YU — ISSN 0039—2480

STROJNIŠKI VESTNIK

LETNIK 22 LJUBLJANA, JANUAR—FEBRUAR 1976 ŠTEVILKA 1—2

UDK 621.039.54.34

Termične napetosti v tableti keramičnega gorivnega elementa

ANDRO ALUJEVIČ

Deli reaktorjev so med obratovanjem obremenjeni z mehanskimi in s termičnimi silami (zaradi temperaturnih razlik). Veliko komponent reaktorjev ima obliko valja, bodisi da gre za polne ali votle valje. Poznati moramo torej porazdelitev temperatur, nato pa z enačbami termoelastičnosti določimo potek napetosti. Zaradi preprostosti bomo obravnavali samo osnosimetrične probleme oblike teles in poteka obremenitev. Radialni primer rešujemo lahko analitično, radialno-aksialni primer pa numerično z uporabo metode končnih elementov (rotacijsko simetričnih).

1. TEORIJA

1.1. Splošne enačbe

Pri obravnavanju termoelastičnosti imamo opravka s silami, napetostmi, deformacijami in pomiki:

(I) vektor sil

$$f = \{X \quad Y \quad Z\} \tag{1}$$

(II) tenzor napetosti

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \ \tau_{ij} = \tau_{ji} \tag{2}$$

(III) tenzor deformacij

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \ \gamma_{ij} = \gamma_{ji} \tag{3}$$

(IV) vektor pomikov

$$u = \{u \quad v \quad w\} \tag{4}$$

Med temi veličinami je 15 neznank (ker so znane bodisi sile ali pomiki). Zato potrebujemo 15 enačb, ki so v splošnem prostorskem primeru naslednje:

(I) ravnotežne enačbe

$$\operatorname{div} \ \sigma_{ij} + f = 0 \tag{5}$$

(II) kinematične enačbe

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2} (\operatorname{grad} u + \partial u / \partial r) \tag{6}$$

(III) konstitutivne enačbe

$$\sigma_{ij} = S_{ijkl} (\varepsilon_{ij} - \alpha_{ij} \ T \ \delta_{ij}) \tag{7}$$

kjer je S_{ijkl} konstitutivna matrika (tenzor četrtega reda), α_{ij} tenzor termičnih raztezkov, T temperatura in δ_{ij} Kroneckerjeva funkcija.

Poleg tega morajo biti izpolnjeni še posebni kompatibilitetni pogoji, da bi bila zagotovljena enoličnost rešitve. Ta je potem odvisna od obremenitev in od vsakokratnih robnih pogojev.

Temperaturno porazdelitev v telesu imamo pri računanju termoelastičnosti za znano, če zanemarimo zvezo med deformacijami in toplotnimi viri.

Konstitutivno zvezo (7) nadomeščamo ponavadi s preprostejšim izrazom

$$\{\varepsilon\} = D^{-1} \{\sigma\} + \{\varepsilon^t\}, \ \{\sigma\} = D(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^t\}) \tag{8}$$

kjer sta matriki v splošnem prostorskem primeru za izotropno linearno snov

$$D^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{E}\begin{bmatrix} +1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & +1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & +1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{matrix} \end{vmatrix} \tag{9}$$

oziroma

$$D = \begin{vmatrix} L+2G & L & L & 0 & 0 & 0 \\ L & L+2G & L & 0 & 0 & 0 \\ L & L & L+2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{vmatrix} \tag{10}$$

kjer so parametri: E = Youngov modul, ν = Poissonovo število, L in G Lakéjevi konstanti

$$L = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{in} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Izrazi $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ in $\{\varepsilon^t\}$ pomenijo napetosti, deformacije in termične raztezke

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \tau_{12} \ \tau_{23} \ \tau_{31}\}$$
$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ 2\gamma_{12} \ 2\gamma_{23} \ 2\gamma_{31}\}$$
$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \tau_{12} \ \tau_{23} \ \tau_{31}\}$$

v obliki stolpnih matrik.

1.2. Rotacijsko simetrični ravninski sistem

Če pri krožnih valjih zanemarimo obodno in vzdolžno odvisnost, dobimo namesto enačb (5), (6) in (8) poenostavljene izraze

(I) Ravnotežje

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \tag{11}$$

(II) Kinematika (ravninsko deformacijsko stanje, $\varepsilon_z = \text{const}$)

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \tag{12}$$

$$\varepsilon_\Phi = \frac{u}{r} \tag{13}$$

oziroma združeno
$$\frac{d}{dr}(r\,\varepsilon_\Phi) = \varepsilon_r \tag{14}$$

(III) Konstitutivnost

$$\sigma_r = (L + 2\,G)(\varepsilon_r - \varepsilon^t{}_r) + L(\varepsilon_\Phi - \varepsilon^t{}_\Phi + \varepsilon_z - \varepsilon^t{}_z) \tag{15}$$

$$\sigma_\Phi = (L + 2\,G)(\varepsilon_\Phi - \varepsilon^t{}_\Phi) + L(\varepsilon_r - \varepsilon^t{}_r + \varepsilon_z - \varepsilon^t{}_z) \tag{16}$$

Ustrezni robni pogoji so za

— polni valj $\quad u(r = 0) = 0$

in $\quad \sigma_r(r = b) = -p_b \quad (17)$

— votli valj $\quad \sigma_r(r = a) = -p_a$

in $\quad \sigma_r(r = b) = -p_b \quad (18)$

kjer sta p_a tlak na notranjem plašču in p_b tlak na zunanjem plašču valja.

1.3. Rotacijsko simetrični prostorski primer

Ustrezne enačbe rotacijskih teles se glasijo

(I) Ravnotežje

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\Phi}{r} = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \tag{20}$$

(II) Kinematika

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \tag{21}$$

$$\varepsilon_\Phi = \frac{u}{r} \tag{22}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{23}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) \tag{24}$$

(III) Konstitutivnost

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\Phi \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L + 2\,G & L & L & 0 \\ L & L + 2\,G & L & 0 \\ L & L & L + 2\,G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\Phi \\ 2\,\gamma_{rz} \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \tag{25}$$

Robni pogoji so podani neposredno s silami in/ali pomiki (v določeni smeri), ki jih pri metodi končnih elementov upoštevamo neposredno.

2. REŠITEV ENOIZMERNEGA PRIMERA

Rotacijsko simetrični ravninski primer (ravninsko deformacijsko stanje) lahko razrešimo analitično z združitvijo enačb (11) do (16), njihovo integracijo in z upoštevanjem robnih pogojev (17) oziroma (18).

Z vstavitvijo enačb (15) in (16) v enačbo (11) ter z upoštevanjem odvodov enačb (12) in (13), dobimo diferencialno enačbo radialnih pomikov

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\,u)\right) = \frac{d\varepsilon^t{}_r}{dr} + \frac{L}{L + 2\,G}\left(\frac{d\varepsilon^t{}_\Phi}{dr} + \frac{d\varepsilon^t{}_z}{dr}\right) + \frac{2\,G}{L + 2\,G}\,\frac{\varepsilon^t{}_r - \varepsilon^t}{r} \tag{26}$$

Pri izotropnih snoveh so termični raztezki v vseh smereh enaki, tako da sledi poenostavljena diferencialna enačba radialnih pomikov

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\,u)\right) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu}\,\alpha\,\frac{dT(r)}{dr} \tag{27}$$

Če torej poznamo temperaturno porazdelitev $T(r)$ v valju, lahko izračunamo poteke termičnih napetosti z integracijo enačbe (27), bodisi analitično ali numerično z elektronskim digitalnim računalnikom (npr. z uporabo Simpsonove formule).

2.1. Mehanska obremenitev votlega valja

Kadar je temperatura v valju konstantna, je desna stran v enačbi (27) nič in zato velja rešitev

$$u(r) = C_1\,r + C_2/r \tag{28}$$

Specifične deformacije so potem

$$\varepsilon_r = C_1 - C_2/r^2$$
$$\varepsilon_\Phi = C_1 + C_2/r^2$$

medtem ko sta glavni napetosti v r_Φ ravnini

$$\sigma_r = L\,.\,2\,C_1 + 2\,G\,(C_1 - C_2/r^2)$$
$$\sigma_\Phi = L\,.\,2\,C_1 + 2\,G\,(C_1 + C_2/r^2)$$

Z upoštevanjem robnih pogojev (18) dobimo napetostne poteke

$$\sigma_r(r) = -p_a + \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}\cdot b^2\,.\,(1 - a^2/r^2) \tag{29}$$

$$\sigma_\Phi(r) = -p_a + \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}\cdot b^2\,.\,(1 + a^2/r^2) \tag{30}$$

Posebne primere rešitve dobimo, če je kateri od tlakov (notranji ali zunanji) nič.

2.2. Toplotna obremenitev votlega valja

Z znano temperaturo $T(r)$ dobimo rešitev enačbe (27)

$$u(r)=\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\alpha\,\frac{1}{r}\int_a^r T(r)\,r\,\mathrm{d}r+C_1\,r+C_2/r \tag{31}$$

Z robnim pogojem (18) in vrednostma $p_a = 0$, $p_b = 0$, dobimo »čiste« termične napetosti v votlem valju, katerim po potrebi superponiramo mehanski rešitvi (29) in (30). Enačbe termičnih napetostnih potekov so [1]

$$\sigma_r(r)=\frac{\alpha\,E}{1-\nu}\,\frac{1}{r^2}\left(\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}\int_a^b T(r)\,r\,\mathrm{d}r-\int_a^r T(r)\,r\,\mathrm{d}r\right) \tag{32}$$

$$\sigma_\Phi(r)=\frac{\alpha\,E}{1-\nu}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\left(\frac{r^2+a^2}{b^2-a^2}\int_a^b T(r)\,r\,\mathrm{d}r+\int_a^r T(r)\,r\,\mathrm{d}r-T(r)\,r^2\right) \tag{33}$$

medtem ko je vzdolžna napetost

$$\sigma_z=\nu\,.\,(\sigma_r+\sigma_\Phi)-\alpha\,E\,T \tag{34}$$

oziroma

$$\sigma_z(r)=\frac{\alpha\,E}{1-\nu}\cdot\left(\frac{2\,\nu}{b^2-a^2}\int_a^b T(r)\,r-T(r)\right) \tag{35}$$

Primerna temperaturna porazdelitev [2] je npr. pri obojestranskem hlajenju valja, ki tudi sam generira toploto Q v enoti prostornine V

$$T(r)=T_b+\frac{(Q/V)}{4\,\lambda}(b^2-r^2)+\left[T_a-T_b+\frac{(Q/V)}{4\,\lambda}(b^2-a^2)\right]\frac{\ln(r/b)}{\ln(a/b)} \tag{36}$$

2.3. Toplotna obremenitev polnega valja

Z upoštevanjem robnih pogojev (17) in vrednostjo $p_b = 0$ dobimo »čiste« termične napetosti v polnem valju, katerih poteki se glase [1]

$$\sigma_r(r)=\frac{\alpha\,E}{1-\nu}\left(\frac{1}{b^2}\int_0^b T(r)\,r\,\mathrm{d}r-\frac{1}{r^2}\int_0^r T(r)\,r\,\mathrm{d}r\right) \tag{37}$$

$$\sigma_\Phi(r)=\frac{\alpha\,E}{1-\nu}\left(\frac{1}{b^2}\int_0^b T(r)\,r\,\mathrm{d}r+\frac{1}{r^2}\int_0^r T(r)\,r\,\mathrm{d}r-T(r)\right) \tag{38}$$

$$\sigma_z(r)=\frac{\alpha\,E}{1-\nu}\left(\frac{2}{b^2}\int_a^b T(r)\,r\,\mathrm{d}r-T(r)\right) \tag{39}$$

Primerna temperaturna porazdelitev [2] v valju, ki sam generira toploto, je

$$T(r)=T_b+\frac{(Q/V)}{4\,\lambda}(b^2-r^2) \tag{40}$$

Uporabimo lahko tudi natančnejše temperaturne poteke, če je npr. treba upoštevati temperaturno odvisnost toplotne prevodnosti in/ali krajevno spremenljivost toplotnih virov [3].

3. REŠITEV DVOIZMERNEGA PRIMERA

Z uvedbo numeričnega postopka reševanja po metodi končnih elementov, kjer so pomiki v posameznih elementih podani s pomiki vozlišč

$$\boldsymbol{u}=\sum N_i\,\boldsymbol{u}_i \tag{41}$$

dobimo kinematično zvezo med deformacijami in pomiki v elementih

$$\{\varepsilon\}=\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}_i \tag{42}$$

kjer je matrika $\boldsymbol{B}$ trikotnih vrteninskih elementov s po tremi vozlišči

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\partial N_1/\partial r & 0 & \partial N_2/\partial r & 0 & \partial N_3/\partial r & 0\\ 0 & \partial N_1/\partial z & 0 & \partial N_2/\partial z & 0 & \partial N_3/\partial z\\ N_1/\bar{r} & 0 & N_2/\bar{r} & 0 & N_3/\bar{r} & 0\\ \partial N_1/\partial z & \partial N_1/\partial r & \partial N_2/\partial z & \partial N_2/\partial r & \partial N_3/\partial z & \partial N_3/\partial r\end{bmatrix} \tag{43}$$

in je $\bar{r}=(r_1+r_2+r_3)/3$ radij težišča trikotnika.

Z upoštevanjem konstitutivne zveze med napetostmi in deformacijami dobimo ravnotežno enačbo, ki vsebuje enačbi (25) in (42), v posameznih končnih elementih

$$\boldsymbol{K}^e\,\boldsymbol{u}^e+\boldsymbol{f}^{te}=\boldsymbol{f}^e \tag{44}$$

s togostjo elementa

$$\boldsymbol{K}^e=2\,\pi\,\bar{r}\int\boldsymbol{B}^*\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z=2\,\pi\,\bar{r}\,A_e\,\boldsymbol{B}^*\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{B} \tag{45}$$

in termičnimi silami

$$\boldsymbol{f}^{te}=-2\,\pi\,\bar{r}\int\boldsymbol{B}^*\,\boldsymbol{D}\{\varepsilon^t\}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z=-2\,\pi\,\bar{r}\,A_e\,\boldsymbol{B}^*\,\boldsymbol{D}\{\varepsilon^t\} \tag{46}$$

kjer je A_e površina prereza trikotnega elementa.

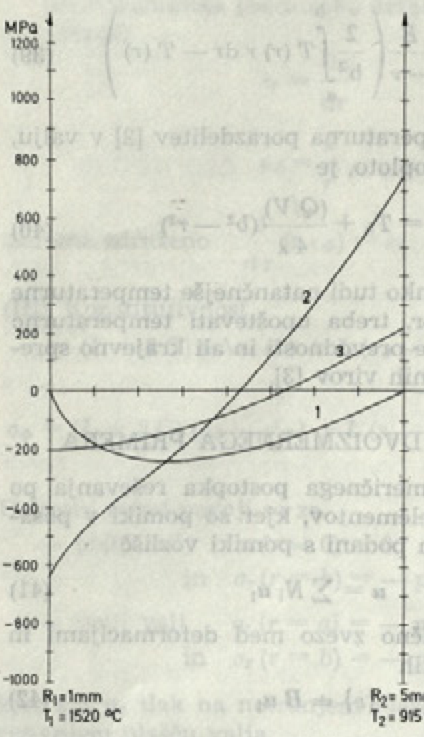
Za skupek elementov dobimo potem enačbo

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}^t=\boldsymbol{f} \tag{47}$$

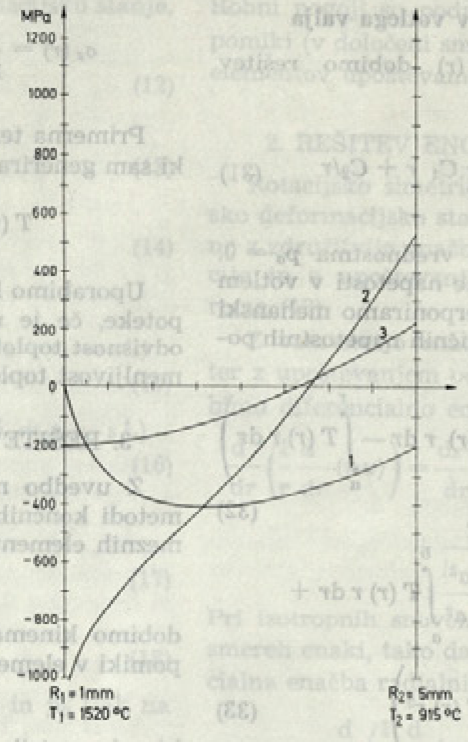
kjer so $\boldsymbol{K}=\sum\boldsymbol{K}^e$, $\boldsymbol{f}^t=\sum\boldsymbol{f}^{te}$ in $\boldsymbol{f}=\sum\boldsymbol{f}^e$ ustrezne togosti in sile. Enačbo (47) zapišemo tudi v obliki

$$\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r} \tag{48}$$

kjer vektor $\boldsymbol{r}$ pomeni rezultante vseh sil v vozliščih elementov. Za reševanje sistema enačb (48)



Sl. 1. *Napetosti v dolgem valju (termična obremenitev)*

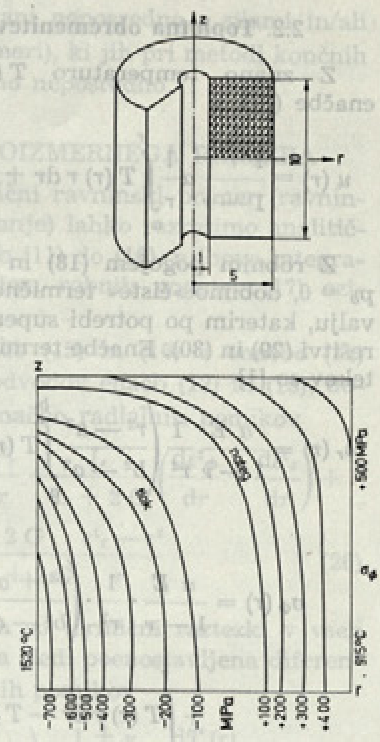


Sl. 2. *Napetosti v dolgem valju (termična in zunanja obremenitev)*

1 — SIGR
2 — SIG Φ
3 — SIGZ

\+ nateg
— tlak

E = 1,62847 . 10⁵ MPa
ν = 0,30
α = 0,6 . 10⁻⁵ K⁻¹



Sl. 3. *Napetosti v kratkem valju (termična obremenitev)*

uporabimo razpoložljive numerične postopke, npr. iteracijo Gauss-Seidel ($k = 0, 1, \ldots$)

$$\boldsymbol{u}_r^{k+1} = \boldsymbol{u}_r^{k} + \omega\, \boldsymbol{K}_{rr}^{-1} \left[\boldsymbol{r}_r - \sum_{s=1}^{r-1} \boldsymbol{K}_{rs}\, \boldsymbol{u}_s^{k+1} - \sum_{s=r}^{m} \boldsymbol{K}_{rs}\, \boldsymbol{u}_s^{k} \right] \qquad (49)$$

kjer so $\boldsymbol{u}_r$ pomik vozlišča r, ω pospešilni količnik konvergence in $\boldsymbol{K}_{rr}^{-1}$ podajna matrika vozlišča. Robne pogoje upoštevamo tako, da prilagodimo podajno matriko ustreznih vozlišč, kjer so robni pogoji predpisani, npr. s smerjo gibanja.

Iz dobljenih pomikov potem izvrednotimo napetosti v težiščih končnih elementov (saj smo vzeli najenostavnejše linearne elemente)

$$\{\sigma\} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}\, \boldsymbol{u}_1 - \{\varepsilon^t\}) \qquad (50)$$

Temperaturne porazdelitve $T(r, z)$ moramo poznati pred računanjem termoelastičnega problema vrtenine. Izračunamo jih z ustreznimi računalniškimi programi po metodi končnih elementov [4].

4. IZRAČUNANI ZGLEDI

V priloženih slikah 1, 2 in 3 je zbranih nekaj napetostnih porazdelitev v vrteninah (enoizmerni in dvoizmerni primeri votlih in polnih valjev) gorivnih elementov jedrskih reaktorjev. Opisani postopki pa so seveda veljavni za vse primere v tehniki, kjerkoli imamo opravka s termičnimi napetostmi v vrteninah.

5. UPORABLJENI VIRI

[1] S. Timošenko, J. N. Goodier, "Theory of Elasticity", Tokyo 1951.

[2] A. Alujevič, »Prenos toplote I.« (skripta), VTŠ Maribor 1975.

[3] A. Alujevič, »Prenos toplote v tableti keramičnega gorivnega elementa«, Strojniški vestnik **14**, 141, Ljubljana 1968.

[4] A. Alujevič, B. Eysink, J. Head, »TEMPEL — program končnih elementov za izračunavanje temperaturnih polj«, Strojniški vestnik **20**, 161, Ljubljana 1974.

[5] A. Alujevič, J. L. Head, "Heat Transfer and Stress-Strain Analysis of Tubular Fuel Elements", Atomkernenergie **20**, 281, München 1973.

[6] A. Alujevič, J. L. Head, "Fuel Element Stresses at Discontinuities and Interactions by Finite Elements in Two Dimensions", Atomkernenergie **21**, 75, München 1973.

[7] A. Alujevič, »Postopek končnih elementov za računanje termičnih napetosti (prostorski, vrteninski in ravninski primeri obravnave)«, Strojniški vestnik **19**, 169, Ljubljana 1973.

Avtorjev naslov: **Docent dr. Andro Alujevič**
Oddelek za strojništvo
Visoka tehniška šola
Univerza v Mariboru
(znanstveni sodelavec Inštituta J. Stefan, Univerza v Ljubljani)