UDK 532.528:621.224

Izračun odlepljanja toka v rotirajočem lopatičnem kanalu turbinskega stroja z uporabo Hamiltonovega principa*

JOACHIM RAABE

V stacionarnem relativnem toku idealnega, nestisljivega fluida uporabljamo Hamiltonov princip najmanjše akcije za določitev naravne širine osno simetričnega toka v vrtečem se kanalu rotorja turbinskega stroja pri poljubnih obratovalnih razmerah. Izpeljan je izraz za minimalno število lopat, potrebnih za preprečitev odlepljanja toka fluida zaradi vztrajnosti v rotorskem kanalu. Z numeričnimi primeri je osvetljena uporabnost te formule.

1.0 Uvod

Po Hamiltonovem principu poteka gibanje masne točke v mirujočem ali v enakomerno premočrtno gibajočem se koordinatnem sistemu tako, da ima Hamiltonova akcija W v času $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ ekstremno vrednost

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L \,\mathrm{d}\, t \tag{1}$$

Variacija akcije je torej enaka nič

$$\delta W = 0 \tag{2}$$

Lagrangeva funkcija L je razlika kinetične energije točke z maso m, ki se giblje s hitrostjo $\boldsymbol{c}$

$$T = \frac{1}{2} m \boldsymbol{c}^2 \tag{3}$$

in potenciala Φ zunanjih konservativnih sil, ki vplivajo nanjo

$$L = T - \Phi \tag{4}$$

Kjer je absolutna hitrost $\boldsymbol{c}$ odvisna samo od lege v prostoru, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{x})$, izražamo Hamiltonovo akcijo po tiru med točkama P $(\boldsymbol{x}_1)$ in P $(\boldsymbol{x}_2)$ takole

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \frac{L}{\boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{x})} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{5}$$

S tem obravnavamo tudi stacionarne tokove. Za množico masnih točk dobi akcija obliko

$$W^{**} = \sum_m W \tag{6}$$

Idealni fluid s konstantno gostoto ϱ obravnavamo kot kontinuum in Hamiltonovo akcijo pišemo v obliki

$$W = \varrho \int_{x_1}^{x_2} \iiint_V \left[\left(\frac{\boldsymbol{c}^2}{2} - \frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}m} \right) \Big/ \boldsymbol{c} \right] \mathrm{d}\, V \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{7}$$

* Članek izhaja iz predavanja, ki ga je imel avtor poleti leta 1973 — na povabilo Titovih zavodov, Litostroj in Turboinštituta v Ljubljani — na Fakulteti za strojništvo Univerze v Ljubljani

V idealnem nestisljivem fluidu dobimo zunanjo silo na element $\mathrm{d}\, m$ iz porazdelitve tlakov

$$\mathrm{d}\, F_p = -\,\mathrm{grad} \left(\frac{p\, \mathrm{d}m}{\varrho} \right) \tag{8 a}$$

Omejimo se na opazovanje stacionarnega toka idealnega fluida, kjer je tlak p odvisen le od krajevnih koordinat; argument gradienta na desni strani enačbe pomeni formalno potencialni del $\mathrm{d}\,\Phi$ konservativne sile, ki deluje na masni element. Zanemarimo običajno konservativno silo — težo, pa dobimo z upoštevanjem

$$\mathrm{d}\, F_p = -\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{d}\,\Phi) \tag{8 b}$$

in izenačenjem argumentov gradientov iz obeh zadnjih enačb za diferencialni kvocient v enačbi (7) še obliko

$$\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\, m} = \frac{p}{\varrho} \tag{9}$$

M. Strscheletzky je pokazal, kako se da s temi prijemi obravnavati jedro mrtve vode tokov s cirkulacijo v votlinah, nastalih zaradi rotacije [1, 2].

Princip ekstremne akcije porabimo za določitev odlepljanja toka zaradi vztrajnosti v rotirajočem kanalu med lopatami rotorja turbinskega stroja. Za osno simetričen tok v diagonalnem rotorju z znano geometrijo in podanim hitrostnim trikotnikom (režimom obratovanja) izračunajmo tisto število lopat, ki pri stacionarnem pretakanju še zagotavlja prileganje zdravega toka na stene lopatičnega kanala. V naslednjem poglavju izpeljimo izraz za Hamiltonovo akcijo relativnega toka idealnega nestisljivega fluida, ki rotira s konstantno kotno hitrostjo ω.

2.0 Hamiltonova funkcija v stacionarnem relativnem toku idealnega nestisljivega fluida, ki rotira s konstantno kotno hitrostjo ω

2.01. *Teoretične osnove*

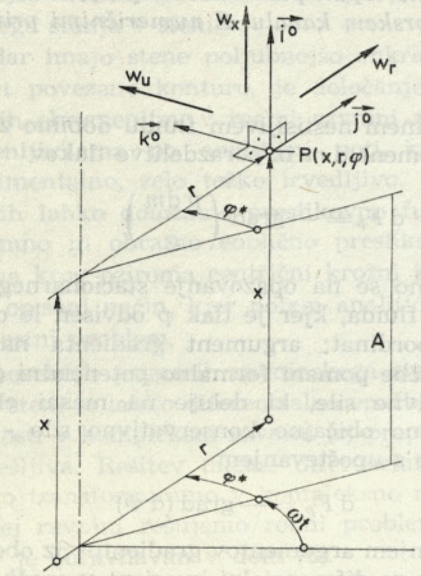
Suponiramo: konstantno gostoto ϱ in stacionaren relativni tok idealnega in nestisljivega fluida ter konstantno kotno hitrost ω rotirajočega sistema.

V Hamiltonovi akciji se pojavlja kinetična energija, ki dobi z relativno hitrostjo $\boldsymbol{w}$ obliko

$$T = \frac{1}{2} m\, w^2 \tag{10}$$

Namesto potenciala Φ konservativne zunanje sile na masno točko m, se pojavi funkcija

$$\Psi = -m\, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - \frac{m}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2 + \Phi \tag{11}$$



Sl. 1. *Relativni tok obravnavamo v cilindrskih koordinatah z vektorskimi enotami* $\boldsymbol{i}^\circ$, $\boldsymbol{j}^\circ$, $\boldsymbol{k}^\circ$

A — z ω rotirajoča osna ravnina

V rotirajočem desnem ortogonalnem koordinatnem sistemu (x, r, φ^*) po sliki 1, z vektorskimi enotami $\boldsymbol{i}^\circ$, $\boldsymbol{j}^\circ$, $\boldsymbol{k}^\circ$ v smereh osi, izrazimo posamezne člene funkcije Ψ

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\, \boldsymbol{i}^\circ \tag{12}$$

$$\boldsymbol{r} = r\, \boldsymbol{j}^\circ \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \omega\, r\, \boldsymbol{k}^\circ \tag{14}$$

$$\boldsymbol{w} = \dot{x}\, \boldsymbol{i}^\circ + \dot{r}\, \boldsymbol{j}^\circ + r\, \dot{\varphi}^*\, \boldsymbol{k}^\circ \tag{15}$$

S piko nad x, r in φ^* označimo substancialno odvajanje po času. Z enačbami od (10) do (15) sestavimo Lagrangevo funkcijo relativnega toka

$$L = T - \Psi = \frac{1}{2} m\, (\dot{x}^2 + \dot{r}^2 + r^2\, \dot{\varphi}^{*2}) + m\, \omega\, r^2\, \dot{\varphi}^* + \frac{1}{2} m\, \omega^2\, r^2 - \Phi \tag{16}$$

Minimalna akcija po Hamiltonovem principu zahteva

$$\delta W = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, \mathrm{d}\, t = 0 \tag{17}$$

Ta enačba je po pravilih variacijskega računa [3] identična z naslednjimi tremi Euler-Lagrangevimi diferencialnimi enačbami

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{18,1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \tag{18,2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi^*} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^*}\right) = 0 \tag{18,3}$$

Totalne diferenciale po času je treba razumeti kot substancialne odvode. Tako kakor pri absolutnem toku, so tudi tu zgornje diferencialne enačbe identične z enačbami gibanja opazovanega sistema. To pokažimo v podrobnostih za relativno gibanje v ravnini r, φ^*, ki se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω.

Komponenta v smeri r je

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) \equiv m\, r\, \dot{\varphi}^{*2} + 2\, m\, \omega\, r\, \dot{\varphi}^* + m\, \omega^2\, r - m\, \ddot{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \tag{19}$$

Z obodno komponento relativne hitrosti

$$w_u = r\, \dot{\varphi}^* \tag{20}$$

z radialno komponento substancialnega pospeška

$$\frac{\mathrm{d}\, w_r}{\mathrm{d}\, t} = \ddot{r} \tag{21}$$

in s komponento konservativne sile v radialni smeri

$$F_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{22}$$

dobimo iz enačbe (19) radialni del enačbe gibanja v relativnem sistemu s cilindrskimi koordinatami

$$m\, \frac{w_u^2}{r} + 2\, m\, \omega\, w_u + m\, \omega^2\, r - m\, \frac{\mathrm{d} w_r}{\mathrm{d}\, t} + F_r = 0 \tag{23}$$

V obodni smeri dobimo izraz

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi^*} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^*}\right) \equiv -\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^*} - 2\, m\, r\, \dot{r}\, \dot{\varphi}^* - m\, r^2\, \ddot{\varphi}^* - 2\, m\, \omega\, r\, \dot{r} = 0 \tag{24}$$

ki ga prepišemo v obliko

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^*} - m\, r\, \dot{r}\, \dot{\varphi}^* - m\, r\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(r\, \dot{\varphi}^*) - 2\, m\, \omega\, r\, \dot{r} = 0 \tag{25}$$

Z radialno komponento relativne hitrosti

$$w_r = \dot{r} \tag{26}$$

in z obodno hitrostjo w_u v smeri kotne hitrosti ω (po sliki 1 in enačbi (20)) ter s konservativno silo v obodni smeri

$$F_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi^*} \tag{27}$$

dobimo iz enačbe (25) obodno komponento enačbe gibanja v relativnem sistemu s cilindričnimi koordinatami

$$-m\frac{w_r\, w_u}{r} - 2\, m\, \omega\, w_r - m\frac{\mathrm{d}\, w_r}{\mathrm{d}\, t} + F_\varphi = 0 \tag{28}$$

Preskočili smo z absolutnim gibanjem identično komponento x Euler-Lagrangeve enačbe, pokazati pa se da prav tako njeno soglasje z enačbo gibanja v aksialni smeri.

Ponovno poudarimo: variacija Hamiltonove akcije je identična z enačbami gibanja opazovanega sistema. Ekstrem akcije po enačbi (16) pa kaže še smotrnost celotnega gibanja, kar iz samih enačb gibanja ni razvidno.

Potencial $\mathrm{d}\,\Phi$, ki pripada masi $\mathrm{d}\, m$ idealnega nestisljivega fluida v stacionarnem relativnem toku, izrazimo po enačbi (9) z gostoto in tlakom. Uvedemo še relativno hitrost

$$\boldsymbol{w}^2 = \dot{x}^2 + \dot{r}^2 + r^2\, \dot{\varphi}^{*2} \tag{29}$$

in napišemo Lagrangevo funkcijo

$$\mathrm{d}\, L = \mathrm{d}\, m\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2 + \omega\, r\, w_u + \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 - \frac{p}{\varrho}\right) \tag{30}$$

Ker je fluid kontinuum z gostoto ϱ, je

$$\mathrm{d}\, m = \varrho\, \mathrm{d}\, V \tag{31}$$

in variacija akcije (delimo jo poprej s konstantno gostoto ϱ) je

$$\delta\left(\frac{W}{\varrho}\right) \equiv \delta\, W^* \equiv \delta\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V \mathrm{d}\, V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2 + \omega\, r\, w_u + \frac{1}{2}\, r^2\, \omega^2 - \frac{p}{\varrho}\right)\mathrm{d}\, t = 0 \tag{32}$$

V stacionarnem relativnem toku nestisljivega idealnega fluida upoštevamo energijski stavek v obliki

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{\boldsymbol{w}^2}{2} - \frac{\omega^2\, r^2}{2} = \mathrm{const} \tag{33}$$

in izrazimo variacijo $\delta\,(-\,p/\varrho)$ v enačbi (32)

$$\delta\,(-\,p/\varrho) = \delta\,\frac{1}{2}(\boldsymbol{w}^2 - r^2\,\omega^2) \tag{34}$$

Izločimo tlak in dobimo za variacijo Hamiltonove akcije izraz

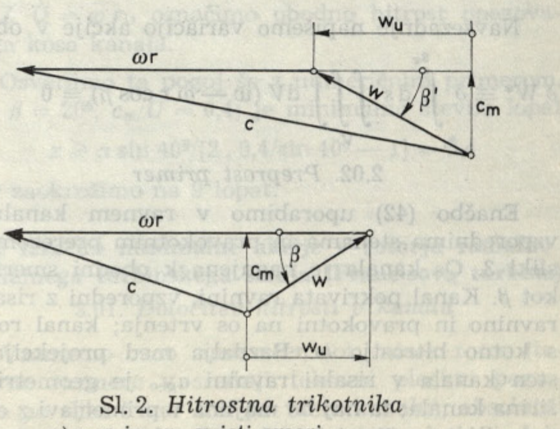
$$\delta\, W^* \equiv \delta\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V \mathrm{d}\, V\,(w^2 + \omega\, r\, w_u)\,\mathrm{d}\, t = 0 \tag{35}$$

V stacionarnem toku zamenjamo časovni diferencial $\mathrm{d}t$ z elementom relativne tekovnice $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$

$$\mathrm{d}\, t = \frac{\mathrm{d}\, s}{w} \tag{36}$$

V variaciji akcije $\delta\, W^*$ zamenjamo časa t_1 in t_2 z ustreznima lokoma s_1 in s_2 na relativni tokovnici delca:

$$\delta\, W^* \equiv \delta\int_{s_1}^{s_2}\iiint_V \mathrm{d}\, V\left(\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \omega\, r\, w_u\,\frac{\mathrm{d}\, s}{w}\right) = 0 \tag{37}$$



Sl. 2. *Hitrostna trikotnika*
a) $\omega\, r$ in w_u v isti smeri
b) $\omega\, r$ in w_u nasprotno usmerjeni

V tej enačbi ima obodna komponenta relativne hitrosti w_u po sliki 2a smer obodne hitrosti $\omega\, r$. V naše račune uvedemo za turbinske stroje značilen hitrostni trikotnik po sliki 2b, kjer je obodna komponenta relativne hitrosti w_u usmerjena nasproti obodni hitrosti $\omega\, r$. Enačba (37) se glasi

$$\delta\, W^* \equiv \delta\int_{s_1}^{s_2}\iiint_V \mathrm{d}\, V\left(\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\, \boldsymbol{s} - \omega\, r\, w_u\,\frac{\mathrm{d}\, s}{w}\right) = 0 \tag{38}$$

Iz hitrostnega trikotnika na sliki 2b preberemo zvezo med $\boldsymbol{w}$ in relativnim kotom natoka β

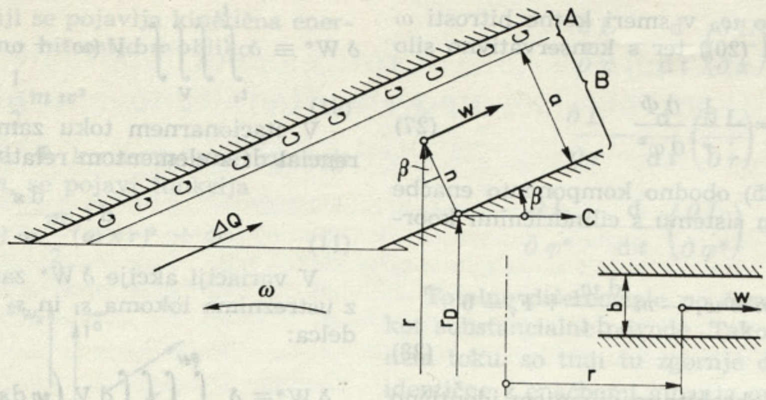
$$w_u = w\cos\beta, \tag{39}$$

in s skalarnim produktom vzporednih vektorjev $\boldsymbol{w}$ in $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$

$$\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = w\,\mathrm{d}\, s \tag{40}$$

(kjer sta w in $\mathrm{d}s$ velikosti vektorjev $\boldsymbol{w}$ in $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$) preoblikujemo drugi člen pod integralom

$$-\,\omega\, r\, w_u\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{w}} = -\,\omega\, r\, w_u\,\frac{\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{w}^2} = -\,\omega\, r\, w_u\,\frac{w\,\mathrm{d}\, s}{w^2} = -\,\omega\, r\cos\beta\,\mathrm{d}\, s \tag{41}$$



Sl. 3. *Enačbo 42 uporabimo v ravnem kanalu s paralelnima stenama*
A — mrtva voda, B — zdravi tok, C — obodna smer

Navsezadnje napišemo variacijo akcije v obliki

$$\delta W^* \equiv \delta \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}s \iiint_V \mathrm{d}V\,(w - \omega\, r \cos\beta) = 0 \qquad (42)$$

2.02. *Preprost primer*

Enačbo (42) uporabimo v ravnem kanalu z vzporednima stenama in pravokotnim prerezom po sliki 3. Os kanala je nagnjena k obodni smeri za kot β. Kanal pokrivata ravnini, vzporedni z risalno ravnino in pravokotni na os vrtenja; kanal rotira s kotno hitrostjo ω. Razdalja med projekcijama sten kanala v risalni ravnini a_{geo} je geometrična širina kanala; ta naj bo majhna v primerjavi z osno razdaljo r_D. Skozi kanal teče volumenski tok ΔQ tako kakor v centrifugalni črpalki.

Absolutni tok nestisljivega idealnega fluida naj bo brez vrtincev. Zato ima relativni tok rotacijo $-2\,\omega$ okrog osi vrtenja. Tok naj nalega na tlačno stran kanala črpalke in naj ima fizikalno širino a, ki je različna od geometrične širine kanala a_{geo}. Preostali del rotirajočega kanala je ob sesalni strani napolnjen z mrtvo vodo, ki nastaja zaradi odlepljanja toka. V plasti med zdravim tokom in mrtvo vodo se hitrost nezvezno spremeni. V zdravem toku opazujmo prečno plast kanala z osno razdaljo r_D. Širina mrtve vode naj se po dolžini te plasti v smeri toka ne spreminja, tako ima prečna plast kanala konstantno dolžino ds. Pravokotno k risalni ravnini ima kanal višino b in plast zdravega toka pravokoten pretočni presek $a\,b$. Od točke z radijem r_D na tlačni strani kanala štejemo koordinato n, »normalo« relativnih tokovnic, saj leži v pretočni plasti in je pravokotna na tokovnice. Iz enačb gibanja stacionarnega relativnega toka in kontinuitetne enačbe izhaja naslednja porazdelitev hitrosti v kanalu [4]

$$w = \Delta Q/(b\,a) - \omega\,a + 2\,\omega\,n \qquad (43)$$

Radij točke z razdaljo n od tlačne strani je po sliki 3

$$r = r_D + n \cos\beta \qquad (44)$$

Z enačbama (43) in (44) izrazimo integral Hamiltonove akcije v enačbi (42)

$$w - \omega\,r\cos\beta = \Delta Q/(a\,b) - \omega\,a + 2\,\omega\,n - \omega\,r_D\cos\beta - \omega\,n\cos^2\beta \qquad (45)$$

Ker pa sta steni kanala vzporedni in je debelina mrtve vode konstantna, velja

$$\mathrm{d}s = \text{const} \qquad (46{,}1)$$

$$\beta = \text{const} \qquad (46{,}2)$$

Prostorninski element tekočinskega delca v plasti je

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}s\,b\,\mathrm{d}n \qquad (47)$$

Z enačbami (45), (46) in (47) dobimo za akcijo po enačbi (42) izraz

$$\mathrm{d}^2 W^* = \int \mathrm{d}s \iiint \mathrm{d}s\,b\,[\Delta Q/(a\,b) - \omega\,a + 2\,\omega\,n - \omega\,r_D\cos\beta - \omega\,n\cos^2\beta]\,\mathrm{d}n \qquad (48)$$

Ker sta b in ds konstantni veličini, integriramo samo po n in dobimo

$$\mathrm{d}^2 W^* = (\Delta Q/b - \omega\,a^2 + \omega\,a^2 - \omega\,a\,r_D\cos\beta - \frac{1}{2}\,\omega\,a^2\cos^2\beta)\,b\,\mathrm{d}s^2 \qquad (49)$$

Z diferencialom drugega reda hočemo poudariti, da je akcija opazovane plasti majhna, kvečjemu drugega reda velikosti. Obravnavani kanal je najpreprostejši model rotirajočega lopatičnega kanala v rotorju centrifugalne črpalke. V naslednja razmišljanja vključimo še obratovalni režim rotorja z upoštevanjem hitrostnega trikotnika. Volumenski pretok ΔQ izrazimo z meridiansko hitrostjo c_m in kotom nastavitve lopat β iz hitrostnega trikotnika na sliki 2

$$\Delta Q = a\,b\,c_m/\sin\beta \qquad (50)$$

Za akcijo plasti dobimo

$$\mathrm{d}^2 W^* = (c_m\,a/\sin\beta - \omega\,a\,r_D\cos\beta - \frac{1}{2}\,\omega\,a^2\cos\beta)\,b\,\mathrm{d}s^2 \qquad (51)$$

Pri podanih veličinah c_m, β, r_D in ω je Hamiltonova akcija odvisna samo še od neznane »naravne širine« a. Recimo, da se a oblikuje sam po sebi tako, da doseže akcija ekstrem. Velja naj torej

$$\partial\, d^2 W^* \equiv \frac{\partial\, d^2 W^*}{\partial a}\, d a = 0 \qquad (52,1)$$

Ker pa $d a$ ne more biti nič in imamo opraviti z eno samo spremenljivko a, zamenjamo parcialni diferencial s totalnim in zadnji izraz takole prepišemo

$$\frac{d\, d^2 W^*}{d a} = 0 \qquad (52,2)$$

Za naravno širino a, ki povzroči ekstremno vrednost akcije, dobimo pogoj

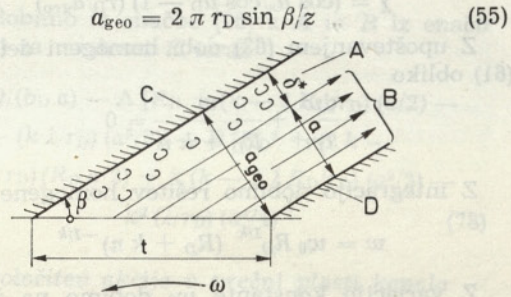
$$c_m/\sin\beta - \omega\, r_D \cos\beta - \omega\, a \cos^2\beta = 0 \qquad (53)$$

Izhaja

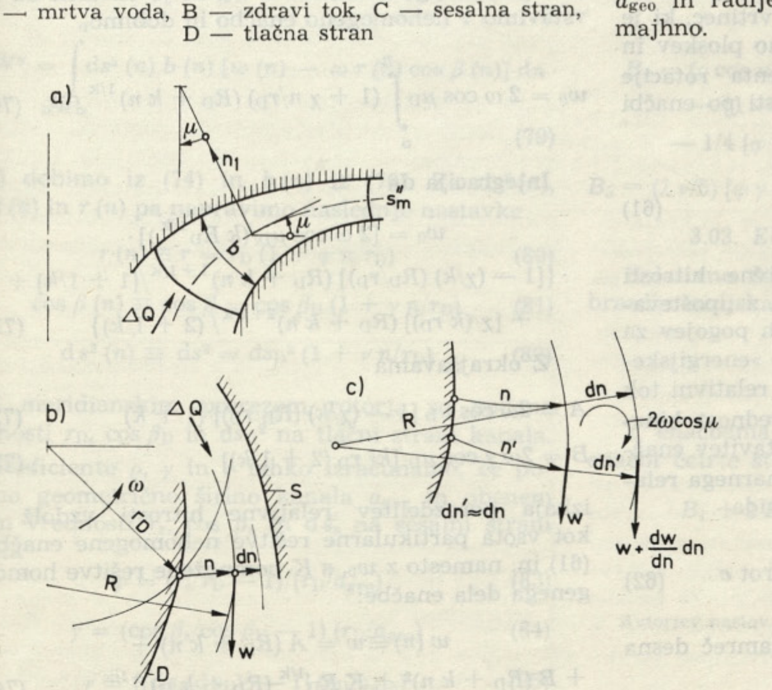
$$a = (r_D/\cos\beta)\,[2\, c_m/(\omega\, r_D \sin 2\beta) - 1] \qquad (54)$$

Geometrično širino ozkega kanala z neskončno tankimi lopatami dobimo iz števila lopat z

$$a_{geo} = 2\,\pi\, r_D \sin\beta/z \qquad (55)$$



Sl. 4. *Definicija debeline mrtve vode v ravnem kanalu*
A — mrtva voda, B — zdravi tok, C — sesalna stran, D — tlačna stran



S slike 4 preberemo debelino mrtve vode

$$\delta^* = a_{geo} - a \qquad (56)$$

Prileganje toka na obeh stenah kanala je dano z

$$\delta^* \leqslant 0 \qquad (57,1)$$

ali

$$a_{geo} \leqslant a \qquad (57,2)$$

Z vrednostjo a iz enačbe (54) in a_{geo} iz (55) dobimo

$$2\,\pi \sin\beta/z \leqslant$$

$$\leqslant (1/\cos\beta)\,[2\, c_m/(\omega\, r_D \sin 2\beta) - 1] \qquad (58,1)$$

Za minimalno število lopat, ki preprečuje odlepljanje fluida od sten kanala izhaja pogoj

$$z \geqslant \pi \sin 2\beta/[2\,(c_m/U)/\sin 2\beta - 1] \qquad (58,2)$$

Z $U = \omega\, r_D$ označimo obodno hitrost opazovanega kosa kanala.

Osvetlimo ta pogoj še z numeričnim primerom. Pri $\beta = 20^0$, $c_m/U = 0,4$; je minimalno število lopat

$$z \geqslant \pi \sin 40^0/[2\,.\,0,4/\sin 40^0 - 1] = 8,4$$

kar zaokrožimo na 9 lopat.

3.0 Izračun minimalne akcije v rotorju radialno aksialnega turbinskega stroja (Francisova turbina)

3.01. *Določitev hitrosti v kanalu*

Vzamemo osno simetričen tok, nizek rotor (tokovne razmere v srednji tokovni ploskvi pomenijo po sliki 5 kar tok po vsem kanalu); absolutni tok brez vrtincev in stacionaren relativni tok. Idealni fluid je nestisljiv, vpliv teže zanemarimo, pri velikem številu lopat je razmerje med širino kanala a_{geo} in radijem ukrivljenosti lopat R_D (slika 5 b) majhno.

Sl. 5. *Poljuben aksialno-radialni rotor (Francisov rotor)*
a) aksialni rez
b) pogled v smeri n_1
c) elementarni pravokotnik med bližnjima tokovnicama in normalama

Slika 5a prikazuje rotor v cirkularni projekciji. Projekcija opazovane tokovne ploskve je v meridianski ravnini meridianska tokovnica s''. Ta oklepa po sliki 5 na poljubnem mestu z ravnino, normalno k osi stroja, kot μ, ki se spreminja vzdolž meridianske tokovnice. Enak kot oklepa tudi normala n_1 osno simetrične tokovne ploskve z osjo stroja. Tokovna ploskev je dvojno zavita in se ne da razviti v ravnino. Na sliki 5b jo gledamo v smeri normale n_1, skupaj z obrisoma sosednjih lopat.

Iščemo porazdelitev relativne hitrosti w vzdolž normale k relativnim tokovnicam, ki leži v osno simetrični tokovni ploskvi in seka lopatični kanal. Za argument te normale vzamemo kar dolžino loka, ki ga merimo od tlačne stene (D) kanala. Akcijo iščemo v tanki plasti med dvema takima normalama in višino b v pravokotni smeri; b se spreminja v smeri n. Razdalja ds med sosednjima normalama je odvisna od argumenta n.

Vzdolž n se spreminjajo tudi radij ukrivljenosti R relativne tokovnice na osno simetrični tokovni ploskvi, kot μ med meridiansko tokovnico in radijem, kot β med relativno tokovnico in obodno smerjo ter razdalja opazovane prečne plasti od osi.

Rotacija relativne hitrosti w je po definiciji limita cirkulacije okrog elementarnega četverokotnika, ki ga tvorita normali n in n' ter relativni tokovnici (slika 5c), deljena z njegovo ploščino. Dobimo

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{w} \equiv \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}n} + \frac{w}{R} \qquad (60)$$

rot $\boldsymbol{w}$ kaže v nasprotno smer kakor ω, torej se suče okoli normale n_1 tako kakor relativni vrtinec, ki je pravokoten na osno simetrično tokovno ploskev in ima velikost $2\,\omega \cos\mu$. Ta komponenta rotacije mora ustrezati rotorju relativne hitrosti po enačbi (60) in zato dobimo

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}n} + \frac{w}{R} = 2\,\omega \cos\mu \qquad (61)$$

Iz te enačbe izhaja potek relativne hitrosti vzdolž n. Zgornji izraz izpeljemo tudi z upoštevanjem geometrije rotorja iz ravnotežnih pogojev za element fluida v smeri n in z uporabo »energijskega stavka« za stacionaren brezizguben relativni tok v smeri relativne tokovnice. Enakovrednost kinematičnih in dinamičnih izrekov za postavitev enačbe (61) izhaja iz enačbe gibanja stacionarnega relativnega toka idealnega nestisljivega fluida

$$\operatorname{grad}\left(p/\varrho + \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^2 - \frac{1}{2}r^2\omega^2\right) = \boldsymbol{w} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{c} \qquad (62)$$

pri supoziciji rot $\boldsymbol{c} = 0$. Takrat sta namreč desna in leva stran enačbe enaki nič.

V poglavju 2.01. smo pokazali, da z enačbo (61) podana rešitev enačbe gibanja v relativnem sistemu ustreza tudi bistvu Hamiltonovega principa.

Za reševanje enačbe (61) postavimo linearen potek radija ukrivljenosti

$$R = R_D + k\,n \qquad (63)$$

in dobimo

$$\mathrm{d}n = \mathrm{d}R/k \qquad (64)$$

Pri podanem rotorju izrazimo k z radijema R_D in R_S na tlačni in sesalni strani plasti in z geometrično širino kanala a_{geo}

$$k = (R_S - R_D)/a_{geo} \qquad (65)$$

Za potek kota μ vzdolž n pa vzemimo nastavek

$$\cos\mu = (1 + \chi\, n/r_D)\cos\mu_D \qquad (66)$$

Vrednosti μ_D in r_D na tlačni strani kanala poznamo. Iz znane geometrije rotorja dobimo χ, iz podanega μ_s na sesalni strani in geometrične širine kanala a_{geo},

$$\chi = (\cos\mu_s/\cos\mu_D - 1)\,(r_D/a_{geo}) \qquad (67)$$

Z upoštevanjem (63) dobi homogeni del enačbe (61) obliko

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}n} + \frac{w}{R_D + k\,n} = 0 \qquad (68)$$

Z integracijo dobimo rešitev homogene enačbe

$$w = w_0\, R_D^{1/k}\,(R_D + k\,n)^{-1/k} \qquad (69)$$

Z variacijo konstante w_0 dobimo na že znan način partikularno rešitev nehomogene enačbe (61). Rešitev homogene enačbe z w_0, ki je odvisen od n, vstavimo v nehomogeno enačbo in dobimo

$$w_0 = 2\,\omega\cos\mu_D \int_0^n (1 + \chi\, n/r_D)\,(R_D + k\,n)^{1/k}\,\mathrm{d}n \qquad (70)$$

Integracija da

$$w_0 = [2\,\omega\cos\mu_D/(k\,R_D^{1/k})]\cdot$$
$$\cdot\{[1 - (\chi/k)\,(R_D/r_D)]\,(R_D + k\,n)^{1+1/k}/[1 + 1/k] +$$
$$+ [\chi/(k\,r_D)]\,(R_D + k\,n)^{2+1/k}/(2 + 1/k)\} \qquad (71)$$

Z okrajšavama

$$A = 2\omega\cos\mu_D\,[1 - (\chi/k)\,(R_D/r_D)]/(1 + k) \qquad (72)$$

$$B = 2\omega\,\chi\cos\mu_D/[k^2\,r_D\,(2 + 1/k)] \qquad (73)$$

izhaja porazdelitev relativne hitrosti vzdolž n kot vsota partikularne rešitve nehomogene enačbe (61) in, namesto z w_0, s K pomnožene rešitve homogenega dela enačbe:

$$w(n) \equiv w = A\,(R_D + k\,n) +$$
$$+ B\,(R_D + k\,n)^2 + K\,R_D^{1/k}\,(R_D + k\,n)^{-1/k} \qquad (74)$$

K izračunamo s podanim volumenskim pretokom v kanalu ΔQ iz kontinuitetne enačbe

$$\Delta Q = \int_{n=0}^{a} b(n)\, w(n)\, dn \quad (75)$$

V enačbi se namesto geometrične širine kanala a_{geo} pojavlja širina a, pri kateri je ekstrem akcije. Za $b(n)$ postavimo

$$b(n) \equiv b = b_D (1 - \lambda\, n/r_D) \quad (76)$$

r_D in b_D sta podana na tlačni strani z meridianskim prerezom obravnavanega rotorja. Če pa poznamo še širino kanalov gonilnika, izračunamo s podano vrednostjo b_s na sesalni strani kanala in z a_{geo} vrednost λ

$$\lambda = (r_D/a_{geo})(1 - b_s/b_D) \quad (77)$$

Pri računanju integrala (75) upoštevamo, da je kvocient a/R_D majhen in da se da binome oblike $(1 + k\, a/R_D)^m$ približno izraziti z linearnim členom. (Dokaz bo dan v dodatku 4.)

Tako dobimo iz enačbe (75) z A in B iz enačb (72) in (73) za vrednost K izraz

$$K = \Delta Q/(b_D\, a) - A\,[R_D + (k - \lambda\, R_D/r_D)(a/2) - (k\,\lambda/r_D)(a^3/3)] - B\,[R_D^2 + (2\,k - \lambda\, R_D/r_D)(R_D\, a/2) + k\,(k - 2\,\lambda\, R_D/r_D)(a^3/3) - k^2 (\lambda/r_D)(a^4/4) \quad (78)$$

3.02. *Določitev akcije v prečni plasti kanala*

Akcijo $d^2 W^*$ v prečni plasti kanala, med dvema normalama, izrazimo z enačbama (42) in (48)

$$d^2 W^* = \int_{n=0}^{a} ds^2(n)\, b(n)\, [w(n) - \omega\, r(n) \cos\beta(n)]\, dn \quad (79)$$

$w(n)$ dobimo iz (74) in $b(n)$ iz (76). Za $ds^2(n)$, $\cos\beta(n)$ in $r(n)$ pa napravimo naslednje nastavke

$$r(n) \equiv r = r_D (1 + \varphi\, n/r_D) \quad (80)$$

$$\cos\beta(n) \equiv \cos\beta = \cos\beta_D (1 + \gamma\, n/r_D) \quad (81)$$

$$d s^2(n) \equiv ds^2 = ds_D^2 (1 + \nu\, n/r_D) \quad (82)$$

Z meridianskim prerezom rotorja so podane vrednosti r_D, $\cos\beta_D$ in ds_D^2 na tlačni strani kanala.

Koeficiente ϱ, γ in ν lahko izračunamo, če poznamo geometrično širino kanala a_{geo} in obenem s tem vrednosti r_s, $\cos\beta_s$ in $d s_s$ na sesalni strani kanala

$$\varphi = (r_s/r_D - 1)/(r_D/a_{geo}) \quad (83)$$

$$\gamma = (\cos\beta_s/\cos\beta_D - 1)(r_D/a_{geo}) \quad (84)$$

$$\nu = [(d s_s/d s_D)^2 - 1](r_D/a_{geo}) \quad (85)$$

V našem primeru poznamo meridianski prerez rotorja, ne pa števila lopat in geometrične širine kanala a_{geo}. Zato so k, χ, λ, φ in ν še poljubni. Z geometrijo meridianskega prereza so določene vrednosti φ, λ, ν. (Dokaz v dodatkih 1, 2, 3). Pri integraciji spet upoštevamo majhnost $k\, a/r_D$ in prekinemo binome z linearnim členom (dokaz v dodatku 4). Pretok v kanalu izrazimo s prečno meridiansko hitrostjo

$$\Delta Q = c_m\, b_D\, a/\sin\beta_D \quad (86)$$

uvedemo relativno, fizikalno širino kanala

$$x^* = a/r_D \quad (87)$$

in z brezdimenzijsko akcijo

$$Y = d^2 W^*/(d\, s_D^2\, b_D\, r_D^2\, \omega) \quad (88)$$

sestavimo za obravnavano plast v kanalu izraz

$$Y = B_1 x^* + B_2 x^{*2} + B_3 x^{*3} + B_4 x^{*4} + B_5 x^{*5} \quad (89)$$

Če postavimo $U = \omega\, r_D$ so B_i podani z

$$B_1 = (c_m/U)(1/\sin\beta_D) - \cos\beta_D \quad (90,1)$$

$$B_2 = (\nu \cos\mu_D/k)\,\{[1 - (\chi/k)(R_D/r_D)]/(1 + 1/k) + \chi\,(R_D/r_D)/(2\,k + 1)\} \cdot (R_D/r_D) - (1/2)(\varphi + \gamma + \nu - \lambda)\cos\beta_D \quad (90,2)$$

$$B_3 = [2\,\nu \cos\mu_D/(3\,k)]\,\{[1 - (\chi/k)(R_D/r_D)] \cdot (k - \lambda\, R_D/r_D)/(1 + 1/k) + \chi\,(R_D/r_D)(2\,k - \lambda \cdot R_D/r_D)/(2\,k + 1)\} - 1/3\,[\varphi\gamma - \lambda\,\nu + (\varphi + \gamma)(\nu - \lambda)] \cdot \cos\beta_D \quad (90,3)$$

$$B_4 = (\nu \cos\mu_D/2)\,\{\chi\,(k - 2\,\lambda\, R_D/r_D)/(2\,k + 1) - [1 - \chi/k\,(R_D/r_D)]\,\lambda/(1 + 1\,k)\} - 1/4\,[\varphi\,\gamma\,(\nu - \lambda) - \nu\,\lambda\,(\varphi + \gamma)]\cos\beta_D \quad (90,4)$$

$$B_5 = (\lambda\,\nu/5)\,[\varphi\,\gamma \cos\beta_D - 2\,\chi \cos\mu_D/(2 + 1\,k)] \quad (90,5)$$

3.03. *Ekstrem Hamiltonove akcije*

Relativno širino kanala x^*, pri kateri doseže brezdimenzijska akcija Y ekstrem, dobimo iz

$$\frac{dY}{dx^*} = 0 \quad (91)$$

Z enačbama (89) in (91) zadošča x^* naslednji enačbi četrte stopnje

$$B_1 + 2\,B_2 x^* + 3\,B_3 x^{*2} + 4\,B_4 x^{*3} + 5\,B_5 x^{*4} = 0 \quad (92)$$

(Konec prihodnjič)

Avtorjev naslov: Prof. Dr.-Ing. Joachim Raabe,
8023 Pullach/Isar,
Sonnenstrasse 1
B. R. D.