

# STROJNISKI VESTNIK

LETNIK 19

LJUBLJANA, V NOVEMBRU 1973

ŠTEVILKA 6

UDK 539.4.019.3

## Postopek končnih elementov za računanje termičnih napetosti\*

(Prostorski, vrteninski in ravninski primeri obravnavne)

ANDRO ALUJEVIČ

V sestavku so podane osnovne zamisli o uporabi metode končnih elementov v elastomehaniki in področju termoelastičnosti. Izbrane so osnovne enačbe, s katerimi popisujemo obnašanje posameznih vrst končnih elementov, kakršni so npr. kvadri, piramide, četverokotniki in trikotniki, na katere razstavimo obravnavani strojni del. Z uporabo principa o minimalni potencialni energiji dobljene enačbe nato sestavimo v sistem, ki ga razrešimo z digitalnim računalnim strojem.

Pri obravnavanih prostorskih, vrteninskih in ravninskih primerih se je marsikje pokazalo smotrno odstopiti od standardnega zapisa. Za primer je navedena uporaba tenzorske definicije strižnih deformacij namesto inženirske definicije, da se s tem olajša postopek programiranja (3-D) in pospeši delo računalnika. Prav tako se je pokazala smiselna preureditev matrike elastičnih lastnosti v 2-D zgledih, da lahko vgradimo vrteninski in tudi oba ravninska primera (ravninsko deformacijsko ter ravninsko napetostno stanje) čim bolj okrnjeno v en sam program.

Podano gradivo je podprtzo izračunanimi primeri iz konstrukcijske prakse s področja gorivnih elementov za jedrske reaktorje, čeprav je uporaba te metode v drugih panogah tehnike enostavna. S poenostavljavi lahko postopek končnih elementov rešuje tudi probleme prevajanja toplotne, magnetike, difuzije nevronov ipd.

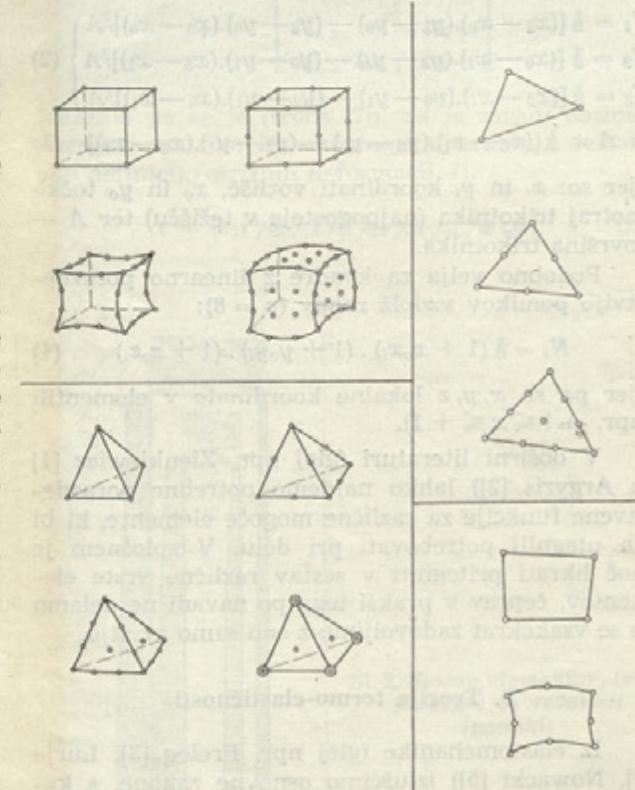
### 1. Uvod

V minulih dvanajsetih letih je metoda končnih elementov povsem prevladala v uporabi mehaniki pri dvo- in trorazsežnih analizah deformacij in napetosti trdnih tel, pretoka tekočin ipd. Prvo desetletje (1954–64) je bilo potrebno razvoju in uveljavitvi elementov osnovnega razreda, ki uporabljajo linearne modele porazdelitve spremenljivk, kakor so pomiki oz. hitrosti. Začetni končni elementi so bili tako četverokotniki kakor tudi trikotniki z vozli v oglisih. Kaj kmalu pa se je izkazalo, da so trikotni sestavi prikladnejši — zaradi lažjega zgoščevanja mrež in ker dajejo boljše rezultate pri obdelavi problemov velikih specifičnih deformacij. Podobno so si uporabniki tudi že zgodaj omislili uporabo kvadrov in tetraedrov za prostorske primere.

Iz te prve serije so še danes v rabi predvsem naslednji elementi:

- trikotniki ( $n = 3$ ),
- četverokotniki ( $n = 4$ ),
- tetraedri ( $n = 4$ ),
- kvadri ( $n = 8$ ).

\* Ta članek je izvleček iz avtorjeve doktorske disertacije, izdelane na Imperial College (University of London). Objavo je omogočil Institut Jožef Stefan (Univerza v Ljubljani).



Slika 1. Nekaj dvo- in trodimenzionalnih končnih elementov

Hkrati se pojavljajo tudi drugi elementi, predvsem za posebne probleme, kakor so plošče in lupine.

V drugem desetletju (1964—73) so se potem pojavili končni elementi baročnega stila, s kvadratičnimi in kubičnimi porazdelitvami, npr.:

- trikotniki ( $n = 6, 10, \dots$ ),
- četverokotniki ( $n = 8, 9, 12, 16, \dots$ ),
- tetraedri ( $n = 10, 20, \dots$ ),
- heksaedri ( $n = 20, 26, 27, 32, 56, 64, \dots$ )

z vozlišči na robovih, straničnih ploskvah in v notranjosti (slika 1). Novi elementi dopuščajo ukrivljeno robov in stranic. Velja pa pripomniti, da so tako okrašeni elementi dostikrat hkrati dobi in slab. Z njimi je sicer v načelu moč analizirati zapletenejše primere, toda računalniški časi in predvsem stroški utegnejo zagreniti delo.

## 2. Skupna zasnova

V vsakem od pojavljajočih se končnih elementov si izberimo model porazdelitve pomikov:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n N_i \vec{u}_i \quad (1)$$

Kot porazdelitvene funkcije  $N_i$  po navadi uporabljamo polinome. V trikotnikih linearnega razreda so le-ti podani z izrazi:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} [(x_2 - x_0)(y_3 - y_0) - (y_2 - y_0)(x_3 - x_0)]/A \\ N_2 &= \frac{1}{2} [(x_0 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_0 - y_1)(x_3 - x_1)]/A \\ N_3 &= \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_0 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_0 - x_1)]/A \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{in } A = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)] \quad (3)$$

kjer so:  $x_i$  in  $y_i$  koordinati vozlišč,  $x_0$  in  $y_0$  točka znotraj trikotnika (najpogosteje v težišču) ter  $A$  — površina trikotnika.

Podobno velja za kvadre z linearno porazdelitvijo pomikov vzdolž robov ( $n = 8$ ):

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + x_i x_j) \cdot (1 + y_i y_j) \cdot (1 + z_i z_j) \quad (4)$$

kjer pa so  $x, y, z$  lokalne koordinate v elementih (npr.  $-1 \leq x \leq +1$ ).

V obširni literaturi (glej npr. Zienkiewicz [1] in Argyris [2]) lahko najdemo potrebne porazdelitvene funkcije za različne mogoče elemente, ki bi jih utegnili potrebovati pri delu. V splošnem je moč hkrati pritegniti v sestav različne vrste elementov, čeprav v praksi tega po navadi ne delamo in se vsakokrat zadovoljimo z eno samo zvrstjo.

## 3. Teorija termo-elastičnosti

Iz elastomehanike (glej npr. Prelog [3], Lurje [4], Nowacki [5]) izluščimo osnovne zakone, s katerimi so popisani obravnavani deformacijski pojavi:

$$— \text{deformacije } \varepsilon = \frac{1}{2} ([\partial \vec{u} / \partial \vec{r}] + [\partial \vec{u} / \partial \vec{r}]^*) \quad (5)$$

$$— \text{napetosti } \sigma = D (\varepsilon - \varepsilon_0), \quad (6)$$

kjer matrika  $D$  vsebuje elastične lastnosti snovi ( $E$  in  $\nu$ ) ter so termični raztezki podani z izrazom

$$\varepsilon_0 = \alpha (T) \cdot T \quad (7)$$

V zgornjem zapisu smo predpostavili aditivnost specifičnih deformacij.

## 4. Ravnotežje sil

Z uvedbo modela končnih elementov sedaj lahko zapišemo

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= B u \\ \text{in } \sigma &= D (B u - \varepsilon_0) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

kjer matrika  $B$  vsebuje odvode porazdelitvenih funkcij  $N_{i,j}$ .

Potencialna energija elastičnih teles je v splošnem primeru

$$P = U - W \quad (9)$$

in deformacijska energija  $U$  je pri tem podana z izrazom

$$U = \frac{1}{2} \int \varepsilon^* \sigma \, dV = \frac{1}{2} \int \varepsilon^* D \varepsilon \, dV \quad (10)$$

ter delo zunanjih sil

$$W = \int u^* G \, dV + \int u^* F \, dS \quad (11)$$

S predpostavljivo proporcionalnognega obnašanja gradiva dobimo torej izraz

$$P = \frac{1}{2} \int \varepsilon^* D \varepsilon \, dV - \int u^* G \, dV - \int u^* F \, dS \quad (12)$$

Izrek o minimalni vrednosti variacije potencialne energije v ravnotežju sistema terja, da je

$$\delta P = 0 \quad (13)$$

Iz tega dobimo, da mora v vsakem od končnih elementov veljati zveza

$$\delta u^* [(\int B^* D B \, dV) u - \int N^* G \, dV - \int N^* F \, dS] = 0 \quad (14)$$

zaradi poljubnosti variacije pomikov  $\delta u$  pa končno izhaja, da je

$$K_e u = R_e \quad (15)$$

kjer smo definirali togost elementa in sile z enačbama

$$\left. \begin{aligned} K_e &= \int B^* D B \, dV_e \\ \text{in } R_e &= \int N^* G \, dV_e + \int N^* F \, dS_e \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Temu zapisu zlahka priključimo termične sile, tako da imamo

$$K_e u + \Theta_e = R_e \quad (17)$$

z definicijo

$$\Theta_e = - \int B^* D \varepsilon_e dV_e \quad (18)$$

Ker so vrednosti pomikov in sil vsklajene v vozliščih, velja aditivnost izpeljanih enačb v teh točkah. Tako dobimo za celoten sistem elementov, s katerimi predstavljamo strukturo strojnega dela, enačbo

$$K u + \Theta = R \quad (19)$$

s togovstvo sistema

$$K = \sum_{k=1}^m K_k \quad (20)$$

kjer je  $m$  celotno število vozlov v sistemu. Podobno seštevno pravilo velja za termične sile.

### 5. Razrešitev

Osnovno vprašanje, ki si ga moramo sedaj zastaviti, je izbira numeričnega postopka za določitev pomikov  $u$  iz sistema enačb (19). Neposredno obračanje togovstne matrike  $K^{-1}$  po navadi ne prihaja v poštov. Na voljo pa so iteracijski, neposredni eliminacijski ter frontalni eliminacijski postopki. Prvi je najhitrejši, a uporabimo ga lahko le, če lahko spravimo celotno matriko v hitri spomin računalnika. To nam po navadi uspe pri 2-D trikotniških sestavih z nekaj sto ali tisoč elementi. Naspotno pa pri 3-D problemih analize napetosti tega skoraj nikoli ne zmoremo in si pomagamo z eliminacijo v valovih. Strukturo razdelimo na primerne predele (po en ali več elementov skupaj) ter enačbe rešujemo z izločanjem neponavljajočih se spremenljivk. Podrobnosti tega opravila so pojasnjene v literaturi (npr. Noble [6]).

### 6. Prostorski primer

Pri tem zgledu imamo opravka s pomiki v vseh treh smereh, tj.

$$u = \{u \ v \ w\} \quad (21)$$

ter s po šestimi komponentami napetosti in specifičnih deformacij

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \tau_{23} \ \tau_{31} \ \tau_{12}\} \\ \varepsilon &= \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\gamma_{23} \ 2\gamma_{31} \ 2\gamma_{12}\} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Če se omejimo na izotropne snovi, dobimo enačbo (6) v novi obliki

$$\sigma_{kl} = \left[ \frac{\lambda E_3 + 2G I_3}{O_3} \right] \left( \varepsilon_{kl} - \alpha T \{I_3 O_3\} \right), \quad (23)$$

kjer sta Laméjevi konstanti  $\lambda$  in  $G$  podani z izrazoma

$$\lambda = E \nu / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)] \quad (24)$$

$$G = E / [2(1 + \nu)]$$

Oblikovna matrika  $B$  se v obravnavanem primeru glasi

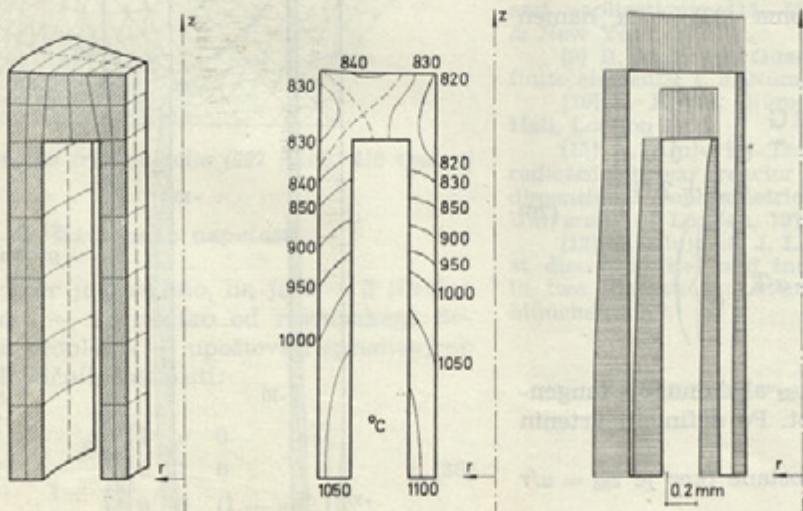
$$B = [B_1 \ B_2 \ B_3] \quad (25)$$

s članji

$$B_i = \begin{bmatrix} N_{i,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,2} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,3} \\ 0 & N_{i,3} & N_{i,2} \\ N_{i,3} & 0 & N_{i,1} \\ N_{i,2} & N_{i,1} & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Izkazalo pa se je (Iron [7]), da je zaradi nesimetričnosti matrike  $B_i$  smotrnejše uporabljati tenzorsko definicijo strižnih deformacij, tj.

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{11} \ \gamma_{12} \ \gamma_{13} \ \gamma_{21} \ \varepsilon_{22} \ \gamma_{23} \ \gamma_{31} \ \gamma_{32} \ \varepsilon_{33}\} \quad (27)$$



SL. 2. Sestav elementov, temperature in rezultati (pomiki)

in tako predelati matriko  $B_i$  v  $Q_i$ :

$$Q_i = (N_{i,j} \{I_3\}) [I_3] \quad (28)$$

Ustrezno je seveda treba preurediti tudi matriko  $D$  — glej vir [8].

Vse potrebne integracije (enačbi (16) in (18)) najprimernej izvedemo numerično (Iron [9], Kopal [10], Zienkiewicz [1]).

Po opisanem procesu, z uporabo frontalne metode reševanja enačb, je bil na Imperial College v Londonu napisan Fortran IV program TRISTAN [11]. Slika 2 kaže značilni primer uporabe — geometrijo, temperaturno porazdelitev in termične deformacije (rezultate) dvojne cevi s pokrovom. Ta zgled je rabil za testiranje programa, ki je dalo naslednje osnovne informacije (na CDC 6600):

Število in vrsta elementov	računski čas	spomin stroja	strošek računa
30 H 20	350 s	48000	8000 din
36 H 20	440 s	50000	10000 din
93 H 20	(*)	60000	30000 din
184 H 20	(*)	73000	68000 din
30 H 32	1000 s	70000	28000 din
36 H 32	(*)	78000	37000 din

(\*) Označeni primeri so ocene, vsi stroški pa so preračunani po deviznem tečaju 40 din za 1 Lstg.

Iz povedanega lahko sklepamo, da je za naše domače razmere tovrstna analiza napetosti in deformacij verjetno predraga, tudi če imamo pri roki velik in hiter računalnik. Nasprotno pa kaže, da so dvodimenzionalni programi zrelejši za uporabo pri nas doma.

## 7. Vrtenine

S poenostavitevami lahko priredimo dosedanje tvarino za 2-D program, ki rešuje osnosimetrične probleme. Enačbo (6) oziroma (23) v ta namen skrčimo v naslednji zapis:

$$\begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ \sigma_{33} \end{cases} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & G & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & \lambda + 2G \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{cases} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{33} \end{cases} - \alpha T \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \right) \quad (29)$$

kjer naj bodo  $\sigma_{11}$  radialna,  $\sigma_{22}$  aksialna,  $\sigma_{33}$  tangencialna in  $\tau_{12}$  stribna napetost. Po definiciji vrtenin sta namreč  $\tau_{23} = \tau_{31} = 0$ .

Oblikovna matrika  $B$  postane (ker je  $\varepsilon_{33} = u/r$  ter so npr.  $\varepsilon_{11} = u_r$  ipd.):

$$B_i = \begin{bmatrix} N_{i,1} & 0 \\ 0 & N_{i,2} \\ N_{i,2} & N_{i,1} \\ N_{i,r} & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Velja pripomniti, da način pisanja matrik  $B$  in  $D$  nekoliko odstopa od običajnega zapisa drugih avtorjev (Zienkiewicz [1]), toda pri pisanju računalniškega programa se je to pokazalo zelo koristno, ko je bilo treba vključiti ravninsko deformacijsko in ravninsko napetostno stanje v obseg, ki naj bi ga zmogel program.

Togost elementa določamo ali z uporabo integracije

$$K_e = 2\pi \iint B^* D B r dr dz \quad (31)$$

in podobno pri termičnih silah

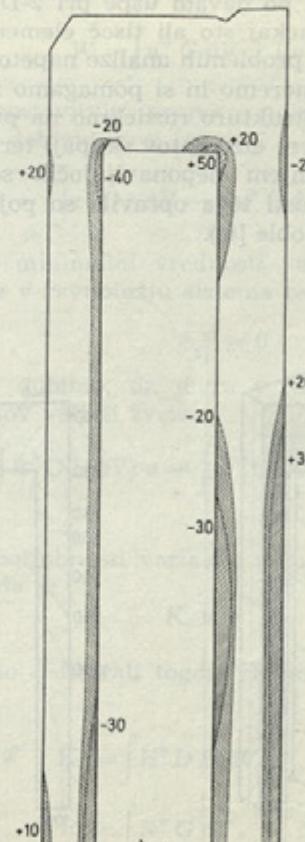
$$\Theta_e = -2\pi \iint B^* D \alpha T r dr dz \quad (32)$$

ali pa se zadovoljimo s približki vrednosti v težiščih elementov, torej

$$K_e = 2\pi \bar{r} A_e B^* D B \quad (33)$$

$$\Theta_e = -2\pi \bar{r} A_e B^* D \alpha T$$

Za razrešitev tako zastavljenega programa je bil na Imperial College v Londonu izdelan itera-



Sl. 3. Porazdelitev glavnih napetosti v vrtenini

tivni računalniški program BREL [12]. Slika 3 prikazuje značilne rezultate (porazdelitev termičnih napetosti) primera dvojne cevi s pokrovom. K uporabljenim 466 trikotnim elementom (približno 300 vozlišč) dodajmo podatek, da potrebuje BREL program 40 000 besed spomina ter porabi približno 30 s časa za račun vsakega primera toplotne in/ali mehanske obremenitve obravnavane strukture. Strošek za ta primer znese okoli 400 novih dinarjev.

### 8. Ravninske deformacije

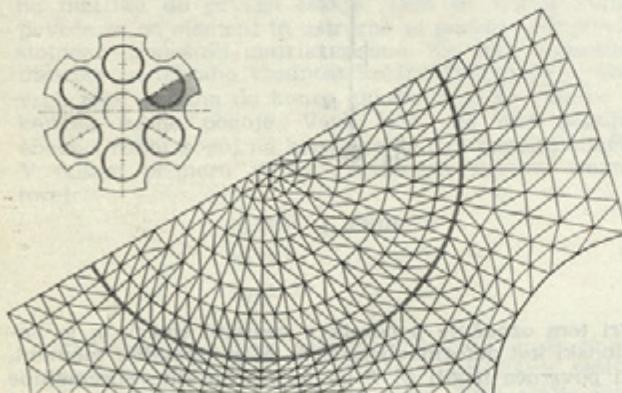
Z definicijo ravninskega deformacijskega stanja  $\epsilon_x = \epsilon_{33} = 0$  (Prelog [3]) lahko takoj prenaredimo vrteninski primer programa tako, da izbrišemo zadnjo vrstico v  $B_i$  matriki ter zadnjo vrstico in zadnji stolpec v  $D$  matriki; spremeniti pa moramo tudi končni rezultat togostne matrike in termičnih sil, ki postanejo

$$K_e = B^* D B A_e \text{ ozir. } \Theta_e = -B^* D a T A_e \quad (34)$$

Napetosti pravokotno na ravnino  $x-y$  po navadi lahko izrazimo z obrazcem

$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \quad (35)$$

Slika 4 podaja zgled mreže končnih elementov ravninskega primera. Iz podanega števila elementov in vozlišč lahko ocenimo stroške proračuna termičnih napetosti s približno 700 novih dinarjev.



Slika 4. Ravninska triangulacija (697 likov, 419 vozlov)

### 9. Ravninske napetosti

Za ta primer je značilno, da je  $\sigma_z = 0$  (Prelog [3]) in moramo — za razliko od ravninskega deformacijskega problema — upoštevati spremenjeno matriko  $D$  elastičnih lastnosti:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

v drugih podrobnostih pa se ova ravninska primera povsem ujemata. V račun moramo vzeti le še debelino elementa, posebej če se le-ta spreminja vzdolž ali poprek obravnavane stene.

### 10. Sklep

V sestavku smo na kratko pregledali zasnovno metode končnih elementov, ki jo uporabljamo pri analizi napetosti in deformacij trdnih teles. Prikazani postopek se je v praksi pokazal kot izredno uporaben, saj zmore reševati raznovrstne dvo- in trodimenzionalne primere.

Seznanili smo se z zamislio, izvedbo in rezultati dveh avtorjevih programov in tudi z možnostmi za presaditev na domača tla. Oba programa sta bila izdelana na Imperial College of Science and Technology (Mech. Eng. Dept.) ob podpori O. E. C. D. Dragon Projecta, vendar ni ovir za uporabo pri nas za analizo primernih problemov.

### LITERATURA

- [1] O. C. Zienkiewicz: The finite element method in engineering science; McGraw-Hill, London 1971.
  - [2] J. H. Argyris: Finite element analysis of thermomechanical problems; 3. Conf. Matrix methods in structural mechanics, WPAFB, Ohio 1971.
  - [3] E. Prelog: Elasto- in plastomehanika; Univerzitetna založba, Ljubljana 1973.
  - [4] A. I. Lurje: Three-dimensional problems of the theory of elasticity; Interscience, New York 1964.
  - [5] W. Nowacki: Thermo-elasticity; Pergamon, Oxford/Warszawa 1962.
  - [6] B. Noble: Applied linear algebra; Prentice-Hall, New Jersey 1969.
  - [7] B. M. Irons: Economical computer techniques for numerically integrated finite elements; I. J. Num. Meth. Eng., London 1969.
  - [8] A. Alujević, J. L. Head: Application of three-dimensional finite elements for analysis of irradiation-induced stresses in nuclear reactor fuel elements; v J. R. Whiteman: The mathematics of finite elements and applications; 415–426, Academic Press, London & New York, 1973.
  - [9] B. M. Irons: Quadrature rules for brick based finite elements; I. J. Num. Meth. Eng., London 1971.
  - [10] Z. Kopal: Numerical analysis; Chapman & Hall, London 1961.
  - [11] A. Alujević: The analysis of stresses in irradiated nuclear reactor fuel elements using three-dimensional isoparametric finite elements; Ph. D. teza, University of London, 1973.
  - [12] A. Alujević, J. L. Head: Fuel element stresses at discontinuities and interactions by finite elements in two dimensions; Atomkernenergie, 21 (73), 75–80, München 1973.
- Avtorjev naslov: dr. Andro Alujević, mag. ing., Ljubljana, Celovška 103 (III)  
(Lecturer of Imperial College, University of London, England)  
sedaj docent VTS Maribor in  
znanstveni sodelavec inštituta  
»Jožef Stefan« Univerze v Ljubljani