STROJNIŠKI VESTNIK

LETNIK 19 LJUBLJANA, V MARCU 1973 ŠTEVILKA 2

UDK 512.2:624.07

Reševanje enačbe za prenos toplote z metodo končnih elementov

ERVIN PRELOG

1. UVOD

Kadar raziskujemo termoelastične pojave na strojnih delih oziroma napravah, moramo poznati *porazdelitev temperature* po posameznih elementih. Brž ko porazdelitev poznamo, lahko z elastostatičnimi enačbami izračunamo še napetostno in deformacijsko stanje telesa. Takšna pot je vedno mogoča v primerih, kadar potekajo termični procesi relativno počasi, tako da ni potrebno uporabljati vezane termoelastične teorije, temveč je mogoče opisati vse procese s t. im. kvazistatično teorijo [1], [2].

V tem delu hočemo prikazati le reševanje prvega dela termoelastičnih problemov, tj. reševanje *prenosne enačbe*. Ker imajo strojni deli različne oblike, je reševanje prenosne enačbe za takšne oblike teles v sklenjeni matematični obliki zelo zamotano ali pa sploh ni rešljivo, tako da je treba posegati po numeričnih metodah. Tu sta diferenčna metoda [1] in metoda *končnih elementov* posebno uporabni [3]. Poslednja metoda, ki se je razvila z uveljavljanjem elektronskih računalnikov velikih zmogljivosti, daje predvsem dve prednosti nasproti klasični diferenčni metodi. Z metodo končnih elementov se je mogoče s primerno izbiro oblike končnih elementov zelo dobro prilagoditi poljubno izoblikovani površini telesa. Pri računalnikih velikih zmogljivosti pa je mogoče izoblikovati programe tako, da opravlja pretežni del operacij stroj samostojno z minimalnimi vhodnimi podatki.

2. OSNOVNE ENAČBE

Enačba za prenos toplote za izotropno telo je podana v obliki

$$k\,\Delta T + Q = c\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.1}$$

V tej enačbi je T temperatura telesa, ki je funkcija kraja na telesu in časa, torej

$$T = T(x, y, z, t) \tag{2.2}$$

Q je količina notranje generacije toplote na enoto volumna. Lahko pa je ta veličina odvisna tudi od temperature telesa. Takšne prenosne pojave bomo prikazali v posebnem poglavju. Koeficient k je koeficient konduktivnosti. Če označimo z ϱ gostoto telesa in s c_v specifično toploto, je

$$c = \varrho c_v \tag{2.3}$$

Enačba (2.1) velja za nestacionarno stanje telesa. Za stacionarne pojave dobimo

$$k\,\Delta T + Q = 0 \tag{2.4}$$

Tu pa je temperatura T le funkcija kraja.

Prenosno enačbo (2.1) je treba rešiti z upoštevanjem začetnega stanja in robnih pogojev. Za prakso so pomembni naslednji trije robni pogoji:

a) na površini telesa je predpisana temperatura

$$T = T(x_k, y_k, z_k, t) \tag{2.5}$$

b) na površini je predpisan fluks toplote

$$k\frac{\partial T}{\partial n} = q(x_k, y_k, z_k, t) \tag{2.6}$$

Tu je q fluks toplote, n pa normala na površino telesa, usmerjena od površine navzven.

Poseben primer robnega pogoja (2.6) je popolna izolacija površine, tedaj je

$$k\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \tag{2.7}$$

c) na površini je predpisana linearna konvekcija, torej

$$k\frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_o) \tag{2.8}$$

V tej enačbi je T_o temperatura okolice, T temperatura na površini telesa, h pa relativni (površinski) koeficient prevodnosti. Kadar gre relativni koeficient proti nič, dobimo enačbo (2.7), tj. popolno izolacijo, kadar pa se ta koeficient približuje neskončnosti, pa imamo robni problem (2.5), torej predpisano temperaturo na površini.

3. VARIACIJSKI PROBLEM

Enačbo (2.1) bomo lahko obravnavali z metodo končnih elementov, če prevedemo prenosno enačbo na variacijski problem [3], [4].

Znano je, da je mogoče k diferencialni enačbi (2.1) prirediti funkcional, katerega minimum je rešitev istega problema [4].

Če uporabimo Eulerjev teorem, ki pove, da zadošča minimum funkcionala oblike

$$I = \iiint F\left(x, y, z, T, \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \tag{3.1}$$

diferencialni enačbi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)}\right) - \frac{\partial F}{\partial T} = 0 \tag{3.2}$$

tedaj izberemo funkcional k enačbi (2.1) v obliki

$$I = \iiint \left\{\frac{1}{2}\left[k_x\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + k_y\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + k_z\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right] - \right.$$
$$\left. - \left(Q - c\frac{\partial T}{\partial t}\right) T\right\} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \tag{3.4}$$

Če izvedemo operacije, ki so podane v enačbi (3.2), dobimo za funkcional (3.4)

$$\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)} = \frac{1}{2} k_x \,.\, 2\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)} = \frac{1}{2} k_y \,.\, 2\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)} = \frac{1}{2} k_z \,.\, 2\frac{\partial T}{\partial y}$$

in

$$\frac{\partial F}{\partial T} = + \left(Q - c\frac{\partial T}{\partial t}\right)$$

Ko vstavimo te vrednosti v enačbo (3.2), izhaja

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) + Q - c\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{3.5}$$

Ta enačba se ujema z enačbo (2.1). Dopolnjena je le toliko, da smo upoštevali tudi spreminjanje koeficienta k v smeri x, y, z in s tem posplošili enačbo (2.1) tudi na anizotropni material.

Kadar je (izotropni material)

$$k = k_x = k_y = k_z$$

dobimo popolno ujemanje enačbe (3.5) z enačbo (2.1). Funkcional (3.4) bo potrebno dopolniti na tistih mestih površine telesa, kjer so predpisani robni pogoji (2.6) oz. (2.8). Ta postopek bomo prikazali pozneje [4].

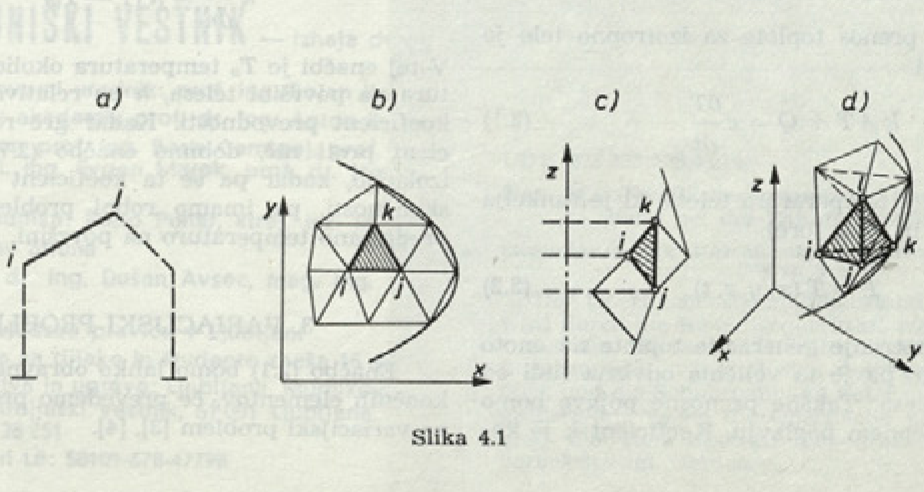
Minimum funkcionala, torej

$$\frac{\partial I}{\partial T} = 0 \tag{3.6}$$

pomeni slednjič rešitev problema (2.1) — seveda, če upoštevamo še robne pogoje (2.6) oz. (2.8).

4. KONČNI ELEMENTI, INTERPOLACIJSKA MATRIKA

Kakor smo naglasili že v uvodu, bomo reševali prenosni problem, ki je postavljen z enačbo (3.6), z metodo končnih elementov. Kadar izbiramo to numerično metodo, razdelimo telo na končne elemente. Ti so pri *linijskih* napravah ravne črte z vozlišči *i, j, k* ... pri *ploskovnih* telesih trikotniki in pravokotniki, pri *rotacijsko simetričnih* telesih rotirajoči trikotnik in pravokotniki, pri *telesih splošnih oblik* pa prizme, kvadri (sl. 4.1). Za končne



Slika 4.1

elemente bomo navadno izbirali čim enostavnejše geometrijske like oz. telesa.

Vsak končni element sestoji iz vozlišč ($i, j, k, \ldots$) in *polja*, ki zavzame prostor znotraj končnega elementa. Osnovna zamisel metode končnih elementov je, da izrazimo s t. im. *interpolacijsko matriko* funkcijsko vrednost polja, v našem primeru temperaturo T polja z *vozliščnimi* temperaturami $\varphi_i, \varphi_j, \ldots$ elementa. Nato nastavimo z uporabo enačbe (3.6) sistem enačb, v katerih se pojavljajo neznane vozliščne temperature *vseh* elementov konstrukcije. Ko nastali sistem enačb rešimo z znanimi metodami, dobimo vse vozliščne temperature $\varphi_i, \varphi_j, \ldots$, iz teh pa temperaturo v poljubni točki elementa.

Ko izbiramo oblike končnih elementov, ki imajo majhne, vendar še vedno končne dimenzije, smemo *predpostaviti*, da se temperatura spreminja po polju elementa *linearno*. Seveda je mogoča tudi drugačna predpostavka (kvadratna, kubična parabola), ki bi morda bolje ustrezala realnemu spreminjanju temperature po elementu. Vendar nas že takšna približna predpostavka privede do rezultatov, ki so za številne primere povsem uporabni, postopek sam pa se zaradi tega bistveno poenostavi.

Pri linearnem spreminjanju temperature po elementu (v prostoru), bomo pisali

$$T = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z \tag{4.1}$$

Sedaj moramo konstante c_i izbrati tako, da zavzame temperatura T v vozliščih $i, j, k \ldots$ elementa vozliščne vrednosti temperature $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k \ldots$ Takšno prilagajanje enačbe (4.1) *vozliščnim* pogojem poteka takole:

Enačbo (4.1) zapišemo v matričnem zapisu, pa je

$$T = [1, x, y, z] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

ali splošno

$$T = [a]\{c\} \tag{4.3}$$

Matriko $[a]$ bomo imenovali poljska matrika. Sedaj vstavljamo v enačbo (4.3) po vrsti temperature vozlišč φ_i, φ_j, za matriko $[a]$ pa ustrezne koordinate vozlišč. Tako je npr. za element, ki bi imel vozlišča i, j, k, l

$$\begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \\ \varphi_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

ali splošno

$$\{\varphi\}_e = [a^k]\{c\} \tag{4.5}$$

Z indeksom e bomo opozorili, da upoštevamo *vsa* vozlišča poljubnega elementa e. Primer (4.4) kaže, da je matrika $[a^k]$ kvadratna matrika, tako da smemo enačbo (4.5) invertirati, kar da že iskane konstante, torej

$$\{c\} = [a^k]^{-1}\{\varphi\}_e \tag{4.6}$$

Takšna operacija je vedno izvedljiva, kadar izbiramo enačbo (4.3) tako, da je število elementov matrike $\{c\}$ enako številu vozliščnih elementov matrike $\{\varphi\}_e$. Takšne elemente imenujemo kompatibilne. V nadaljevanju bomo imeli pri izbiri elementov v mislih le takšne primere. Število komponent matrike $\{\varphi\}_e$ bomo včasih imenovali tudi število *prostostnih stopenj* končnega elementa.

Sedaj vstavljamo enačbo (4.6) v (4.3) pa dobimo

$$T = [a][a^k]^{-1} \cdot \{\varphi\}_e \tag{4.7}$$

ali krajše

$$T = [b]\{\varphi\}_e \tag{4.8}$$

Matriko

$$[b] = [a][a^k]^{-1} \tag{4.9}$$

imenujemo *interpolacijsko matriko* končnega elementa. Elementi te matrike, ki je po redu $1 \times p$, kadar ima element p prostorskih stopenj, so zaradi supozicije (4.1) *linearne* funkcije kraja (x, y, z) in funkcije vozliščnih koordinat $(x_i, y_i, z_i, \ldots)$.

Interpolacijska matrika je osnovnega pomena za nadaljnji postopek. Ko namreč to vrednost poznamo, je nadaljnji računski postopek za vse vrste elementov enak. V praksi izbiramo za celotno konstrukcijo, kjer je to le mogoče, isti tip končnega elementa, čeprav to ni neogibno potrebno, ker takšna obravnava poenostavlja računski postopek.

Z enačbo (4.8) je podana porazdelitev temperature po elementu v odvisnosti od vozliščnih temperatur.

Interpolacijsko matriko, ki je po redu $1 \times p$, lahko pišemo še v obliki

$$[b] = [b_i, b_j, b_k \ldots b_p] \tag{4.10}$$

Zato je širši zapis za enačbo (4.8) tudi

$$T = [b_i, b_j, b_k, \ldots b_p] \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \\ \vdots \\ \varphi_p \end{Bmatrix} \tag{4.11}$$

5. ENAČBA ELEMENTA

Kakor smo že povedali, rešujemo prenosni problem z enačbo (3.6). Zapišimo to enačbo za poljubni element e. Tako je enačba (3.6)

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial I}{\partial \varphi_i} \\ \dfrac{\partial I}{\partial \varphi_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial I}{\partial \varphi_p} \end{Bmatrix}_e = 0 \qquad (5.1)$$

za končni element, ki ima p vozlišč.

Izračunajmo sedaj posamezne odvode enačbe (5.1). Za vrsto i, ko enačbo (3.4) odvajamo, dobimo

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi_i} = \iiint \left[k_x \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) + k_z \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) - \left(Q - c\frac{\partial T}{\partial t}\right)\frac{\partial T}{\partial \varphi_i}\right] dx\, dy\, dz \qquad (5.2)$$

Če upoštevamo enačbo (4.8) oz. (4.12), dobimo sedaj

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[b]\{\varphi\}_e = \frac{\partial [b]}{\partial x} . \{\varphi\}_e + [b_x]\{\varphi\}_e \qquad (5.3)$$

kjer smo označili odvod

$$\frac{\partial [b]}{\partial x} = [b_x] = [b_{ix}, b_{jx}, \ldots b_{px}] \qquad (5.4)$$

dalje je

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}[b_x]\{\varphi\}_e =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varphi_i}[b_{ix}, b_{iy}, \ldots b_{px}] \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_p \end{Bmatrix} = b_{ix} \qquad (5.5)$$

Podobne izraze dobimo za ostala odvoda.

Dalje je še

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}[b]\{\varphi\}_e = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}[b_i, b_j, \ldots b_p] \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_p \end{Bmatrix} = b_i \qquad (5.6)$$

in

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[b]\{\varphi\}_e = [b]\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\}_e \qquad (5.7)$$

Ko vstavljamo dobljene odvode v enačbo (5.2), dobimo

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi_i} = \iiint (k_x [b_x]\{\varphi\}_e . b_{ix} + k_y [b_y]\{\varphi\}_e . b_{iy} + k_z [b_z]\{\varphi\}_e\, b_{iz})\, dx\, dy\, dz -$$

$$- \iiint Q\, b_i\, dx\, dy\, dz + \iiint c\,[b]\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\}_e . b_i\, dx\, dy\, dz \qquad (5.8)$$

Podobne izraze dobimo za ostala vozlišča.

Sedaj združimo vsa vozlišča elementa e v skupno matriko, posamezni integrali pa dajo

$$\iiint \left(k_x \begin{bmatrix} [b_x]\, b_{ix} \\ [b_x]\, b_{jx} \\ \vdots \\ [b_x]\, b_{px} \end{bmatrix} + k_y \begin{bmatrix} [b_y]\, b_{iy} \\ [b_y]\, b_{jy} \\ \vdots \\ [b_y]\, b_{py} \end{bmatrix} + k_z \begin{bmatrix} [b_z]\, b_{iz} \\ [b_z]\, b_{jz} \\ \vdots \\ [b_z]\, b_{pz} \end{bmatrix} \right) dx\, dy\, dz . \{\varphi\}_e -$$

$$- \iiint Q \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} . dx\, dy\, dz +$$

$$+ \iiint c \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} [b]\, dx\, dy\, dz \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\}_e = 0 \qquad (5,9)$$

Krajše bomo zapisali posamezne integrale v obliki

$$[h]_e \{\varphi\}_e + \{f\}_e + [p]_e \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\}_e = 0 \qquad (5,10)$$

Dobljena enačba se imenuje *enačba elementa.* Integrale zgornje enačbe izračunamo za vsak tip elementa enkrat za vselej. Matrika $[h]_e$ — imenovana tudi *koordinatna matrika elementa* — je vedno kvadratna, reda $p \times p$, kar ima element p vozlišč. Torej

$$[h]_e = \begin{bmatrix} h_{ii}, h_{ij}, \ldots h_{ip} \\ h_{ji}, h_{jj}, \ldots h_{jp} \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{pi}, h_{pj}, \ldots h_{pp} \end{bmatrix} \qquad (5.11)$$

Ta matrika je tudi simetrična, torej je

$$h_{ij} = h_{ji} \qquad (5.12)$$

Podobno je grajena matrika $[p]_e$

$$[p]_e = \iiint c\,[b]^T\,[b]\,dx\,dy\,dz = \begin{bmatrix} p_{ii}, p_{ij} \ldots p_{ip} \\ p_{ji}, p_{jj} \ldots p_{jp} \\ p_{pi}, p_{pj} \ldots p_{pp} \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

Preostale matrike so reda $1 \times p$, in je

$$\{f\}_e = -\iiint Q \,.\, [b]^T\,dx\,dy\,dz \tag{5.14}$$

$$\{\varphi\}_e = \{\varphi_i, \varphi_j, \ldots \varphi_p\}^T \tag{5.15}$$

$$\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}_e = \left\{\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}, \frac{\partial\varphi_j}{\partial t}, \ldots \frac{\partial\varphi_p}{\partial t}\right\}^T \tag{5.16}$$

Poslednji matriki smo zaradi lažje pisave pisali v transponirani obliki.

Za stacionarne probleme se enačba (5.10) poenostavi v obliko

$$[h]_e\,\{\varphi\}_e + \{f\}_e = 0 \tag{5.17}$$

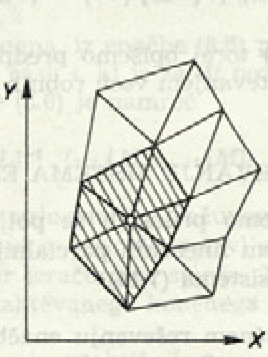
Pri problemih brez notranje generacije toplote pa celo v obliko

$$[h]_e\,\{\varphi\}_e = 0 \tag{5.18}$$

6. ENAČBA SISTEMA

Kadar zapišemo enačbo (5.10) za vse elemente sistema in jih med seboj združimo tako, da superponiramo elemente posameznih matrik, ki pripadajo *skupnemu vozlišču* (sl. 6.1), dobimo enačbo sistema:

$$[H]\,\{\Phi\} + [P]\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right\} + \{F\} = 0 \tag{6.1}$$



Slika 6.1

Matrike $\{\Phi\}$, $\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right\}$ in $\{F\}$ so zopet enokolonske. Kadar ima celotni sistem n vozlišč, so po redu $1 \times n$.

Matriki $[H]$ in $[P]$ pa sta zopet kvadratni matriki reda $n \times n$. Tako je npr.

$$[H] = \begin{bmatrix} H_{ii}, H_{ij}, H_{ik}, \ldots H_{in} \\ H_{ji}, H_{jj}, H_{jk}, \ldots H_{jn} \\ \vdots \\ H_{ni}, H_{nj}, H_{nk}, \ldots H_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

$$\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \vdots \\ \Phi_n \end{Bmatrix} \text{ itd.} \tag{6.3}$$

Enačbe (6.1) pomenijo sistem n linearnih diferencialnih enačb, ki jih je treba rešiti z upoštevanjem začetnega in robnih pogojev. Preden bomo opisali numerično rešitev sistema (6.1), si oglejmo še, kako upoštevamo robne pogoje.

7. ROBNI POGOJI

Prenosni problem (6.1) bo rešen šele tedaj, ko bomo upoštevali robne pogoje. Pri robnih pogojih bomo morali posebej obravnavati pogoj (2.5), torej primer, ko je predpisana temperatura od primera (2.6) in (2.8), ki obravnavata predpisani fluks na površini oziroma konvekcijo.

7.1. Na površini je predpisana temperatura

Upoštevanje tega robnega pogoja v enačbi (6.1) je preprosto. Ker so pri tem pogoju *predpisane* temperature v določenih vozliščih elementov na površini telesa, so v enačbi (6.1) vsi φ_r, ki pripadajo tem točkam, znani. Zato je treba iz enačbe (5.1) izločiti vrstice, ki pripadajo tem točkam. To naredimo npr. tako, da *parcioniramo* matrično enačbo (6.1). Če je pri n vozliščih r vozliščnih temperatur znanih, m pa še neznanih, torej če je

$$m = n - r$$

parcioniramo enačbo (6.1) po pravilu

$$\begin{bmatrix} [H_{mn}]\,[H_{mr}] \\ [H_{rm}]\,[H_{rr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Phi_m\} \\ \{\Phi_r\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [P_{mn}]\;[P_{mr}] \\ [P_{rm}]\;[P_{rr}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}\right\} \\ \left\{\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\right\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F_m\} \\ \{F_r\} \end{Bmatrix} = 0 \tag{7.1}$$

Parcioniranje smo izvedli tako, da smo združili vse neznane temperature vozlišč v matriko $\{\Phi_m\}$, vse znane pa v matriko $\{\Phi_r\}$.

Če upoštevamo, da je

$$\left\{\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\right\} = 0 \tag{7.2}$$

saj so navadno temperature v predpisanih točkah časovno nespremenljive, dobimo iz enačbe (7.1)

$$[H_{mm}]\{\Phi_m\} + [H_{mr}]\{\Phi_r\} + [P_{mm}]\left\{\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}\right\} + + \{F_m\} = 0 \qquad (7.2)$$

oziroma ko združimo znane vrednosti v matriko

$$\{E_m\} = [H_{mr}]\{\Phi_r\} + \{F_m\} \qquad (7.3)$$

dobimo

$$[H_{mm}]\{\Phi_m\} + [P_{mm}]\left\{\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}\right\} + \{E_m\} = 0 \qquad (7.4)$$

Enačba (7.4) je povsem podobna enačbi (6.1), le da je njen red za r enačb nižji. Reševanje enačbe (7.4) bo torej potekalo povsem enako kakor reševanje enačbe (6.1), le da je število neznank še samo m. Kadar rešujemo celotni problem z računalnikom, se ta izločitev ne izplača, temveč uporabimo poseben numerični postopek, o katerem bomo govorili pri opisovanju programiranja.

7.2. Na površini je predpisan fluks oziroma konvekcija

Robna pogoja (2.6) in (2.8) bomo združili v skupno enačbo, tako dobimo

$$k\frac{\partial T}{\partial n} + q + h(T - T_o) = 0 \qquad (7.5)$$

V poglavju (3) smo že opozorili, da je treba funkcional (3.4) za robne pogoje, ki jih podaja enačba (7.5), dopolniti z izrazom [4]

$$I' = \iint_A q\,T\,\mathrm{d}A + \iint_A \tfrac{1}{2}h(T - T_o)^2\,\mathrm{d}A \qquad (7.6)$$

Za točke na površini pišemo *dodatno* k enačbi (5.2) še izraz

$$\frac{\partial J'}{\partial \varphi_s} = \iint q\frac{\partial T}{\partial \varphi_s}\mathrm{d}A + \iint h(T - T_o)\frac{\partial T}{\partial \varphi_s}\mathrm{d}A \qquad (7.7)$$

tako, da je za vsako točko na površini variacija funkcionala

$$\frac{\partial J}{\partial \varphi_s} + \frac{\partial J'}{\partial \varphi_s} = 0 \qquad (7.8)$$

Za vse točke na konturi celotnega sistema bi dobili po združitvi vseh enačb (7.7) matriko

$$\left\{\frac{\partial I'}{\partial \varphi_s}\right\} = [G]_s\{\Phi\}_s + \{I\}_s \qquad (7.9)$$

Ko dodamo ta del k enačbi sistema (5.1), dobimo enačbo

$$[H]\{\Phi\} + [P]\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\} + [G]\{\Phi\} + \{I\} + \{F\} = 0 \qquad (7.10)$$

Ta enačba vključuje vse robne pogoje. Matriki $[G]$ in $\{I\}$ imata enak red kakor matrika $[H]$ oz. $\{\Phi\}$, le da imajo elementi za tiste točke, ki ležijo znotraj konture ali — kjer niso predpisani zgornji robni pogoji — same ničle.

Če združimo

$$[H] + [G] = [\overline{H}] \qquad (7.11)$$

$$\{I\} + \{F\} = \{\overline{F}\} \qquad (7.12)$$

dobi enačba (7.10) zopet obliko

$$[\overline{H}]\{\Phi\} + [P]\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\} + \{\overline{F}\} = 0 \qquad (7.13)$$

Ta enačba pomeni zopet sistem linearnih diferencialnih enačb, ki so grajene povsem analogno kakor enačba (6.1), le da so matrike $[\overline{H}]$ in $\{\overline{F}\}$ dopolnjene z elementi, ki izhajajo iz robnih pogojev.

Ker vsebuje enačba (7.13) še morebitne točke na površini konture, kjer je predpisana temperatura, lahko s parcioniranjem te točke izločimo, nakar dobimo podobno kakor pri enačbi (7.4) enačbo

$$[\overline{H}_{mm}]\{\Phi_m\} + [P_{mm}]\left\{\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}\right\} + \{\overline{E}_m\} = 0 \qquad (7.14)$$

kjer je sedaj

$$\{\overline{E}_m\} = [\overline{H}_{mr}]\{\Phi_r\} + \{\overline{F}_m\} \qquad (7.15)$$

Z enačbo (7.14) torej opišemo predpisani prenosni problem z upoštevanjem vseh robnih pogojev.

8. REŠEVANJE SISTEMA ENAČB

Slednjič bomo prikazali še pot, kako je mogoče rešiti sistem linearnih parcialnih enačb, ki ga podaja enačba sistema (7.14).

Pri numeričnem reševanju enačbe (7.14) lahko uporabimo diferenčno metodo z uporabo t. im. desnih diferenc [5], lahko pa uporabimo tudi naslednjo pot: suponirajmo, da se v časovnem intervalu Δt spreminja $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ linearno, pa lahko pišemo

$$\{\Phi\}_t = \{\Phi\}_{t-\Delta t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t-\Delta t} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_t\right)\cdot \Delta t \qquad (8.1)$$

Iz te enačbe izhaja

$$\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\}_t = -\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\}_{t-\Delta t} + \frac{2}{\Delta t}(\{\Phi\}_t - \{\Phi\}_{t-\Delta t}) \quad (8.2)$$

Vstavimo ta izraz v enačbo (7.14) in opustimo pri pisanju matrik indeks m, pa je

$$[\overline{H}]\{\Phi\}_t + [P]\left(-\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\}_{t-\Delta t} + \frac{2}{\Delta t}(\{\Phi\}_t - \{\Phi\}_{t-\Delta t})\right) + \{\overline{E}\} = 0$$

Po ureditvi je

$$\left([\overline{H}] + \frac{2}{\Delta t}[P]\right)\{\Phi\}_t - [P]\left(\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\}_{t-\Delta t} + \frac{2}{\Delta t}\{\Phi\}_{t-\Delta t}\right) + \{\overline{E}\} = 0 \quad (8.3)$$

Če pišemo krajše

$$[L] = [\overline{H}] + \frac{2}{\Delta t}[P] \quad (8.4)$$

$$\{M\}_{t-\Delta t}[M]_{t-\Delta t} = -[P]\left(\frac{2}{\Delta t}\{\Phi\}_{t-\Delta t} + \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\}_{t-\Delta t}\right) \quad (8.5)$$

dobi enačba (8.3) obliko

$$[L]\{\Phi\}_t + \{M\}_{t-\Delta t}[M]_{t-\Delta t} + \{\overline{E}\} = 0 \quad (8.6)$$

Ker je *začetno stanje* predpisano, sta izraza

$$\{\Phi\}_{t-\Delta t} \quad \text{in} \quad \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\}_{t-\Delta t}$$

v času $t - \Delta t$ znana, iz enačbe (8.6) pa lahko izračunamo stanje v času t, ki je za Δt poznejše. Po invertiranju enačbe (8.6) je namreč

$$\{\Phi\}_t = [L]^{-1} \cdot (-\{M\}_{t-\Delta t}[M]_{t-\Delta t} + \{\overline{E}\}) \quad (8.7)$$

Ko je to stanje znano, izračunamo z isto enačbo naslednje stanje s tem, da vstavljamo za matriko $[L]_{t-\Delta t}$ pravkar izračunano stanje. Ta postopek ponavljamo do zahtevanega končnega stanja.

Pri računanju praktičnih primerov je navadno porazdelitev temperature v času $t = 0$ znana. V tem primeru lahko iz enačbe (7.14) (pišemo jo brez indeksa m!), torej iz enačbe

$$[\overline{H}]\{\Phi\}_{t=0} + [P]\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\}_{t=0} + \{\overline{E}\} = 0$$

že izračunamo

$$-[P]\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right\}_{t=0} = [\overline{H}]\{\Phi\}_{t=0} + \{\overline{E}\} \quad (8.8)$$

kar vstavljamo v enačbo (8.3) oz. (8.6) in izračunamo stanje v naslednjem času.

9. REŠEVANJE STACIONARNIH PROBLEMOV

Za stacionarne probleme dobi enačba (7.14) preprostejšo obliko, namreč

$$[\overline{H}_{mm}]\{\Phi_m\} + \{\overline{E}_m\} = 0 \quad (9.1)$$

Iz te enačbe izhajajo takoj iskane temperature v vseh vozliščih sistema. Po invertiranju enačbe (9.1) je torej iskana temperatura vozlišč

$$\{\Phi\} = -[\overline{H}_{mm}]^{-1}\{\overline{E}_m\} \quad (9.2)$$

z enačbo (4.8) pa dobimo še temperaturo v poljubni točki posameznega elementa.

10. SKLEP

V zajetih poglavjih je prikazan teoretični del reševanja prenosnih problemov po metodi končnih elementov. Spoznali smo, da je metoda zelo splošna, saj omogoča ne samo reševanje prenosnih problemov za splošne oblike teles, ampak je mogoče spreminjati tudi vse pojavljajoče se termoelastične konstante (k, h) ter upoštevati najsplošnejše robne pogoje.

V delu [5], ki je v pripravi, bo prikazana tudi uporaba teh enačb za konkretne ravninske, rotacijsko simetrične ter prostorske probleme. Na vpogled bodo tudi rešitve za procese ogrevanja in ohlajevanja na ploskvah in podobni problemi, ki so vezani na prenosno enačbo. Ta čas je v pripravi tudi na Fakulteti za strojništvo program za IBM 1130, ki bo omogočal reševanje teh problemov z minimalnimi vhodnimi podatki.

LITERATURA

1. E. Prelog, Elasto- in plastomehanika, Univerzitetna založba, Ljubljana 1972.
2. B. A. Boley, J. H. Weiner, Theory of Thermal Stresses, John Wiley & Sohns, New York 1960.
3. O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung, The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, 1968.
4. V. I. Smirnov, Kurs višei matematiki, tom IV, Gosudarstvenoe izdajateljstvo. Moskva 1958.
5. E. Prelog, Reševanje prenosnih problemov z metodo končnih elementov, Univerzitetna založba, v tisku.

Avtorjev naslov:

prof. dr. ing. Ervin Prelog,
Fakulteta za strojništvo
Univerze v Ljubljani