

UDK 531.01

Reševanje stabilnosti sten z uporabo funkcij kompleksne spremenljivke

FRANC KOSEL

V članku je opisan računski postopek obravnavanja elastične stabilnosti sten z uporabo funkcij kompleksne spremenljivke. Zasnovan postopek omogoča izračun kritične zunanje obremenitve poljubnih enkrat oziroma dvakrat povezanih sten. Steno, omejeno z eno oziroma dvema sklenjenima konturama, lahko v kompleksni ravnini konformno preslikamo na krog oziroma kolobar, kjer lahko preprosteje zadostimo vsem predpisanim robnim pogojem.

1. UVOD

Stabilnostni problemi enkrat povezanih sten preprostejših geometrijskih oblik, to je sten brez odprtin, so teoretično in eksperimentalno že precej obdelani. Vrednosti izbočitvenih koeficientov so zbrane v različnih priročnikih v primerni obliki za uporabo pri konstruiranju v praksi. Raziskave elastične stabilnosti poljubnih enkrat in dvakrat povezanih sten, obremenjenih v splošnem s poljubnimi zunanji obremenitvami, so usmerjene predvsem na eksperimentalno področje.

Analitično obravnavanje teh problemov pomeni zahtevnejšo nalogo, zaradi določanja komponent tenzorja ravninskega stanja napetosti v steni, ki je osnovni podatek za zapis osnovne enačbe elastične stabilnosti stene.

Reševanje diferencialne enačbe in izpolnitev vseh zahtevanih robnih pogojev je v splošnem tudi zelo zahtevno. Določanje komponent tenzorja ravninskega stanja napetosti in reševanje stabilnostnega problema takšnih enkrat in dvakrat povezanih sten lahko analitično obravnavamo s kompleksno spremenljivko $z = x + iy$, s katero prevedemo stabilnostni problem iz realne ravnine od funkcij realnih spremenljivk v kompleksno ravnino (z) k realnim funkcijam kompleksne spremenljivke. Prednost uporabe kompleksne spremenljivke je v tem, da lahko območje enkrat in dvakrat povezane stene konformno preslikamo iz kompleksne ravnine (z) na novo kompleksno ravnino (ζ) v območje, ki ga omejujeta ena oziroma dve krožnici. Izpolnitev robnih pogojev na krogu oziroma centričnem krožnem kolobarju pa je mnogo preprostejša naloga. V tem je tudi vzrok, da so doslej znane analitične rešitve samo za centrični krožni kolobar in centrični eliptični kolobar.

Splošno rešitev centričnega krožnega kolobarja pri osnosimetričnem načinu izbočenja je podal M. Škerlj [1] leta 1967. Rešitev je dana v obliki Besselovih funkcij za poljubno homogeno in nehomogeno ravninsko stanje napetosti v steni, obremenjeni s poljubnima enakomernima normalnima

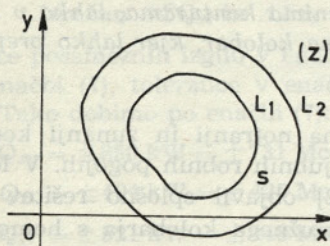
napetostma na notranji in zunanji konturi kolobarja pri poljubnih robnih pogojih. V letu 1957 je N. Yamaki [2] objavil splošno rešitev stabilnosti centričnega krožnega kolobarja s homogenim stanjem napetosti, kjer je upošteval tudi možnost neosnosimetričnega načina izbočitve stene v cirkularni smeri v obliki, ki jo določa funkcija $\cos \varphi n$. Iz rezultatov je razvidno, da se dejansko pojavlja minimalna kritična zunanja obremenitev tudi pri določenih razmerjih radijev in pri nekaterih kombinacijah robnih pogojev, ko se stena izboči neosnosimetrično v cirkularni smeri. Neosnosimetrično obliko izbočenja centričnega krožnega kolobarja z nehomogenim stanjem napetosti je obravnaval E. H. Mansfield [3] v letu 1960. Rešitev velja le za poseben primer nehomogenega stanja napetosti, ko je razmerje med notranjo in zunanjo obremenitvijo enako kvadratu razmerja radijev. V letu 1972 je B. Pertot [4] splošno rešil stabilnostni problem centričnega krožnega kolobarja v elasto-plastičnem območju, kjer je upošteval tudi možnost neosnosimetričnega načina izbočenja. Problem je rešil z numerično Ritzovo metodo. Rešitev centričnega eliptičnega kolobarja s homogenim stanjem napetosti je objavil v letu 1965 A. E. Evdokimov [5]. Rešitev je dana v Mathievjevih funkcijah.

Iz zgornjega pregleda je razvidno, da stabilnostni problem sten s končnim dvakrat povezanim območjem še ni dosti raziskan, saj niso znane splošne rešitve tudi za stene z geometrijsko najpreprostejšim območjem v obliki centričnega krožnega kolobarja. Prav zato daje uporaba kompleksne spremenljivke osnovo in možnost za analitično reševanje stabilnosti enkrat in dvakrat povezanih sten poljubne obremenitve in robnih pogojev.

2. OBRAVNAVANJE ELASTIČNE STABILNOSTI V KOMPLEKSNI RAVNINI (z)

Osnovna parcialna diferencialna enačba elastične stabilnosti stene v realnem prostorskem koordinatnem sistemu (1), dobljena iz raziskave ravnotežja sil na deformiranem elementarnem parale-

lepipedu [6], se lahko transformira v prostorski koordinatni sistem s kompleksno ravnino (z), sestavljeno iz realne in imaginarne osi, ter drugo realno osjo Z , ki je ortogonalna na kompleksno ravnino. Osrednja ravnina stene leži v kompleksni ravnini (z), tako da je premik w osrednje ravnine po izbočenju v smeri realne osi Z in je zato realna funkcija kompleksnih spremenljivk z in $\bar{z}$, slika 1.



Slika 1

$$\frac{D}{h} \Delta w_2 = \sigma_x \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + 2 \tau_{xy} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \frac{q_2}{h} \quad (1)$$

Transformacijo iz realne v kompleksno ravnino (z) izpeljemo s pomočjo diferencialnih operatorjev

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad \text{in} \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad (2)$$

Z uporabo binomskega stavka tvorimo tudi višje odvode po spremenljivkah x in y ter jih nato zamenjamo v osnovni enačbi elastične stabilnosti (1), ki tako dobi obliko

$$\begin{aligned} \frac{16D}{h} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} &= - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} (\sigma_y - \sigma_x - 2i \tau_{xy}) + \\ &+ \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} (\sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy}) + \\ &+ \frac{1}{h} q(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (3)$$

Funkcija $w(z, \bar{z})$ pomeni realno funkcijo kompleksnih spremenljivk z in $\bar{z}$, ki je pri določenem ravnotežnem stanju enolična funkcija v definicijskem območju S , omejenem s konturama stene L_1 in L_2 (slika 1), in mora biti vsaj štirikrat zvezno odvedljiva.

Kompleksni sestav komponent tenzorja ravninskega stanja napetosti in vsoto obeh normalnih napetosti, ki se pojavljata ob parcialnih odvodih v enačbi (3), lahko izrazimo z dvema analitičnima funkcijama [7] $\varphi_1(z)$ in $\psi_1(z)$ v kompleksni ravnini (z).

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 \left[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)} \right] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} &= 2 \left[z \varphi_1''(z) + \psi_1'(z) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Iz tega zapisa je razvidno, da so tudi koeficienti ob parcialnih odvodih v osnovni enačbi (3) funkcije kompleksne spremenljivke z .

Podobno lahko transformiramo v kompleksno ravnino (z) tudi vse tri robne probleme.

Pri prvem robnem problemu imamo na robu predpisane upogibne in torzijske momente ter prečne sile.

$$\begin{aligned} m_{nn}(s)_k + m_{ss}(s)_k &= -4D(1+\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial \bar{t}} \\ m_{ss}(s)_k - m_{nn}(s)_k + 2i m_{ns}(s)_k &= \\ &= -4D(\nu-1) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} e^{2i\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{nz}(s)_k - i q_{sz}(s)_k &= \\ &= -8D \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial \bar{t}} e^{i\alpha}, \quad k=1,2 \end{aligned} \quad (5)$$

Pri drugem robnem problemu imamo na robu predpisan premik osrednje ravnine stene v smeri realne osi Z in naklon te ravnine v smeri normale n in loka s .

$$\begin{aligned} w(t, \bar{t}) &= u(s)_k \\ 2 \frac{\partial w}{\partial t} e^{-i\alpha} &= g_3(s)_k + i g_4(s)_k \end{aligned} \quad (6)$$

Pri tretjem robnem problemu so na določenih odsekih roba predpisani momenti in prečne sile (enačba 5), na preostalih odsekih pa sta predpisana premik in naklon osrednje ravnine (enačba 6).

Pri tem pomenijo:

- D — upogibno togost stene
- h — debelino stene
- q — prečno obremenitev
- $t, \bar{t}$ — kompleksni spremenljivki na robu stene, $t, \bar{t} \in L$
- $u(s)$ — premik stene na robu L v smeri osi Z
- $g_3(s), g_4(s)$ — naklon osrednje ravnine stene

3. KONFORMNA UPODOBITEV

Izpolnitev robnih pogojev pri steni, omejeni s poljubno krivuljo, je v kompleksni ravnini (z) zelo zahtevna, če je sploh mogoča.

Da bi lahko preprosteje izpolnili dane pogoje, preslikamo območje stene S v ravnini (z) konformno in obratno enolično s preslikovno funkcijo (7) v območje Σ nove kompleksne ravnine (ζ). Območje Σ je omejeno z eno oziroma z dvema centričnima krožnicama, slika 2.

$$\begin{aligned} z = x + iy &= r e^{i\alpha} = \omega(\zeta) = \omega[\varrho e^{i\theta}] = \\ &= \sum_{k=m}^{m_1} c_k \zeta^k \end{aligned} \quad (7)$$

Konformno upodobitev območja in obravnavanje stabilnostnega problema v novem območju omejenem s krožnicama izvedemo z diferencialnima operatorjema

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{|\omega'(\zeta)|} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad \text{in} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{|\omega'(\zeta)|} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \quad (8)$$

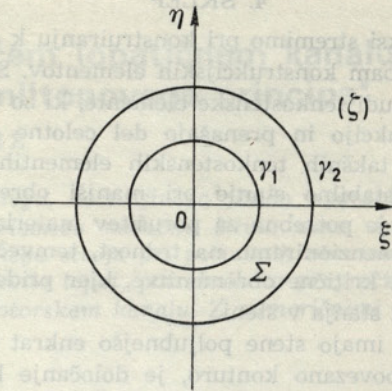
Če označimo realno funkcijo premika v ravnini (z) z indeksom ena, $w_1(z, \bar{z})$ in isto v ravnini (ζ) z $w(\zeta, \bar{\zeta})$, potem pa se z uporabo diferencialnih operatorjev (8) izrazi osnovna enačba elastične stabilnosti (3) v novi kompleksni ravnini (ζ) na naslednji način [8]:

$$\begin{aligned} w_{\zeta\bar{\zeta}\bar{\zeta}} |\omega'(\zeta)|^2 - w_{\zeta\bar{\zeta}\zeta} \omega'(\zeta) \bar{\omega}''(\zeta) - w_{\zeta\bar{\zeta}\zeta} \omega'(\zeta) \bar{\omega}''(\zeta) + \\ + w_{\zeta\bar{\zeta}\bar{\zeta}} |\omega''(\zeta)|^2 + \frac{h}{16D} \left\{ -2 w_{\zeta\bar{\zeta}\bar{\zeta}} \beta_2(\zeta) |\omega'(\zeta)|^4 + \right. \\ + w_{\zeta\bar{\zeta}\bar{\zeta}} a_2(\zeta) |\omega'(\zeta)|^2 \omega'^2(\zeta) + \\ + w_{\zeta\bar{\zeta}\bar{\zeta}} a_2(\zeta) |\omega'(\zeta)|^2 \omega'^2(\zeta) - w_{\zeta\bar{\zeta}\bar{\zeta}} \omega''(\zeta) \bar{\omega}''(\zeta) \omega'^3(\zeta) - \\ \left. - w_{\zeta\bar{\zeta}\bar{\zeta}} \omega''(\zeta) \bar{\omega}''(\zeta) \omega'^3(\zeta) + \frac{1}{h} q_1(\zeta, \bar{\zeta}) \right\} = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

Pri tem pomenijo:

$$\begin{aligned} a_2(\zeta) &= 2 \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta) \right] \\ \beta_2(\zeta) &= 2 [\Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\zeta)] \\ \varphi_1(z) &= \varphi(\zeta) \\ \psi_1(z) &= \psi(\zeta) \\ \Phi(\zeta) &= \frac{d\varphi_1(z)}{dz} = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \\ \Psi(\zeta) &= \frac{d\psi_1(z)}{dz} = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \\ |\omega'(\zeta)|^2 &= \omega'(\zeta) \bar{\omega}'(\zeta) \\ w_{\zeta} &= \frac{\partial w(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial \zeta} \\ w_{\bar{\zeta}} &= \frac{\partial w(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial \bar{\zeta}} \\ \omega'(\zeta) &= \frac{d[\omega(\zeta)]}{d\zeta} \\ q_1(\zeta, \bar{\zeta}) &= q(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (10)$$

Zgornja enačba elastične stabilnosti stene (9) v kompleksni ravnini (ζ) je parcialna diferencialna enačba četrtega reda z nekonstantnimi koeficienti, ki so funkcije kompleksnih spremenljivk ζ in $\bar{\zeta}$. Ti



Slika 2

koeficienti ob parcialnih odvodih so odvisni od obremenitve stene in njene oblike, zaradi tega je oblika diferencialne enačbe elastične stabilnosti za vsak posamezen primer oblike in obremenitve stene različna. Njeno reševanje pa je zelo zahtevno. Rešitev $w(\zeta, \bar{\zeta})$ pomeni obliko deformirane osrednje ravnine stene in lahko z njo izpolnimo vse predpisane robne pogoje. Tako dobimo homogen sistem enačb, ki ima netrivialno rešitev pri pogoju, da je determinanta koeficientov ob neznanih splošnih konstantah enaka nič. Iz algebraične enačbe za lastno vrednost homogenega sistema, ki izhaja iz pogojne determinante, izračunamo kritično zunanjo obremenitev. Velikosti deformacije osrednje ravnine stene pa zaradi uporabljene teorije majhnih deformacij pri izpeljavi diferencialne enačbe stabilnosti stene (1) ne moremo določiti.

Če označimo točke na konturi območja Σ v novi kompleksni ravnini (ζ) z $\sigma \in \gamma_k$, $k=1,2$ oziroma v polarnih koordinatah $\sigma = \varrho_k \cdot e^{i\theta}$, $k=1,2$, potem imajo enačbe robnih problemov v tej ravnini naslednjo obliko.

Enačbe prvega robnega problema

$$\begin{aligned} m_{nn}(s)_k + m_{ss}(s)_k &= -4D(1+\nu) \frac{w_{\sigma\sigma}}{|\omega'(\sigma)|^2} \\ m_{ss}(s)_k - m_{nn}(s)_k + 2im_{ns}(s)_k &= -\frac{4D(\nu-1)\sigma^2}{\varrho_k^2 \omega'(\sigma) |\omega'(\sigma)|^2} \\ [w_{\sigma\sigma} \omega'(\sigma) - w_{\sigma} \omega''(\sigma)] q_{nz}(s)_k - i q_{sz}(s)_k &= \\ = -8D \frac{\sigma}{\varrho_k |\omega'(\sigma)|^3} \left[w_{\sigma\sigma\sigma} - w_{\sigma\sigma} \frac{\omega''(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Drugi robni problem

$$\begin{aligned} w(\sigma, \bar{\sigma}) &= u(s)_k \\ \frac{2\sigma}{\varrho_k} \frac{w_{\sigma}}{|\omega'(\sigma)|} &= g_3(s)_k + i g_4(s)_k \\ k &= 1,2 \end{aligned} \quad (12)$$

4. SKLEP

V praksi stremimo pri konstruiranju k čim lažjim izvedbam konstrukcijskih elementov. Sem prištevamo tudi tenkostenske elemente, ki so vgrajeni v konstrukcijo in prenašajo del celotne obremenitve. V takšnih tenkostenskih elementih se pojavlja nestabilno stanje pri manjši obremenitvi, kakor pa je potrebna za porušitev materiala, zato jih ne dimenzioniramo na trdnost, temveč iščemo najmanjše kritične obremenitve, kjer pride do nestabilnega stanja v steni.

Kadar imajo stene poljubnejšo enkrat oziroma dvakrat povezano konturo, je določanje kritičnih zunanjih obremenitev v realni ravnini z realnima spremenljivkama po analitični poti, kakor tudi eksperimentalno, zelo težko izvedljivo. V takšnih primerih lahko določamo preslikovno funkcijo, ki konformno in obratno enolično preslika območje stene na krog oziroma centrični krožni kolobar na zgoraj opisani način, kjer potem analitično rešimo stabilnostni problem.

V posebnih primerih ravninskega stanja napeitosti v steni je lahko diferencialna enačba elastične stabilnosti v kompleksni ravnini (z) preprostejša in lažje rešljiva. Rešitev takšne diferencialne enačbe (3) nato transformiramo v kompleksno ravnino (ζ) in v tej ravnini rešujemo robni problem. Takšen primer je obravnavan v delu [6].

V primeru, kadar je diferencialna enačba elastične stabilnosti (9) v preslikani kompleksni ravnini zahtevnejša, lahko pri nadaljnjem reševanju uporabljamo primerno numerično metodo, s katero ob uporabi elektronskega računalnika zelo avtomatiziramo in poenostavimo določanje kritične zunanje obremenitve.

Na opisan način, z uporabo numerične diferenčne metode v polarnih koordinatah, je bil v delu [8] rešen stabilnostni problem ekscentričnega krožnega kolobarja, iz katerega je razvidno, da diferenčna metoda zelo dobro rešuje obravnavani stabilnostni problem. To delo bo objavljeno v enem od naslednjih člankov.

LITERATURA

- [1] Škerlj, M.: Splošna rešitev osnosimetričnega stabilnostnega problema krožne stene s centrično krožno odprtino. Doktorska disertacija, FS, Ljubljana 1967.
- [2] Yamaki, N.: Buckling of a Thin Annular Plate Under Uniform Compression, I. Appl. Mech. 1958.
- [3] Mansfield, E. H.: On the buckling journal of an annular plate, The quarterly journal of Mechanics and Appl. Mathematics, 1960.
- [4] Pertot, B.: Problemi elasto-plastičnih deformacij pri ravninskih elementih s posebnim ozirom na stabilnostne razmere. Doktorska disertacija, FS, Ljubljana 1972.
- [5] Evdokimov, A. E.: K vprašanju ob ustojčivosti kolcevih plastin, Vestn. Hark. poltehn. in-ta, No. 2 (50), 1965.
- [6] Kosel, F.: Uporaba funkcij kompleksnih spremenljivk pri stabilnostnih problemih, Magistrsko delo, FS, Ljubljana 1973.
- [7] Mushelišvili, N. I.: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, P. Noordhoff, Groningen 1958.
- [8] Kosel, F.: Stabilnostni problem dvakrat sovisne stene z uporabo funkcij kompleksne spremenljivke. Doktorska disertacija, FS, Ljubljana 1974.

Avtorjev naslov:

dr. ing. Franc Kosel,
Fakulteta za strojništvo
Univerze v Ljubljani

UDK 681.3

Kje smo in kje je svet pri uporabi računalnikov v strojništvu

V juliju 1974 je bila v Szegedu mednarodna konferenca »COMP-CONTROL 74« o uporabi elektronskih računalnikov v krmiljenju strojnih obratov. Konferenca se je udeležilo okrog 200 strokovnjakov. V šestih dneh dela konference je poročalo 111 referentov iz 16 držav.

Delo konference je bilo razdeljeno na 4 sekcije. Prva sekcija je obravnavala teorijo krmiljenja in metode dela. Razdeljena je bila v tri tematske skupine. V prvi skupini so obravnavali probleme integriranih vezij, v drugi probleme teorije odločitev pri integriranih vezjih in v tretji teorijo vodenja podjetij. V drugi sekciji, ki je bila zopet razdeljena na tri tematske skupine, so obravnavali sisteme integriranega krmiljenja, med njimi posebej strukturo integriranega sistema, kreiranje integriranega informacijskega krmilnega sistema ter teoretična vprašanja projektiranja integri-

ranih sistemov. Tretja sekcija je bila posvečena sistemski programski opremljenosti (*software*) za uporabnika s posebnimi poglavji za banke podatkov in sisteme za uporabnike. Četrta sekcija je obravnavala izgradnjo krmiljenega sistema z računalnikom, s tematskimi skupinami, ki so obravnavale aparaturno opremo (*hardware*) krmilnih sistemov in uporabne možnosti programske opreme.

Glede na res velik obseg dejavnosti je težko opisovati podrobnosti dela posameznih sekcij in tem. Iz naslovov pa vendar lahko razberemo, kje je bilo težišče dela.

Vsem, ki se ukvarjajo s to problematiko v naši industriji, bi priporočali, da si ogledajo zadevno literaturo.

Franc Roethel