

UDK 389.6:513.101.51

Polni kot — enota SI za kot?

BOJAN KRAUT

Uvod

V januarju 1972 sem se v Strojniškem vestniku (letnik 18 — 1972, št. 1) oglasil s člankom »Mednarodni sistem enot SI — zdaj in v prihodnje«, v katerem sem se — med drugim — zavzemal za uveljavitev polnega kota kot enote za kot v mednarodnem sistemu enot SI. Tedaj sem menil tudi, da bi bilo potrebno dati polnemu kotu kot enoti za kot posebno, mednarodno sprejemljivo ime. Navedel sem najožjo povezanost polnega kota z vrtiljajem in dodal nekaj primerov računanja s polnim kotom pri periodičnih dogajanjih in vrtenju.

Podobnega predloga v strokovni literaturi dotlej nisem zasledil.

V nemškem standardu o kotih DIN 1315, izdanem v decembru 1971, so bile poleg radiana kot enote SI za kot navedene sicer še druge enote: polni kot, pravi kot, stopinja in gon, toda samo za primerjavo in brez posebnega poudarka prednosti ali posebnosti katerekoli od navedenih enot. V marcu 1972 pa je že izšel osnutek (*Entwurf*) novega standarda DIN 1315 o kotih, v katerem je polni kot naveden s posebnim poudarkom in mu je dodana tudi posebna označba: pla (iz lat.: *plenus angulus*). Po tem velja

$$\text{polni kot} = 1 \text{ pla} = 2\pi \text{ rad}$$

V opombi istega osnutka je še rečeno, da je ta enota zelo pomembna pri vrtilnih gibanjih in z njim povezanih veličinah.

V duhu navedenega osnutka iz marca 1972 je nato v marcu 1974 izšel novi nemški standard o kotih DIN 1315.

Generalna konferenca za uteži in mere (*Conférence Générale des Poids et Mesures*) v Parizu polnega kota kot enote za kot (in označbe zanj: pla) še ni sprejela. Ne glede na to pa se je — po objavi standarda DIN 1315 — polni kot začel pojavljati kot enota za kot (pla) tudi v strokovni literaturi.*

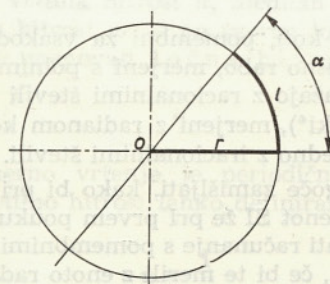
* Npr. M. Petzold-J. Gensheimer: *Wie rechnet man in SI-Einheiten um?* Carl Hanser Verlag, München, 1974.

O kotu in njegovi enoti

Kot α z vrhom v središču kroga O je premo sorazmeren razmerju dolžine loka l , ki ga kraka kota odrežeta na krogu, in polmera kroga r (sl. 1):

$$\alpha = \frac{1}{k} \cdot \frac{l}{r} \quad (1)$$

pri čemer je $1/k$ sorazmernostna konstanta (brezdimenzijsko število).



Slika 1

Kot je torej izpeljana veličina (z dimenzijo 1), katere enota je odvisna od izbire brezdimenzijske konstante k :

a) Pri vrednosti konstante $k = 1$ dobimo skladno (koherentno) enoto za kot pri razmerju $l/r = 1$, tj. $l = r$.

Kot, pri katerem je ustrezni lok l enak polmeru r , se imenuje radian (rad), znaša pa $360^\circ : 2\pi = 57,295\,78\dots^\circ$.

b) Pri vrednosti konstante $k = 2\pi$ dobimo skladno enoto za kot pri razmerju $l/2\pi r = 1$, tj. pri $l = 2\pi r$.

Kot, pri katerem je ustrezni lok l enak vrednosti $2\pi r$, tj. obodu kroga, je polni kot (360°).

Polni kot lahko definiramo tudi kot kot, katerega drugi krak se po 1 vrtiljaju pokriva s prvim krakom. Polni kot se torej tudi odlično ujema z 1 vrtiljajem.

V mednarodnem sistemu enot SI je skladna enota za kot — radian, kar ustreza analitičnemu kotu. S to enoto pa ni uveljavljeno eno najosnovnejših načel tega sistema enot, po katerem naj bi sistem vseboval enote — osnovne ali izpeljane —, ki naj bi bile v rabi tako v znanosti kakor tudi v tehniški in splošni življenjski praksi.

Radian nikakor ni enota, ki bi se mogla uveljaviti v tehniški in splošni praksi, za kateri so posebno pomembni koti, ki so deli polnega kota. Ker je

$$\text{polni kot} = 2\pi \text{ rad} = 2(3,141\,592\,653\,5\dots) \text{ rad}$$

dobimo:

za kot v stopinjah	del polnega kota	kot vadianih
360	$1/1 = 1$	6,283...
180	$1/2 = 0,5$	3,141...
120	$1/3 = 0,333\dots$	2,094...
90	$1/4 = 0,25$	1,570...
60	$1/6 = 0,166\dots$	1,047...
45	$1/8 = 0,125$	0,785...
30	$1/12 = 0,083\dots$	0,523...

Preprosti koti, pomembni za vsakodnevno tehniško in splošno rabo, merjeni s polnim kotom kot enoto, se izražajo z racionalnimi števili (celimi števili ali ulomki*), merjeni z radianom kot enoto pa se izražajo vedno z iracionalnimi števili.

Ni si mogoče zamišljati, kako bi pri doslednem vpeljevanju enot SI že pri prvem pouku geometrije moglo potekati računanje s pomembnimi koti — deli polnega kota, če bi te merili z enoto radian.

Prav tako bi bilo skrajno nepregledno in zamotano ter zato popolnoma nesprejemljivo, če bi hoteli označevati preproste kote v risbah z mnogimi decimalnimi enotami radian.

Kakorkoli bodo stopinje, ki sicer niso skladne enote mednarodnega sistema enot SI, tudi še nadalje mnogo v rabi, je njihovo preračunavanje v dele polnega kota zelo preprosto in natančno, medtem ko to ne velja za preračunavanje v radiane.

Izredno nepregledno bi tudi bilo, če bi kote pri vrtenju merili morda z radiani in ne — kar je pač najnaravnejše — s polnimi koti (= vrtljaji).

* Menda po prvem »računalniku« — 10 prstih obeh rok — si je človek izbral dekadni sistem števil z osnovo 10, ki je deljiva samo z 2 in 5. Iz tega izhajajo neskončni decimalni ulomki za $1/3$, $1/6$ in $1/12$. Številski sistem z osnovo 12 (ducat) bi bil mnogo ugodnejši, ker je osnova deljiva z 2, 3, 4 in 6. Posebno vrednost tega sistema so poznali že stari narodi, ki so z 12 in njegovimi mnogokratniki (24, 60, 360) delili tako dneve na ure, minute in sekunde, kakor tudi polni kot na stopinje, minute in sekunde.

Velike prednosti danes — žal — neizvedljivega sistema števil z osnovo 12 je podrobno prikazal Jean Essig v knjigi *Douze — notre dix futur* (»Dvanajst — naš deset prihodnosti«), o kateri je bila v SV 1956/1 objavljena obširnejša ocena.

Če bomo enoto kota radian uporabljali samo pri reševanju analitičnih problemov v znanosti in tehniki, v vsakodnevni tehniški in splošni praksi pa je ne bomo uporabljali, potem ta enota ne ustreza osnovnemu načelu sistema SI: splošni uporabnosti. (Ne smemo prezreti, da kot ni veličina, ki bi se tikala samo znanosti, ampak je veličina vsakodnevne splošne rabe, s katero se sreča vsakdo že na začetku osnovnega šolanja.)

Vse to nedvoumno govori za polni kot kot enoto za kot v mednarodnem sistemu enot SI.

*

Z vpeljavo polnega kota kot enote za kot bi se seveda ustrezno spremenile nekatere oblike enačb. Naj navedem nekaj primerov enačb z analitičnimi koti $\hat{a}$, merjenimi v radianih, in s koti α , merjenimi z enoto polni kot:

1. Evolventna (involutna) enačba se glasi

$$\text{inv } \alpha = \tan \alpha - \hat{a} \quad (2a)$$

$$\text{inv } \alpha = \tan \alpha - 2\pi \alpha \quad (2b)$$

2. Lego težišča krožnega loka določa

$$y = r \frac{\sin \alpha}{\hat{a}} \quad (3a)$$

$$y = r \frac{\sin \alpha}{2\pi \alpha} \quad (3b)$$

3. Razmerje sil pri trenju vrvi na kolutu je

$$\frac{F_1}{F_2} = e^{\mu \hat{a}} = \exp \mu \hat{a} \quad (4a)$$

$$\frac{F_1}{F_2} = e^{\mu 2\pi \alpha} = \exp \mu 2\pi \alpha \quad (4b)$$

Enačbe z analitičnim kotom $\hat{a}$, merjenim v radianih, so samo po obliki, tj. samo navidezno preprostejše. Ker si namreč v praksi z enoto radian nimamo kaj pomagati, moramo kot $\hat{a}$ v radianih v vsakem primeru preračunavati (npr. v kot α° , merjen v stopinjah):

$$\hat{a} = 2\pi \alpha = \frac{2\pi}{360} \alpha^\circ \quad (5)$$

Navedeno seveda nikakor ne zadeva rabe enote radian kot analitične enote za kot v matematiki in tehniških znanostih. Vendar bi bilo primerno izogniti se zamenjavam in napakam s tem, da bi enoto radian dosledno imenovali enoto za analitični kot ali — morda še bolje — enoto za ločno

mero, kakršno poimenovanje je mogoče pogostoma opaziti v strokovni literaturi, čeprav še nedosledno (angl.: *circular measure*, *radian measure*, franc.: *mesure circulaire*, *mesure d'arc*, nem.: *Bogenmaß*).

O izpeljanih veličinah kota

Najpomembnejša iz kota izpeljana veličina, ki se pojavlja pri časovnem premikanju enega kraka kota proti drugemu, je kotna hitrost

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} \quad (6)$$

kar z uporabo enačbe (1) daje obliko

$$\alpha' = \frac{1}{k} \cdot \frac{d(l/r)}{dt} = \frac{1}{kr} \cdot \frac{dl}{dt} \quad (7)$$

Pri tem je diferencialni kvocient enak obodni hitrosti

$$v = \frac{dl}{dt} \quad (8)$$

Iz tega izhaja izraz za kotno hitrost

$$\alpha' = \frac{1}{k} \cdot \frac{v}{r} \quad (9)$$

Po izbiri konstante k dobimo:

a) Pri vrednosti konstante $k = 1$ dobimo za kotno hitrost

$$\alpha' = \frac{v}{r} = \omega \quad (10)$$

tj. veličino, ki se v znanstveni in strokovni literaturi dandanes na splošno imenuje kotna hitrost (angl.: *angular velocity*, franc.: *vitesse angulaire*, nem.: *Winkelgeschwindigkeit*), ki je analitična kotna hitrost, njena enota v mednarodnem sistemu enot SI pa je radian v sekundi (rad/s).

b) Pri vrednosti konstante $k = 2\pi$ dobimo za kotno hitrost

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{v}{r} = n \quad (11)$$

tj. veličino, ki jo imenujemo vrtilna hitrost (angl.: *velocity of rotation*, *rotational speed*, franc.: *vitesse de rotation*, nem.: *Drehgeschwindigkeit*). Njena enota v praksi je vrtljaj (angl. in franc.: *revolution*, nem.: *Umdrehung*) v sekundi*. Iz prejšnjega izvajanja pa je razvidno, da se vrtljaj popol-

noma ujema s polnim kotom, iz česar izhaja, da je enota za vrtilno hitrost enaka polnemu kotu v sekundi.

Kar velja pri primerjavi kotnih enot radian in polni kot, velja tudi pri primerjavi enot za kotno hitrost: rad/s in polni kot (ali vrtljaj) v sekundi.

Analitična kotna hitrost ω in vrtilna hitrost n sta povezani (10, 11) z enačbo

$$\omega = 2\pi n \quad (12)$$

zaradi česar so enačbe z analitično kotno hitrostjo ω po obliki preprostejše, na koncu pa moramo to kotno hitrost — po enačbi (12) — vendarle preračunavati v vrtilno hitrost n , ki je lahko merljiva in je pregleden pojem, medtem ko je analitična kotna hitrost ω , merjena v rad/s, za prakso popolnoma neuporabna.

Pomembni sta seveda obe. Da pa ne bi bilo zamenjav, je treba dosledno razlikovati tudi ti dve veličini. Glede na polni kot kot enoto za kot, bi bilo poimenovanje »kotna hitrost« mnogo primernejše za veličino vrtilna hitrost n , medtem ko bi analitično kotno hitrost ω — po vzorcu ločne mere — morda bolje imenovali ločna hitrost.

*

Enakomerno vrtenje je periodično dogajanje, katerega vrtilno hitrost lahko definiramo tudi z izrazom

$$n = \frac{1}{T} \quad (13)$$

pri čemer je T čas enega vrtljaja.

Podobno je pri periodičnih dogajanjih, ki niso vrtenje, definirana veličina frekvenca

$$f = \frac{1}{T} \quad (14)$$

katere enota v mednarodnem sistemu enot SI je 1 hertz (1 Hz = 1 s⁻¹).

Pri matematičnih preračunavanjih periodičnih dogajanj se pogostoma pojavlja mnogokratnik frekvence $2\pi f$. Tudi v tem primeru je bilo mogoče doseči preprostejše oblike enačb z vpeljavo nove veličine, ki je bila zelo neprepričljivo imenovana krožna frekvenca (angl.: *angular frequency*, franc.: *fréquence circulaire*, nem.: *Kreisfrequenz*)

$$\omega = 2\pi f \quad (15)$$

katere enota je s⁻¹ (toda ne: Hz!).

Kotna hitrost ω in krožna frekvenca ω imata znaten analitičen pomen, za tehniško prakso pa sta pomembni vrtilna hitrost n in frekvenca f .

* Imenovanje te enote »število vrtljajev« po nem.: *Drehzahl*) je slabo, ker bi bilo treba dodati vedno še — v kakšni časovni enoti. To poimenovanje se opušča kot zastarelo.

Povezavo analitične kotne hitrosti in vrtilne hitrosti ter frekvence in krožne frekvence naj v enačbah prikažeta naslednja primera:

1. Centrifugalna sila F , delujoča na maso m , ki se vrti s hitrostjo v po krožnici s polmerom r , znaša

$$F = m r \omega^2 = m \frac{v^2}{r} \quad (16 a)$$

$$F = m r (2 \pi n)^2 = m \frac{v^2}{r} \quad (16 b)$$

pri čemer je ω analitična kotna hitrost (rad/s), n pa je vrtilna hitrost, merjena s polnimi koti (vrtljaji) v sekundi.

2. Frekvenca f lastnega nihanja mase m na vzmeti s konstanto c izhaja iz izraza

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (17)$$

in je torej

$$f = \frac{\omega}{2 \pi} = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (18)$$

kjer je ω krožna frekvenca (s^{-1}) lastnega nihanja.

Poimenovanje enote za kot

Poimenovanje polnega kota je v svetovnih jezikih povsem različno

angl.: *perigon*
franc.: *angle complet*
nem.: *Vollwinkel*

Zato je treba poiskati enotno ime za polni kot kot enoto, prav tako pa tudi ustrezen znak.

V uvodu je bilo navedeno, da so Nemci s standardom DIN 1315 uvedli označbo za polni kot: pla. Iz tega izhaja tudi enota za kotno hitrost, merjeno s polnimi koti v sekundi: pla/s. Vprašanje je, če je označba pla primerna (npr. za označevanje kotov v risbah).

Razpredelnica 1

Praktične enote			Analitične enote		
ime veličine		enota	ime veličine		enota
kot	α	polni kot (» Γ «)	analitični kot (ločna mera)	$\hat{\alpha} = 2 \pi \alpha$	radian (rad)
vrtilna hitrost (»kotna hitrost«)	n	polni kot v sekundi (» Γ/s «)	analitična kotna hitrost (ločna hitrost)	$\omega = 2 \pi n$	rad/s
frekvenca	f	Hz ($= s^{-1}$)	krožna frekvenca	$\omega = 2 \pi f$	s^{-1}

V strokovni literaturi zahodnih držav je večkrat v rabi označba za enoto vrtilne hitrosti rev/s (rev iz angl. in franc.: *revolution*), kar ni poenoteno z nemško enačbo.

Poleg tega bi bilo potrebno za polni kot kot enoto izbrati enotno mednarodno ime, kakor velja to pri vseh enotah veličin. Temu imenu ustreznega naj bi bila potem kratka označba (primerna tudi za vpisovanje v risbah ipd.).

Za primer (in samo za primer!) naj izberem ime gon (ki je — žal — bilo izbrano za prav ponesrečeno in nekoristno delitev polnega kota na 400 delov, kar bi lahko brez škode prav hitro pozabili). Če bi torej dali polnemu kotu enotno mednarodno ime npr. gon z označbo npr. Γ , bi iz tega lahko izhajale enote

gon Γ
milligon $m\Gamma$
kilogon $k\Gamma$
gon v sekundi Γ/s itd.,

v risbe pa bi lahko vpisovali

za 90° : $\frac{1}{4} \Gamma = 0,25 \Gamma$
za 60° : $\frac{1}{6} \Gamma$ ipd.

Za povezavo z ločnimi merami bi seveda veljalo

$$1 \Gamma = 2 \pi \text{ rad}$$

$$1 \Gamma/s = 2 \pi \text{ rad/s}$$

*

Razpredelnica 1 naj pokaže pregled predlaganih kotnih veličin in enot, njihove izpeljanke ter frekvenco.

*

Bilo bi potrebno, da Generalna konferenca za uteži in mere v Parizu posveti ustrezno pozornost ureditvi teh vprašanj.