

UDK 621.833.2

Oblike dotikalnih ploskev med zobmi pri stožčastih zobnikih z ločnimi zobmi*

PAVLE ŠMARČAN

1.0. Uvod

Za vse obdelovalne postopke zobčanja stožčastih zobnikov z ločnimi zobmi je značilno, da ne dajejo zobnih bokov, ki bi imeli teoretično natančne bočne linije. Povedano tudi drugače: dotikalni bočni liniji zobnega boka na gonilnem in gnanim zobniku nista enaki. Ker pa lahko kombiniramo samo konveksni bok s konkavnim nasprotnim bokom, je prvi bok izdelan vedno z manjšimi, drugi pa z večjimi krivinskimi polmeri, čeprav naj bi bili krivini teoretično enaki (sl. 1).

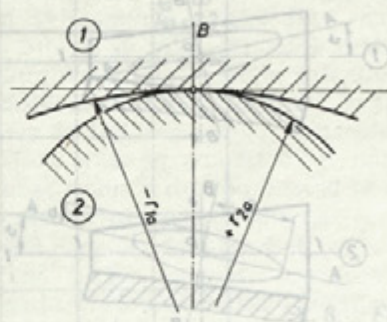
Če prerežemo zob spiralnega stožčastega zobnika normalno na bok po višini zoba (sl. 2), dobimo profil, za katerega pogosto uporabljamo izraz evolventa oziroma evolventa na krogli. Dejansko pa je to neka druga krivulja, pri kateri je lahko odstop od evolvente zanemarljivo majhen. Vendar imata oba profila, ki se dotikata, konveksni krivulji — za razliko od vzdolžnega prereza, kjer se dotikata konkavna in konveksna krivulja.

Če se ubirajo zobje takih dveh zobnikov brez obremenitve, je dotikališče dveh zobnih bokov v točki. Ta točka potuje med obratovanjem teh dveh zobnikov samo po profilu zoba, od ubirne točke na korenu proti vrhu, ali obratno (sl. 3).

Pri obremenjeni zobniški dvojici se zaradi elastične deformacije materiala dotikališče razširi v dotikalno ploskev (sl. 4). V prvem približku lahko primerjamo nastalo dotikalno ploskev z elipso. To drži teoretično vsaj tako dolgo, dokler obravnavamo dotikalno ploskev samo s tistimi štirimi krivinskimi polmeri, ki so lastni dotikalni točki. Krivinski polmeri se po višini zoba precej spreminjajo. V smeri bočne linije zoba pa se ukrivljenost ne spreminja, ali pa le zelo malo pri zobnikih, kjer so bočne linije zob na osnovnem planem zobniku krožni loki. Te spremembe krivinskih polmerov seveda povzročajo, da se teoretična dotikalna ploskev v obliki elipse več ali manj izmaliči, ker se na njenem področju dotikajo tudi točke z drugimi ukrivljenostmi, kakršne ima izhodiščno dotikališče.

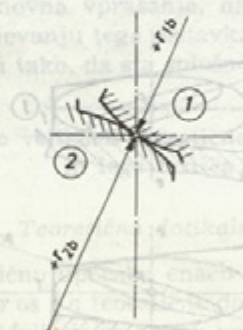
Upoštevati pa moramo še naslednje. Ploskev konkavnega boka je sedlasta (sl. 1), ploskev konveksnega boka nasprotnega zoba 2 pa je elipsoidna.

Praktično so ukrivljenosti bočnih linij zelo majhne. Tudi razlike ukrivljenosti vzdolž bočnih



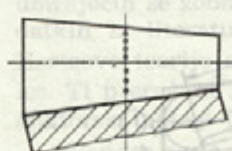
Sl. 1. Prerez vzdolž zoba

1 — gonilni zobnik, 2 — gnani zobnik, B — ravnina glavnih ukrivljenosti bočnih linij

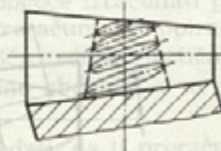


Sl. 2. Prerez zoba pravokotno na bok

1 — gonilni zobnik, 2 — gnani zobnik, A — ravnina glavnih ukrivljenosti profilov



Sl. 3. Ubirne točke na boku zoba



Sl. 4. Dotikalna ploskev na boku zoba

linij so zelo majhne. Po višini zoba pa so ukrivljenosti zelo velike. Glede na to lahko pričakujemo, da bo velika os dotikalne ploskve usmerjena nekam vzdolž zoba.

Normalni prerez zoba spiralno stožčastega zobnika lahko — po Tredgoldu [1] — primerjamo z zobom valjastega zobnika s poševnimi zobmi. Za slednje vemo, da je dotikalna linija med zobema

* Izvleček doktorske naloge.

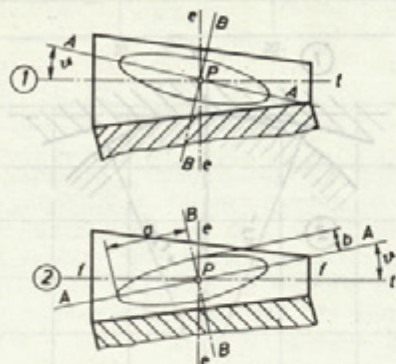
dveh sotekočih zobnikov nagnjena proti vzdolžni liniji zoba za kot ϑ :

$$\tan \vartheta = \tan \beta_0 \cdot \sin \alpha_0 \quad (1)$$

pri čemer pomenita

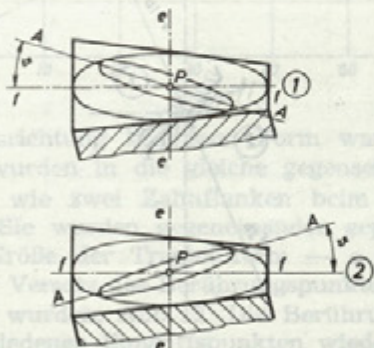
β_0 — nagibni kot bočnih linij,

α_0 — nagibni kot standardnega profila.



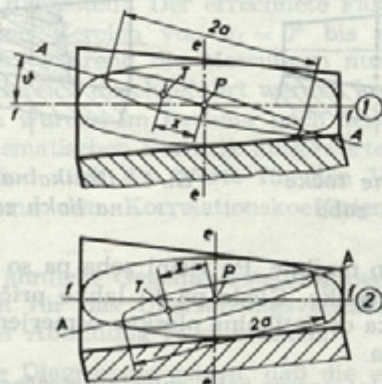
Sl. 5. Dotikalna ploskev — elipsa

1 — gonilni zobnik, 2 — gnani zobnik, t — tvornica plašča razdelnega stožca



Sl. 6. Tuširana nosilna ploskev

1 — gonilni zobnik, 2 — gnani (krožnikasti) zobnik



Sl. 7. Težišče dotikalnih ploskev

1 — gonilni zobnik, 2 — gnani (krožnikasti) zobnik, p — tuširana nosilna ploskev

Zato lahko predpostavljamo, da bo tudi velika os dotikalne ploskve med bokoma sotekočih spiralno stožčastih zobnikov nagnjena proti tvornici plašča razdelnega stožca za kot ϑ , kakor kaže slika 5.

Tudi ravnini glavnih ukrivljenosti skozi izhodiščno dotikalno točko bosta ležali tako, da bo glavna ravnina A — za veliko os elipse — ležala na dotikalni liniji in glavna ravnina B — za malo os elipse — pravokotno na dotikalno linijo (sl. 4).

Področje in velikost dotikalne ploskve pri stožčastih zobnikih s spiralnimi zobmi sta v strokovni literaturi obdelani bolj skopo. Še največ podatkov najdemo v literaturi [2], kjer so obravnavani stožčasti zobniki z ločnimi zobmi. Tam je v uvodu zapisano, da se vse raziskave nanašajo na prerez, ki je pravokoten na sredini širine zoba. Zob je — po Tredgoldu — definiran z valjastim zobnikom s poševnimi zobmi. Dotikalna ploskev je obravnavana precej idealizirano. Obremenitev boka je izbrana tako, da je tuširana ploskev, ki jo pretečejo posamezne dotikalne ploskve eliptične oblike med kotljenjem zoba po zobu, tudi elipsa (sl. 6).

Pri slednji je dolžina velike osi enaka širini zoba, dolžina male osi pa enaka koristni višini zoba. To pomeni, da je zob — glede prilaganja — idealno obremenjen in izkoriščen. Po omenjeni literaturi lahko računamo tetivo te tuširane elipse pod nagibnim kotom ϑ . Nadalje je enačena dolžina te tetive z dolžino $2a$ velike osi trenutne dotikalne elipse (sl. 7). Male osi dotikalne elipse pa po omenjeni literaturi ne moremo računati. Po postopku v tej literaturi tudi ni mogoče dobiti dotikalne eliptične ploskve, ki je posledica dejanske obremenitve, če zob — glede prilaganja — ni idealno obremenjen, ampak premalo oziroma preveč.

Kakor je bilo že omenjeno, je dejanska dotikalna ploskev nekoliko deformirana elipsa, zato ker se ukrivljenosti spreminjajo po višini in včasih tudi vzdolž zoba. To je v literaturi [2] tudi poudarjeno.

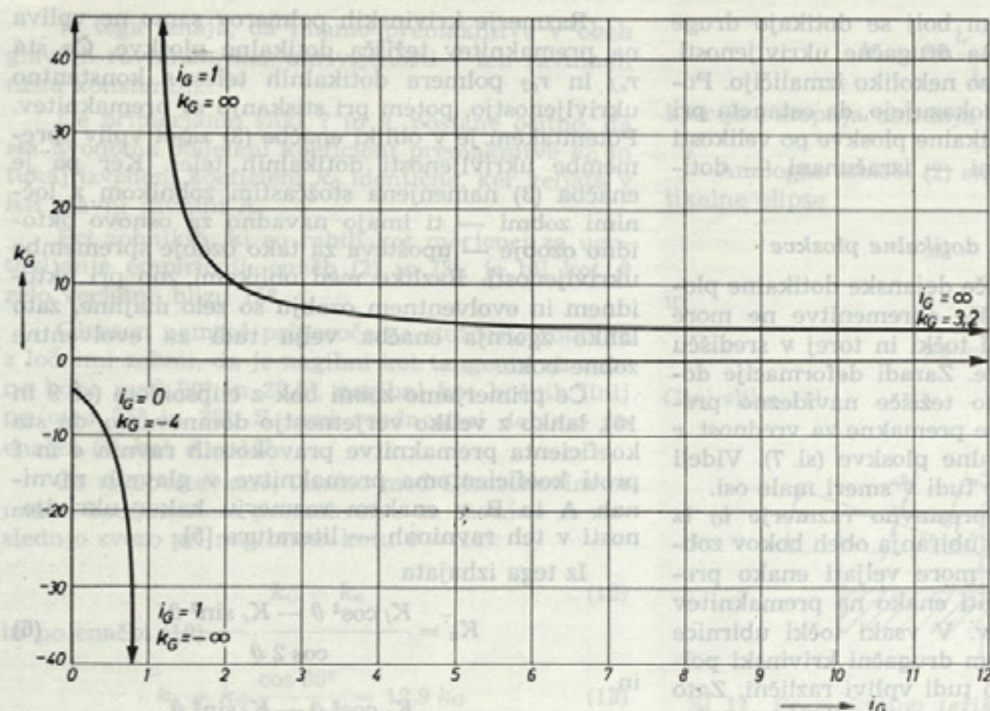
Nadalje je omenjeno, da težišče dotikalne ploskve in s tem težišče obremenitve ni v središču teoretične dotikalne elipse, ampak je premaknjeno za vrednost x (sl. 7) proti manjši vrednosti ukrivljenosti, tj. proti večjemu krivinskemu polmeru zobnega boka gonilnega — malega — zobnika.

Premaknitev x naj bi bila odvisna od dolžine velike osi dotikalne elipse $2a$ in od prestavnega razmerja i_G zobniške dvojice

$$x = \frac{2a}{k_G} \quad (2)$$

$$k_G = \frac{3,2 z_2 + 4 z_1}{z_2 - z_1} = 3,2 \frac{i_G + 1,25}{i_G - 1} \quad (3)$$

$$i_G = \frac{z_2}{z_1}$$



Sl. 8. Faktor premaknitve k_G v odvisnosti od prestavnega razmerja i_G

kjer so

- k_G — faktor premaknitve,
- z_1 — število zob gonilnega zobnika in
- z_2 — število zob gnanega zobnika.

Raziskave, ki so pripeljale do empiričnih enačb (2) in (3), so bile izvedene v laboratorijih G. M. na gonilnikih avtomobilskih prem. Njihova prestavna razmerja i_G so med 4 in 10. V gonilnikih so bile stožčaste zobniške dvojice z ločnimi zobmi izdelane po postopku Gleason.

Če narišemo diagram za faktor premaknitve k_G v odvisnosti od prestavnega razmerja i_G (sl. 8), vidimo, da je faktor premaknitve neskončen za prestavo $i_G = 1$. Iz tega izhaja, da pri tej prestavi ni premaknitve. To je logično le takrat, kadar je dotikališče obeh bokov na kinematičnih krogih. Takrat sta krivinska polmera evolvent obeh dotikajočih se bokov enaka. Ležita pa tako, da je en bok zrcalna slika drugega boka. Premaknitve težišča dotikalne ploskve torej ni in dotikalna ploskev je elipsa.

Po zgornjih enačbah tudi takrat ne dobimo premaknitve pri prestavnem razmerju $i_G = 1$, kadar je dotik bokov zunaj kinematičnih krogov. V tem primeru pri dotiku sodelujeta taki točki obeh bokov, ki nimata enakih ukrivljenosti in bi se zato morala pojaviti premaknitev. Tako je mogoče sklepati, da veljajo zgornje enačbe samo za kinematična kroga.

Nadalje ni razvidno, ali faktor premaknitve velja tudi takrat, kadar dotikalne ploskve po velikosti niso enake idealnemu primeru obremenitve. Odprto je tudi vprašanje stopnje ubiranja.

To so osnovna vprašanja, na katera odgovarjamo v nadaljevanju tega sestavka. Enačbi (2) in (3) sta dopolnjeni tako, da sta splošno veljavni.

2.0. Preračun velikosti teoretične dotikalne elipse in lege težišča

2.01. Teoretična dotikalna elipsa

Za praktično uporabo enačb (2) in (3) moramo poznati veliko os 2a teoretične dotikalne elipse. Pozneje bomo videli, da za dopolnjeno enačbo faktorja premaknitve mora biti znana tudi mala os 2b teoretične dotikalne elipse.

Teoretično dotikalno elipso — veliko in malo os — med bokoma dveh zob pod obremenitvijo ubirajočih se zobnikov je mogoče izračunati po podatkih iz literature [3]. Preračuni se opirajo na Hertzovo teorijo o dotikališču trdnih elastičnih teles. Ti preračuni so natančno obdelani v avtorjevi doktorski nalogi [4].

Vendar se je treba zavedati, da ti preračuni ne upoštevajo dejanskih razmer pri zobnikih. Preračuni upoštevajo le ukrivljenosti začetnega dotikališča, to je dotikališča dveh teles, ki sta valja, kroglji ali elipsoida. Pri zobnih bokih pa imamo opraviti z dotikališčem teles, ki so kombinacije evolventnih in krožnih ploskev. Vedno je mogoče najti ukrivljenosti za začetno dotikališče — pol — in te vrednosti upoštevati za preračun. Dejansko se zaradi obremenitve in elastične deformacije to začetno dotikališče razširi v ploskev, ki bi po preračunu morala biti elipsa, dejansko pa je kapljasto deformirana elipsa. Čim bolj prehaja prvotno točkasto

dotikališče v ploskev, tem bolj se dotikajo druge točke obeh teles, ki imata drugačne ukrivljenosti. Te seveda teoretično elipso nekoliko izmaličijo. Pozneje navedene meritve dokazujejo, da ostaneta pri tem velika in mala os dotikalne ploskve po velikosti praktično enaki teoretični — izračunani — dotikalni elipsi.

2.02. Lega težišča dotikalne ploskve

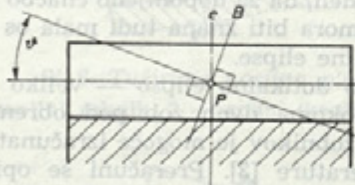
Nakazano je, da težišče dejanske dotikalne ploskve in s tem tudi težišče obremenitve ne more biti v izhodiščni dotikalni točki in torej v središču teoretične dotikalne elipse. Zaradi deformacije dotikalne ploskve, se njeno težišče navidezno premakne. Po literaturi [2] se premakne za vrednost x v smeri velike osi dotikalne ploskve (sl. 7). Videli pa bomo, da se premakne tudi v smeri male osi.

Najprej si oglejmo prestavno razmerje i_G iz enačbe (4). Za vso dolžino ubiranja obeh bokov zobniške dvojice gotovo ne more veljati enako prestavno razmerje in vplivati enako na premaknitev težišča dotikalnih ploskev. V vsaki točki ubirnice so vendar v dotiku povsem drugačni krivinski polmeri evolvente in so zato tudi vplivi različni. Zato je bolje iskati razmerja krivinskih polmerov v dotikalni točki kakor pa vpliv prestavnega razmerja. Samo kadar je stik na kinematičnih krogih, imamo pri valjastih zobnikih izenačeno prestavno razmerje in razmerje dotikalnih krivinskih polmerov.

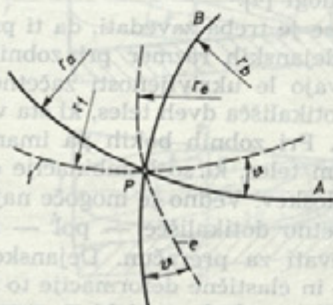
Zaradi tega uvajamo nov pojem »razmerje krivinskih polmerov evolvent i_e « v dotikalni točki

$$i_e = \frac{r_{e2}}{r_{e1}} \quad (5)$$

in ga skušamo uporabiti tam, kjer bi sicer uporabljali izraz i_G .



Sl. 9. Ravnini glavnih ukrivljenosti A in B



Sl. 10. Krivinski polmeri v ravninah glavnih ukrivljenosti

Razmerje krivinskih polmerov samo ne vpliva na premaknitev težišča dotikalne ploskve. Če sta r_{e1} in r_{e2} polmera dotikalnih teles s konstantno ukrivljenostjo, potem pri stiskanju ni premaknitev. Potemtakem je v obliki enačbe (3) zajet vpliv spremembe ukrivljenosti dotikalnih teles. Ker pa je enačba (3) namenjena stožčastim zobnikom z ločnimi zobmi — ti imajo navadno za osnovo oktoidno ozobje — upošteva za tako ozobje spremembo ukrivljenosti. Razlike med oblikami zob pri oktoidnem in evolventnem ozobju so zelo majhne, zato lahko zgornja enačba velja tudi za evolventne zobne boke.

Če primerjamo zobni bok z elipsoidom (sl. 9 in 10), lahko z veliko verjetnostjo domnevamo, da sta koeficienta premaknitve pravokotnih ravnin e in f proti koeficientoma premaknitve v glavnih ravninah A in B v enakem razmerju kakor ukrivljenosti v teh ravninah — literatura [5].

Iz tega izhajata

$$K_a = \frac{K_f \cos^2 \theta - K_e \sin^2 \theta}{\cos 2 \theta} \quad (6)$$

in

$$K_b = \frac{K_e \cos^2 \theta - K_f \sin^2 \theta}{\cos 2 \theta} \quad (7)$$

kjer so

$$K_a = \frac{1}{r_a} \text{ — ukrivljenost v ravnini A,}$$

$$K_b = \frac{1}{r_b} \text{ — ukrivljenost v ravnini B,}$$

$$K_e = \frac{1}{r_e} \text{ — ukrivljenost v ravnini e in}$$

$$K_f = \frac{1}{r_f} \text{ — ukrivljenost v ravnini f.}$$

Smiselni enačbi za koeficienta premaknitve sta naslednji:

$$k_a = \frac{k_f \cos^2 \theta - k_e \sin^2 \theta}{\cos 2 \theta} \quad (8)$$

$$k_b = \frac{k_e \cos^2 \theta - k_f \sin^2 \theta}{\cos 2 \theta} \quad (9)$$

V ravnini f vzdolž zoba imamo praktično vedno konstantne ukrivljenosti. Premaknitve torej ne bo. Pa tudi o koeficientu premaknitve v ravnini f ne moremo govoriti, vsaj ne v enakem smislu, kakor smo to obravnavali o smeri profila zoba. Zato je najboljšje, da vzamemo $k_f = 0$ in to uvrstimo v enačbi (8) in (9). Če upoštevamo absolutno vrednost, dobimo

$$k_a = k_e \frac{\sin^2 \theta}{\cos 2 \theta} \quad (10)$$

in

$$k_b = k_e \frac{\cos^2 \theta}{\cos 2 \theta} \quad (11)$$

Iz tega izhaja, da imamo premaknitve v obeh glavnih ravninah, ker ukrivljenosti v teh ravninah nista konstantni.

Če primerjamo slike 7 in 9, postane očitno, da sta uvodoma obdelani koeficient premaknitve k_G in tukaj izvedeni koeficient k_a identična, ker veljata v isti glavni ravnini A.

Pri zobnikih, ki so rabili kot merjenci za ugotavljanje empiričnih enačb (2) in (3), je bil kot θ zelo verjetno blizu 15° .

Gleason namreč priporoča za stožčaste zobnike z ločnimi zobmi, da je nagibni kot tangente na zobne boke med 20° in $22,5^\circ$, nagibni kot bočnih linij pa med 35° in 38° . S temi vrednostmi dobimo po enačbi (1) kot $\theta = 15^\circ$.

Če to upoštevamo, imamo med Gleasonovim in našim koeficientom premaknitve za ravnino A naslednjo zvezo pri nagibnem kotu $\theta = 15^\circ$:

$$k_G = k_a \quad (12)$$

in po enačbi (10)

$$k_e = k_G \frac{\cos 30^\circ}{\sin^2 15^\circ} = 12,9 k_G \quad (13)$$

ali splošno veljavno z upoštevanjem enačb (3) in (5):

$$k_e = 3,2 \frac{i_e + 1,25}{i_e - 1} 12,9 = 41,3 \frac{i_e + 1,25}{i_e - 1} \quad (14)$$

S to transakcijo smo napravili enačbo (3) splošno veljavno za zobnike z ravnimi zobmi in nagibnim kotom bočnih linij 0° . Za ostale zobnike je treba z nagibnim kotom θ in enačbami (14), (10) in (11) izračunati ustrezne koeficiente premika.

Odprto je ostalo še vprašanje stopnje ubiranja. Tu je bilo nekoliko težje ugotoviti, katere stopnje ubiranja so imeli zobniki, ki so bili osnova za empirično enačbo (3). Pastorki pri gonilnikih avtomobilskih prem po Gleasonu imajo navadno 6 do 10 zob pri prestavnih razmerjih 4 do 10. Če hočemo te zobnike primerjati z valjastimi zobniki z ravnimi zobmi, moramo poiskati nadomestno ozobje. Tako dobimo za gonilnik zobnik 12 do 20 zob in za krožni-kasti zobnik 200 do 300 zob. Po literaturi [6] najdemo za ta razmerja stopnje ubiranja profila od 1,26 do 1,77. Odločitev glede velikosti in vpliva stopnje ubiranja za enačbo (14) bi bila zelo težka, če ne bi imeli na voljo rezultatov naših meritev. Ti so pokazali, da so morali imeti zobniki, ki so rabili za izpeljavo enačbe (3), v poprečju stopnjo ubiranja pri 1,375. To je kar verjetno, ker ima večina avtomobilskih gonilnikov prestavno razmerje okoli 5. Nadalje so rezultati meritev pokazali, da je vpliv stopnje ubiranja na koeficient premaknitve premo sorazmeren velikosti stopnje ubiranja. Glede na to je treba konstanto 41,3 v enačbi (14) ustrezno zmanjšati, ker je v njej zajeta stopnja ubiranja. Dokončna enačba je potem:

$$k_e = 30 \frac{i_e + 1,25}{i_e - 1} \varepsilon \quad (15)$$

kjer je ε stopnja ubiranja profila.

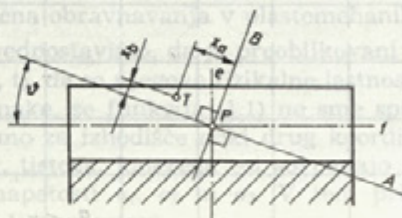
Analogno enačbi (2) sta premaknitvi težišča dotikalne elipse

$$x_a = \frac{2a}{k_a} \quad (16)$$

in

$$x_b = \frac{2b}{k_b} \quad (17)$$

Glej sliko 11!



Sl. 11. Premaknitev težišča dejanske dotikalne ploskve T

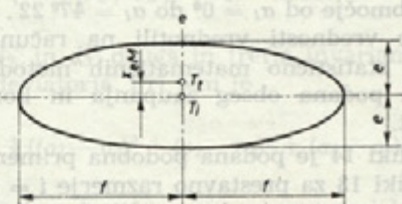
x_a in x_b — pripadajoči koordinati

Pozitivna vrednost premaknitve težišča pomeni premik težišča v smeri večjih krivinskih polmerov na zobnem boku manjšega zobnika v dvojici, negativna vrednost pa premik v smeri manjših krivinskih polmerov na istem zobniku.

Vrednosti v ravnini B literatura [2] ne obravnava, ker jih je z meritvijo skoraj nemogoče določiti. Napravili smo preračun dveh zobniških dvojic in ugotovili, da so vrednosti za mali premer dotikalne elipse zelo majhne, medtem ko so vrednosti za koeficient premaknitve k_b razmeroma velike. Zato dobimo po enačbi (17) zelo majhne vrednosti in jih v praksi z meritvijo ni mogoče določiti.

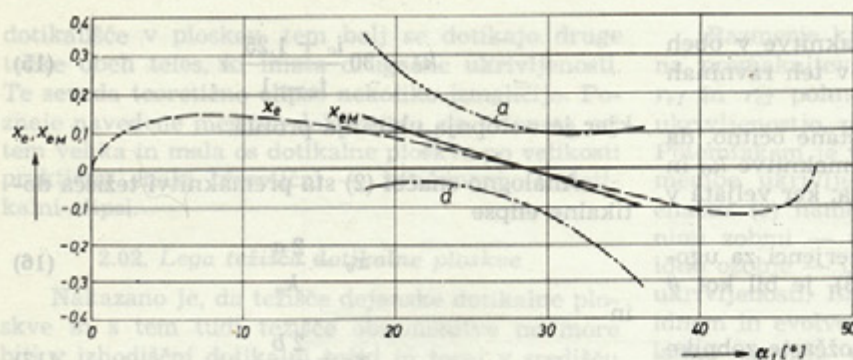
3.0. Primerjava med preračunom in meritvami

V dokaz, da smo pri izvajanju enačbe (15) za koeficient premaknitve težišča ubrali pravilno pot, smo opravili precej obsežne meritve in jih primerjali s preračunom.

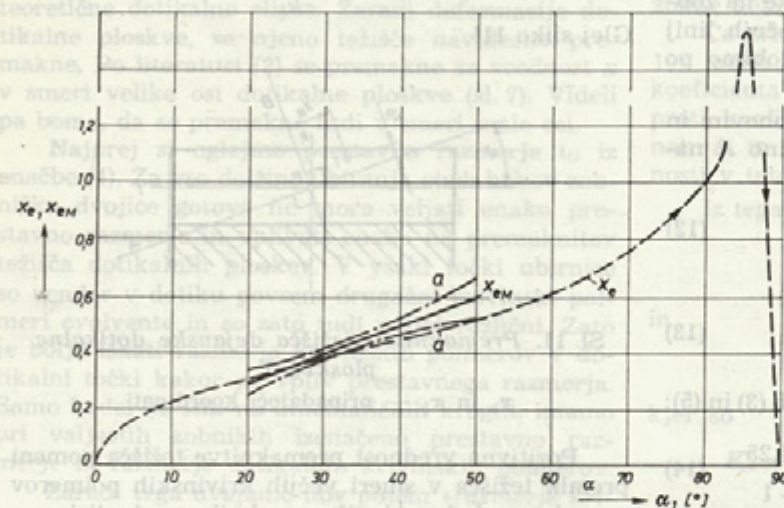


Sl. 12. Odtis dotikalne ploskve z merjenimi veličinami

T_1 — izhodiščna dotikalna točka, T_2 — težišče dotikalne ploskve



Sl. 13. Odmik težišča dotikalne ploskve za zobniško dvojico s prestavnim razmerjem $i = 1$
 x_e — izračunane vrednosti, x_{eM} — izmerjene vrednosti pri korelacijskem faktorju $R = -0,75$, a — območje zaupanja (95 %)



Sl. 14. Odmik težišča dotikalne ploskve za zobniško dvojico s prestavnim razmerjem $i = \infty$
 x_e — izračunane vrednosti, x_{eM} — izmerjene vrednosti pri korelacijskem faktorju $R = -0,94$, a — območje zaupanja (95 %)

Izdelali smo modele, s katerimi smo ponazorili zobne boke valjastih zobnikov z ravnimi zobmi in konveksnimi bočnimi linijami za prestavni razmerji $i = 1$ in $i = \infty$. Te modele smo postavili v medsebojne lege tako, kakor se dva zobna boka med tekom stikata in to za več različnih stičnih točk vzdolž ubirnice. Te točke so ustrezale nagibnim kotom tangente na zobne boke od $19^\circ 30'$ do $34^\circ 30'$ pri prestavnem razmerju $i = 1$ in med $19^\circ 30'$ ter 49° pri prestavnem razmerju $i = \infty$. Modela smo po stiku obremenjevali in merili velikost dotikalne površine — polosi e in f — ter odmik težišča odtisa od izhodiščne dotikalne točke x_e (sl. 12).

V diagramu na sliki 13 je za prestavno razmerje $i = 1$ podana primerjava med izračunanim koeficientom premaknitve x_e in izmerjenim koeficientom x_{eM} . Izračunani koeficient premaknitve je dan za celotno območje od $\alpha_1 = 0^\circ$ do $\alpha_1 = 47^\circ 22'$. Ker smo izmerjene vrednosti vrednotili na računalniku s programi statistično matematičnih metod, sta na diagramu podana obseg zaupanja in korelacijski koeficient.

Na sliki 14 je podana podobna primerjava kakor na sliki 13 za prestavno razmerje $i = \infty$.

Analiza diagramov na slikah 13 in 14 kaže, da se pri obeh prestavnih razmerjih naša teoretična krivulja v območju meritev po smeri in velikosti lepo ujema z meritvami. Meritve nam potrjujejo naša teoretična razglabljanja.

4.0. Sklep

Sklepamo lahko, da je enačba (15) v redu in daje rezultate, ki so uporabni v normalnih območjih natančnosti. Enačba je splošna in velja za vsa evolventna ozobja pri stožčastih zobnikih po vsej višini zobnega boka in tudi za oktoidna ozobja. Ugotoviti je treba le krivinske polmere dotikalne točke r_e , njihovo razmerje i_e in stopnjo ubiranja profila ε .

Enačba (3) pa velja le zelo omejeno pri stožčastih zobnikih z ločnimi zobmi pri nagibnih kotih tangente na zobne boke 20 in $22,5^\circ$ ter nagibnih kotih bočnih linij med 35 in 38° in to le v dotiku na kinematičnih stožcih. Nadalje velja enačba (3) le pri stopnji ubiranja profila ε okoli 1,375, ki se normalno zahteva pri avtomobilskih gonilnikih s stožčastimi zobniki.

LITERATURA

- [1] Keck, K. F., Zahnradpraxis I in II, R. Oldenbourg Verlag, München 1956, 1958.
- [2] Gleason, Gleason Method for Estimating the Fatigue Life of Bevel Gears and Hypoid Gears.
- [3] Eschmann, Die Wälzlagerpraxis, R. Oldenbourg Verlag, München.
- [4] Šmarčan, P., Oblike dotikalnih ploskev med zobmi pri stožčastih zobnikih z ločnimi zobmi. Doktorska disertacija, Fakulteta za strojništvo v Ljubljani, 1972.
- [5] Bronštejn/Semendjajev, Matematični priročnik. Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 1963.
- [6] Thomas, A. K., Grundzüge der Verzahnung. Carl Hanser Verlag, München 1957.

Avtorjev naslov: dr. ing. Pavle Šmarčan, VTS Maribor