right] = \frac{1}{E} \left[A_2 (1-\mu) c - B_2 (1+\mu) \frac{1}{c} \right]$$

Če uvedemo še označbe

$$\varrho = \frac{p_n}{p_z}\,,\ \beta = \frac{a}{b}\,,\ \gamma = \frac{c}{b}\,,\ \lambda = \frac{h_1}{h}$$

izhajajo iz rešitve zgornjega sistema vse štiri konstante:

$$A_I = p_z\left(-\varrho - \frac{\lambda-\varrho}{\gamma^2-\beta^2}\gamma^2 - \lambda\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2-\beta^2}W\right) = p_z R_I$$

$$B_I = p_z b^2\left(\frac{\lambda-\varrho}{\gamma^2-\beta^2}\beta^2\gamma^2 + \lambda\beta^2\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2-\beta^2}W\right) = p_z b^2 P_I$$

$$A_2 = p_z(-1-W) = p_z R_2 \tag{5}$$

$$B_2 = p_z b^2 W = p_z b^2 P_2$$

kjer je

$$W = \frac{(\lambda-\varrho)\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)-(1-\varrho)\frac{\gamma^2-\beta^2}{\beta^2\gamma^2}}{\left(1+\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)\cdot\frac{\gamma^2-\beta^2}{\beta^2\gamma^2}-\lambda\cdot\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)}$$

S Hookovim zakonom lahko pišemo

$$u'_I = \frac{p_z}{E}\left[R_I(1-\mu) + P_I(1+\mu)\frac{b^2}{r^2}\right]$$

$$u'_2 = \frac{p_z}{E}\left[R_2(1-\mu) + P_2(1+\mu)\frac{b^2}{r^2}\right] \tag{6}$$

oziroma

$$u_I = \frac{p_z}{E}\left[R_I(1-\mu)r - P_I(1+\mu)\frac{b^2}{r}\right]$$

$$u_2 = \frac{p_z}{E}\left[R_2(1-\mu)r - P_2(1+\mu)\frac{b^2}{r}\right] \tag{7}$$

Z vstavljanjem enačb (6) in (7) v enačbo (3) ter s kvadriranjem oklepajev, dobimo po ureditvi

$$U = \pi p_z h\left[\int_a^c\left(P_I\frac{b^2}{r^2}+R_I\right)w'^2 r\,dr + \lambda\int_c^b\left(P_2\frac{b^2}{r^2}+R_2\right)w'^2 r\,dr\right] + \pi D\left\{\int_a^c\left[w''^2+\left(\frac{1}{r}w'\right)^2+2\mu\frac{1}{r}w'w''\right]r\,dr + \lambda^3\int_c^b\left[w''^2+\left(\frac{1}{r}w'\right)^2+2\mu\frac{1}{r}w'w''\right]r\,dr\right\} \tag{8}$$

V enačbi (8) je zanemarjen člen, ki vsebuje w'^4, prav tako pa nista napisana še dva člena, ki ne vsebujeta pomika w, ker sta pri uporabi Ritzove metode pozneje tako odvečna.

Primerjanje različnih kolobarjev je olajšano z vpeljavo brezdimenzijske koordinate x, ki jo definiramo takole

$$x = \frac{r}{b}$$

$$x_a = \frac{a}{b} = \beta,\quad x_b = \frac{b}{b} = 1,\quad x_c = \frac{c}{b} = \gamma$$

S to zamenjavo prehaja enačba (8) v novo obliko

$$U = \frac{\pi D}{b^2}\left\{\frac{\alpha^2}{\lambda}\left[\int_\beta^\gamma\left(P_I\frac{1}{x^2}+R_I\right)w'^2 x\,dx + \lambda\int_\gamma^1\left(P_2\frac{1}{x^2}+R_2\right)w'^2 x\,dx\right] + \int_\beta^\gamma\left[w''^2+\left(\frac{1}{x}w'\right)^2+2\mu\frac{1}{x}w'w''\right]x\,dx + \lambda^3\int_\gamma^1\left[w''^2+\left(\frac{1}{x}w'\right)^2+2\mu\frac{1}{x}w'w''\right]x\,dx\right\} \tag{9}$$

v kateri pomeni okrajšava

$$\alpha^2 = \frac{h_I p_z b^2}{D} \tag{10}$$

Rešitev problema z Ritzovo metodo

Nastavek za pomik w, pravokotno k ravnini kolobarja, vzamemo po B. SENu [5]. Splošna oblika tega nastavka je

$$w = f(x,y)\,.\,h\left[\Sigma A_{mn}\left(\frac{x}{a}\right)^m\left(\frac{y}{b}\right)^n + F(r)\right]$$

Pri tem so

- $f(x,y)$ — primerna funkcija, ki izpolnjuje zahtevane robne pogoje,
- h — debelina plošče,
- a, b — karakteristični dimenziji kolobarja,
- A_{mn} — poljubne konstante,
- $F(r)$ — primerna singularna funkcija.

B. SEN podaja štiri nastavke glede na obliko plošče in način vpetja.

a) Krožna plošča z luknjo, prosto položena

$$w = h\left[\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^2\Sigma A_n\left(\frac{r}{a}\right)^n + B\ln\frac{r}{a}\right]$$

b) Krožna plošča z luknjo, robovi vpeti

$$w = h\left[\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^2 \Sigma A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n + B \ln\left(\frac{r}{a}\right)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\right]$$

c) Kvadratna plošča s krožno luknjo, prosto položena

$$w = h\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)\left[\Sigma A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n + B \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right]$$

d) Kvadratna plošča s krožno luknjo, robovi vpeti

$$w = h\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)^2\left[\Sigma A_n \left(\frac{r}{a}\right)^n + B \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right]$$

Ker raziskujemo stabilnost prosto položenega kolobarja, uporabimo nastavek pod a).

Z našimi označbami je

$$w = h\,[\Sigma\,(1-x^2)\,A_n\,x^n + B \ln x] \qquad (11)$$

RITZOVA metoda nalaga, da nastavek izpolnjuje geometrijske robne pogoje. Brez težav se prepričamo, da nastavek temu zadošča:

a) zunanji rob je prosto položen

$$r = b, \quad x = 1$$

$$w = h\,[(1-1)\,\Sigma\,A_n\,1^n + B \ln 1] = 0$$

b) notranji rob je viseč

$$r = a, \quad x = \beta$$

$$w = h\,[(1-\beta)\,\Sigma\,A_n\,\beta^n + B \ln \beta] \neq 0$$

Če vstavimo nastavek (11) v enačbo (9) in uporabimo naslednje okrajšave

$$H = -\tfrac{1}{2}\,[P_1\,(\gamma^{-2}-\beta^{-2}) + \lambda\,P_2\,(1-\gamma^{-2})] +$$
$$+ R_1\,(\ln\gamma - \ln\beta) - \lambda\,R_2 \ln\gamma$$

$$G_n = \frac{n}{n-2}\,[P_1\,(\gamma^{n-2}-\beta^{n-2}) + \lambda\,P_2(1-\gamma^{n-2})] -$$
$$-\frac{n+2}{n}\,[P_1\,(\gamma^n-\beta^n) + \lambda\,P_2\,(1-\gamma^n)] +$$
$$+ R_1\,(\gamma^n-\beta^n) + \lambda\,R_2\,(1-\gamma^n) -$$
$$- R_1\,(\gamma^{n+2}-\beta^{n+2}) - \lambda\,R_2\,(1-\gamma^{n+2})$$

$$D_{mn} = \frac{nm}{n+m-2}\,[P_1\,(\gamma^{n+m-2}-\beta^{n+m-2} +$$
$$+ \lambda\,P_2(1-\gamma^{n+m-2})] - \frac{n\,(m+2)+m\,(n+2)}{n+m}\,[P_1\,(\gamma^{n+m} -$$
$$-\beta^{n+m}) + \lambda\,P_2\,(1-\gamma^{n+m})] + \frac{nm}{n+m}\,[R_1\,(\gamma^{n+m} -$$
$$-\beta_n{}^{n+m}) + \lambda\,R_2\,(1-\gamma^{n+m})] + \frac{(n+2)\,(m+2)}{n+m+2}\,\cdot$$
$$\cdot\,[P_1\,(\gamma^{n+m+2}-\beta^{n+m+2}) + \lambda\,P_2\,(1-\gamma^{n+m+2})] -$$
$$-\frac{n\,(m+2)+m\,(n+2)}{n+m+2}\,[R_1\,(\gamma^{n+m+2}-\beta^{n+m+2}) +$$
$$+ \lambda\,R_2(1-\gamma^{n+m+2})] + \frac{(n+2)\,(m+2)}{n+m+4}\,[R_1\,(\gamma^{n+m+4} -$$
$$-\beta^{n+m+4}) + \lambda\,R_2\,(1-\gamma^{n+m+4})]$$

$$E = -\,[\gamma^{-2}-\beta^{-2} + \lambda^3\,(1-\gamma^{-2})]\,(1-\mu)$$

$$F_n = [\gamma^n-\beta^n + \lambda^3\,(1-\gamma^n)]\,(n+2)\,(1-\mu) -$$
$$-\,[\gamma^{n-2}-\beta^{n-2} + \lambda^3\,(1-\gamma^{n-2})]\,n\,(1-\mu)$$

$$C_{mn} = nm\left[\frac{(n-1)\,(m-1)}{n+m-2} + \frac{1}{n+m-2} + \mu\right]\cdot$$
$$\cdot\,[\gamma^{n+m-2}-\beta^{n+m-2} + \lambda^3\,(1-\gamma^{n+m-2})] -$$
$$-\left\{\frac{(n-1)(m+1)n(m+2)+(m-1)(n+1)m(n+2)}{n+m} +\right.$$
$$+\frac{n\,(m+2)+m\,(n+2)}{n+m} + \mu\,[m\,(n+2) +$$
$$\left. + n\,(m+2)]\right\}\cdot[\gamma^{n+m}-\beta^{n+m} + \lambda^3\,(1-\gamma^{n+m})] +$$
$$+ (n+2)\,(m+2)\left[\frac{(n+1)\,(m+1)}{n+m+2} + \frac{1}{n+m+2} +\right.$$
$$\left. + \mu\right][\gamma^{n+m+2}-\beta^{n+m+2} + \lambda^3\,(1-\gamma^{n+m+2})]$$

dobimo končno obliko enačbe (9)

$$U = \frac{\pi\,D\,h^2}{b^2}\left[\frac{a^2}{\lambda}(B^2\,H + 2\,B\,\Sigma\,A_n\,G_n +\right.$$
$$+ \Sigma\,\Sigma\,D_{mn}\,A_m\,A_n) + B^2\,E + 2\,B\,\Sigma\,A_n\,F_n +$$
$$\left. + \Sigma\,\Sigma\,C_{mn}\,A_n\,A_m\right] \qquad (12)$$

V enačbi (12) so A_n in B proste konstante, C, D, E, F, H in G pa konstante, odvisne od oblike stene. S pravilno izbiro prostih konstant se pravi vrednosti funkcije poljubno približamo. Znano je, da je sistem v ravnotežju takrat, če je prva variacija celotnega elastičnega potenciala ničNa. Iz te zahteve izhaja

$$\frac{\partial U}{\partial B} = 0 \qquad B\left(E + \frac{\alpha^2}{\lambda} H\right) + \Sigma A_n \left(F_n + \frac{\alpha^2}{\lambda} G_n\right) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial A_j} = 0 \qquad B\left(F_j + \frac{\alpha^2}{\lambda} G_j\right) + \Sigma A_k \left(C_{jk} + \frac{\alpha^2}{\lambda} D_{jk}\right) = 0 \qquad (13)$$

Enačbe (13) sestavljajo sistem linearnih homogenih enačb, iz katerih dobimo netrivialne rešitve za parametre A_n in B tako, da izenačimo determinanto sistema z nič in tako poiščemo lastne vrednosti α^2.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ j \downarrow \end{array} \begin{array}{cccccc} B & A_o & A_2 & A_4 & & A_{2i} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix}
\left(E + \frac{\alpha^2}{\lambda} H\right) & \left(F_o + \frac{\alpha^2}{\lambda} G_o\right) & \left(F_2 + \frac{\alpha^2}{\lambda} G_2\right) & \left(F_4 + \frac{\alpha^2}{\lambda} G_4\right) & \ldots\ldots & \left(F_{2i} + \frac{\alpha^2}{\lambda} G_{2i}\right) \\
\left(F_o + \frac{\alpha^2}{\lambda} G_o\right) & \left(C_{oo} + \frac{\alpha^2}{\lambda} D_{oo}\right) & \left(C_{o2} + \frac{\alpha^2}{\lambda} D_{o2}\right) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \left(C_{o2i} + \frac{\alpha^2}{\lambda} D_{o2i}\right) \\
\left(F_2 + \frac{\alpha^2}{\lambda} G_2\right) & \left(C_{2o} + \frac{\alpha^2}{\lambda} D_{2o}\right) & \left(C_{22} + \frac{\alpha^2}{\lambda} D_{22}\right) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \left(C_{22i} + \frac{\alpha^2}{\lambda} D_{22i}\right) \\
\left(F_4 + \frac{\alpha^2}{\lambda} G_4\right) & \left(C_{4o} + \frac{\alpha^2}{\lambda} D_{4o}\right) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \left(C_{42i} + \frac{\alpha^2}{\lambda} D_{42i}\right) \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
\left(F_{2i} + \frac{\alpha^2}{\lambda} G_{2i}\right) & \left(C_{2io} + \frac{\alpha^2}{\lambda} D_{2io}\right) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \left(C_{2i2i} + \frac{\alpha^2}{\lambda} D_{2i2i}\right)
\end{vmatrix} = 0 \qquad (14)$$

Pri tem so zaradi osne simetrije v nastavku w upoštevani samo sodi členi.

Računski primeri

Najnižja lastna vrednost determinante (14) je rešitev našega problema. V ta namen matriko še nekoliko preuredimo.

$$\begin{vmatrix}
E & F_0 & F_2 & F_4 & \ldots & F_n \\
F_0 & C_{00} & C_{02} & C_{04} & \ldots\ldots & C_{0n} \\
F_2 & C_{20} & C_{22} & C_{24} & \ldots\ldots & C_{2n} \\
F_4 & C_{40} & C_{42} & C_{44} & \ldots\ldots & C_{4n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
F_n & C_{n0} & C_{n2} & C_{n4} & \ldots\ldots & C_{nn}
\end{vmatrix} = \frac{\alpha^2}{\lambda} \begin{vmatrix}
-H & -G_0 & -G_2 & -G_4 & \ldots\ldots & -G_n \\
-G_0 & -D_{00} & -D_{02} & -D_{04} & \ldots\ldots & -D_{0n} \\
-G_2 & -D_{20} & -D_{22} & -D_{24} & \ldots\ldots & -D_{2n} \\
-G_4 & -D_{40} & -D_{42} & -D_{44} & \ldots\ldots & -D_{4n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-G_n & -D_{n0} & -D_{n2} & -D_{n4} & \ldots\ldots & -D_{nn}
\end{vmatrix}$$

Račun je izveden s pomočjo digitalnega računalnika IBM 1130 na računskem centru IMFM. Pri tem smo upoštevali, da se spreminjajo

$$\beta = \frac{a}{b} \text{ od } 0{,}1 \ldots 0{,}4 \text{ s korakom } 0{,}1$$

$$\gamma = \frac{c}{b} \text{ od } 0{,}5 \ldots 1{,}0 \text{ s korakom } 0{,}1$$

$$\lambda = \frac{h_I}{h} \text{ od } 0{,}5 \ldots 1{,}0 \text{ s korakom } 0{,}1$$

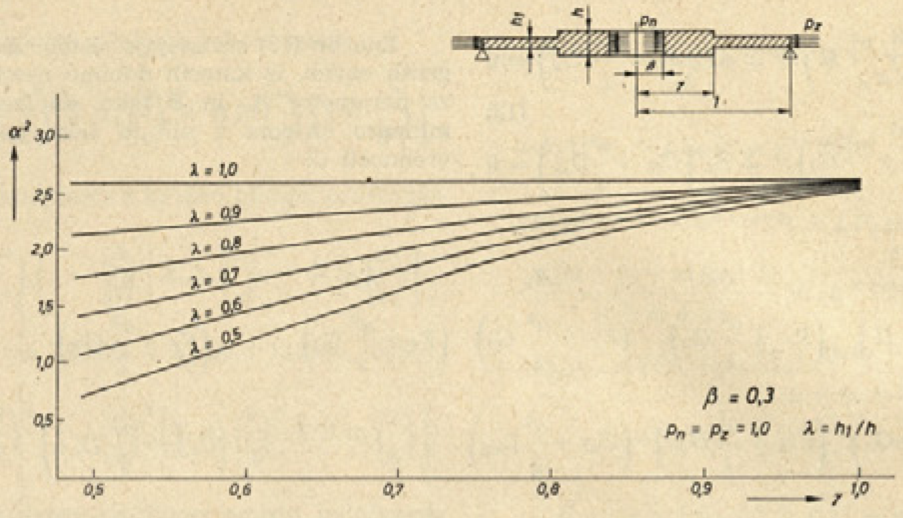
ter

$$p_n = p_z = 1.0$$

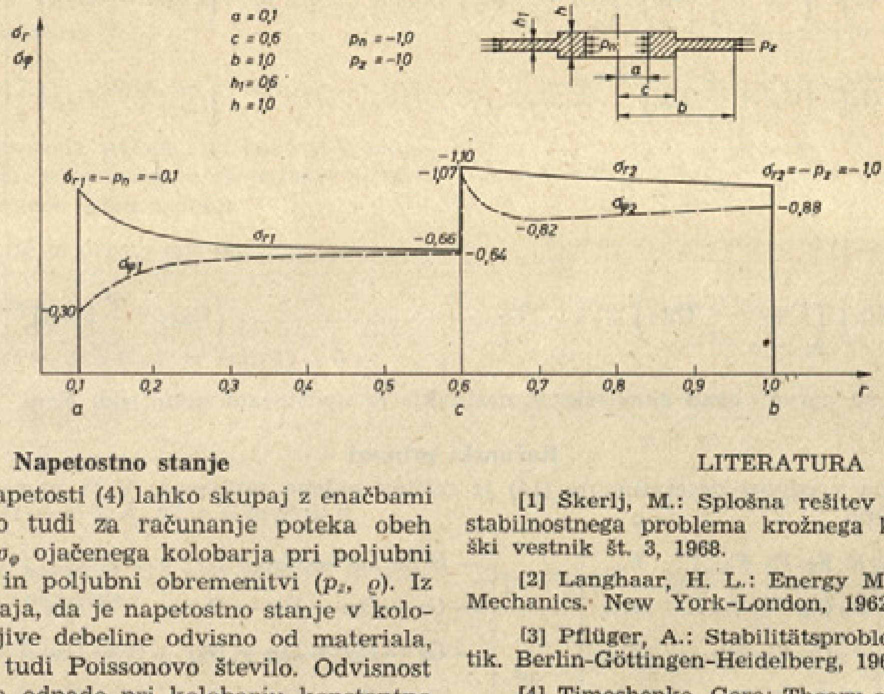
Dobljeni rezultati α^2 so zrisani v diagrame. Eden izmed njih je prikazan na sliki 2.

Kritična obremenitev izhaja iz izraza (10) in znaša

$$N_k = p_z h_I = \alpha^2 \frac{D}{b^2}$$



Slika 2



Slika 3

Napetostno stanje

Izraze za napetosti (4) lahko skupaj z enačbami (5) uporabljamo tudi za računanje poteka obeh napetosti σ_r in σ_φ ojačenega kolobarja pri poljubni obliki (β, γ, λ) in poljubni obremenitvi (p_z, ϱ). Iz izraza za W izhaja, da je napetostno stanje v kolobarju spremenljive debeline odvisno od materiala, saj vsebuje W tudi Poissonovo število. Odvisnost od materiala pa odpade pri kolobarju konstantne debeline ($\gamma = 1$, $\lambda = 1$), ker dobimo v tem primeru

$$W = \frac{\beta^2 (1 - \varrho)}{1 - \beta^2}$$

$$A_1 = A_2 = p_z \frac{\varrho \beta^2 - 1}{1 - \beta^2}$$

$$B_1 = B_2 = p_z b^2 \frac{\beta^2 (1 - \varrho)}{1 - \beta^2}$$

Ti izrazi se seveda popolnoma ujemajo z znanimi konstantami za računanje napetosti v kolobarjih konstantne debeline [1].

Na sl. 3 so prikazani rezultati za kolobar s podatki

$$\beta = 0{,}1 \qquad \lambda = 0{,}6$$
$$\gamma = 0{,}6 \qquad \varrho = 1{,}0$$

LITERATURA

[1] Škerlj, M.: Splošna rešitev osno simetričnega stabilnostnega problema krožnega kolobarja. Strojniški vestnik št. 3, 1968.

[2] Langhaar, H. L.: Energy Methods in Applied Mechanics. New York-London, 1962.

[3] Pflüger, A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964.

[4] Timoshenko, Gere: Theory of Elastic Stability. New York-Toronto-London, 1961.

[5] Sen, B.: Vibration of Plates with Reinforced Holes. Journal of Technology No. 2, Vol. VI, 1961, Bengal Engineering College, Calcutta.

[6] Bradan, F.: Določevanje napetostnega stanja krožnega kolobarja z ojačenim notranjim robom. Diplomsko delo, Ljubljana, 1969.

[7] Juhart, K.: Stabilnostni problem kolobarja z ojačenim notranjim robom. Diplomsko delo, Ljubljana, 1970.

[8] Škerlj, M.: Stabilnostni problemi pravokotnih sten z odprtinami. Strojniški vestnik št. 2, 1971.

Avtorjev naslov:
Prof. dr. ing. Marko Škerlj,
Fakulteta za strojništvo
Univerze v Ljubljani