

# STROJNIŠKI VESTNIK

LETNIK 24

LJUBLJANA, JULIJ—AVGUST 1978

ŠTEVILKA 7—8

UDK 518.12:534.013

## Računanje nihajočih sistemov po metodi končnih elementov

MAKS OBLAK-RUDI PUŠENJAK

### 1. UVOD

Pri reševanju problemov v konstrukcijski mehaniki se vedno bolj uporabljo numerične metode. Z uporabo elektronskih računalnikov so šli v pozabo skoraj vsi grafični postopki za reševanje dinamičnih problemov. Uporaba računalnika prinaša torej manj zamudno reševanje z novimi metodami že prej rešljivih problemov, obenem pa omogoča obravnavanje pojmov, ki jih do sedaj ni bilo mogoče reševati računsko [1]. Z analitičnimi metodami je mogoče reševati le močno idealizirane konstrukcijske elemente, medtem ko je zanimanje za numerične metode privlačno za praktike posebno še zato, ker so mnogo bolj prilagodljive realnim modelom konstrukcij. Pri tem je najbolj opazna sprememba matrični zapis postopkov kot posledica uvajanja računalnikov pri reševanju dinamičnih problemov.

### 2. OSNOVNA ZAMISEL METODE

Metoda temelji na elementih matrične algebri in je izredno pripravna za računanje na elektronskih računalnikih. Problemi, ki jih rešujemo pri nihanjih, so opisani v večini primerov z ustreznimi diferencialnimi enačbami, ki so vezane na predpisane robne pa tudi začetne pogoje. Prevedba diferencialnih enačb v diskretizacijsko obliko nas poveže vselej do osnovne enačbe končnega elementa. Ko nastavimo te enačbe za vse elemente strukture in jih združimo v skupno matriko, dobimo *enačbo strukture*. Dinamične probleme rešujemo tako, da statičnemu ravnotežju, upoštevajoč D'Alambertovo načelo, dodamo še vztrajnostne sile

$$-\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

Kadar ne upoštevamo sil dušenja in ko ne delujejo na obravnavani sistem nobene zunanje sile, govorimo o *lastnem nedušenem nihanju*.

Načelo virtualnih pomikov, ki velja za primer statičnega ravnotežja, nam z uporabo diskretizacijske enačbe (interpolacijsko funkcijo poznamo!) daje matrični zapis enačbe

$$[M] \{U\} + [K] \{U\} = \emptyset \quad (1)$$

Kadar je nihanje harmonično, rešujemo enačbo (1) z nastavkom

$$\{U\} = \{q\} e^{i\omega t} \quad (2)$$

Tako dobimo karakteristično enačbo lastnega nedušenega nihanja

$$([K] - \omega^2 [M]) \{q\} = \emptyset \quad (3)$$

ki pomeni homogen sistem linearnih enačb za amplitudni vektor  $\{q\}$ . Za netrivialne rešitve mora biti

$$\det ([K] - \omega^2 [M]) = \emptyset \quad (4)$$

iz česar izračunamo potem vse lastne frekvence sistema in njim pripojene lastne vektorje, ko vstavljamo v enačbo (3) vrednosti za izračunane lastne frekvence.

V primerih, ko komponente vozliščnega vektorja  $\{U\}$  parcioniramo na bistvene in nebistvene prostostne stopnje [2], računamo v enačbi (4) s kondenzirano togostno matriko

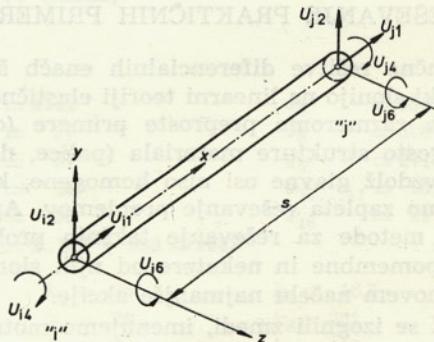
$$[K_c] = [K_{bb}] - [K_{bn}] [K_{nn}]^{-1} [K_{nb}] \quad (5)$$

ozziroma masno matriko

$$[M_c] = [V]^T [M] [V] \quad (6)$$

kjer pomeni

$$[V] = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{nn}]^{-1} \cdot [K_{nb}] \end{bmatrix}$$



Slika 1

$$\{U_i\} = \begin{pmatrix} U_{i1} \\ U_{i2} \\ U_{i4} \\ U_{i6} \end{pmatrix} \quad \{U_j\} = \begin{pmatrix} U_{j1} \\ U_{j2} \\ U_{j4} \\ U_{j6} \end{pmatrix}$$

Če na linijskem elementu upoštevamo samo vplive osne sile ter upogibnega in torzijskega momenta, dobimo v vozlišču »i« (začetek elementa) in »j« (konec elementa) vektorja pomikov.

Za linijski končni element na sliki 1 lahko zapišemo togostno in masno matriko elementa kadar rešujemo probleme longitudinalnih, transverzalnih, upogibnih in torzijskih nihanj.

$$[K]^e = \frac{EI_z}{s^3} \begin{bmatrix} \frac{As^2}{I_z} & 0 & 0 & 0 & -\frac{As^2}{I_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 6s & 0 & -12 & 0 & 6s \\ 0 & 0 & \frac{I_t}{2I_z} \frac{s^2}{1+\nu} & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_t}{2I_z} \frac{s^2}{1+\nu} & 0 \\ 0 & 6s & 0 & 4s^2 & 0 & -6s & 0 & 2s^2 \\ -\frac{As^2}{I_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{As^2}{I_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & -6s & 0 & 12 & 0 & -6s \\ 0 & 0 & -\frac{I_t}{2I_z} \frac{s^2}{1+\nu} & 0 & 0 & 0 & \frac{I_t}{2I_z} \frac{s^2}{1+\nu} & 0 \\ 0 & 6s & 0 & 2s^2 & 0 & -6s & 0 & 4s^2 \end{bmatrix}$$
  

$$[M]^e = \frac{\rho As}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 22s & 0 & 54 & 0 & -13s \\ 0 & 0 & \frac{140 I_t}{A} & 0 & 0 & 0 & \frac{70 I_t}{A} & 0 \\ 0 & 22s & 0 & 4s^2 & 0 & 13s & 0 & -3s^2 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 13s & 0 & 156 & 0 & -22s \\ 0 & 0 & \frac{70 I_t}{A} & 0 & 0 & 0 & \frac{140 I_t}{A} & 0 \\ 0 & -13s & 0 & -3s^2 & 0 & -22s & 0 & 4s^2 \end{bmatrix}$$

### 3. REŠEVANJE PRAKTIČNIH PRIMEROV

Natančne rešitve diferencialnih enačb širjenja motenj, ki slonijo na linearnej teoriji elastičnosti, so znane za razmeroma preproste primere (oblike). Zelo pogosto strukture materiala (palice, drogovi, nosilci) vzdolž glavne osi niso homogene, kar vse še dodatno zapleta reševanje problemov. Aproximativne metode za reševanje takšnih problemov so zelo pomembne in nekatere od njih slonijo na Hamiltonovem načelu najmanje akcije.

Da bi se izognili zmedi, imenujemo motnje pri omenjenih inženirskeih problemih preprosto nihanja ali vibracije, kadar jih lahko reduciramo na sisteme s končnim številom prostostnih stopenj.

Enačbe širjenja valovanja in nihanja elastičnih tel so linearne parcialne diferencialne enačbe, kjer je poudarjeno upoštevanje začetnih in robnih

pogojev. V nekaterih primerih lahko parcialne diferencialne enačbe zamenjamo s sistemom navadnih enačb (kadar strukturo aproksimiramo s sistemom s končnim številom togih mas in vzmeti brez mase) [3].

Pri obravnavanju longitudinalnih nihanj tankih palic suponiramo ravno os, pri čemer koordinatno os v smeri te osi označimo kot os  $x$ . Prav tako predpostavimo, da je  $AE = \text{const}$ , pa dobimo valovno enačbo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

kjer je  $c$  hitrost širjenja valovanja

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Za obojestransko togo vpetje (slika 1) dobimo rešitve za lastne frekvence  $\omega_0^2 = \frac{E A}{m l}$

	$\omega_1/\omega_0$	$\omega_2/\omega_0$	$\omega_3/\omega_0$	$\omega_4/\omega_0$	$\omega_5/\omega_0$
analitično	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
MKE	$N = 10$	3,1545	6,3869	9,7762	13,3997
	$N = 20$	3,1448	6,3090	9,5122	12,774

Pri transverzalnih nihanjih nosilcev z majhno maso zanemarimo rotacijsko vztrajnost in vpliv prečne sile na deformacije, pa dobimo z upoštevanjem  $E I_z = \text{const.}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \emptyset \quad (8)$$

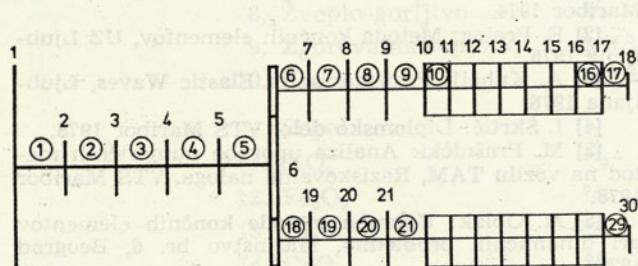
kjer je

$$c^2 = \frac{E I_z}{\rho A}$$

	$\omega_1/\omega_0$	$\omega_2/\omega_0$	$\omega_3/\omega_0$	$\omega_4/\omega_0$	$\omega_5/\omega_0$
analitično	22,373	61,669	120,85	199,85	298,56
MKE	$N = 10$	22,374	61,688	121,01	200,34
	$N = 20$	22,373	61,673	120,91	199,89

pri čemer je

$$\omega_0^2 = \frac{E I_z}{m l^3}$$



Sl. 2. Ekvivalentni pogonski sistem ladje z dvema dvotaktnima dizelskima motorjem

Pri torzijskih nihanjih pa rešujemo parcialno diferencialno enačbo

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \quad (9)$$

in je

$$c^2 = \frac{E}{2,5 \cdot \varrho}$$

Za enak zgled dobimo rešitve ( $\nu = 0,25$ )

$$\omega_0^2 = \frac{0,4 E I_t}{J l}$$

	$\omega_1/\omega_0$	$\omega_2/\omega_0$	$\omega_3/\omega_0$	$\omega_4/\omega_0$	$\omega_5/\omega_0$
analitično	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
MKE	$N = 10$	3,1545	6,3869	9,7762	13,399
	$N = 20$	3,1448	6,3090	9,5122	12,774

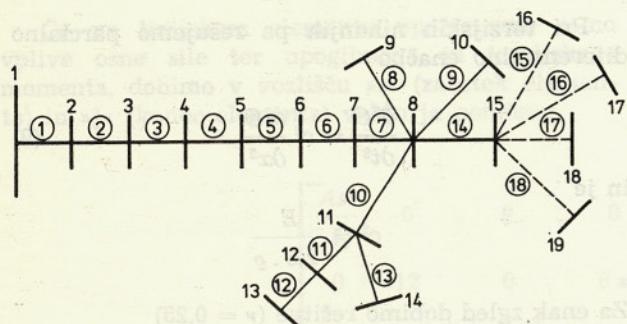
Veliko problemov v teoriji vibracij ne moremo rešiti natančno, medtem ko je v nekaterih drugih primerih reševanje z natančnimi rešitvami povezano z velikimi težavami. V teh primerih uporabljamo približne (numerične) metode, ki dajejo zadovoljive rezultate brez pretirano vloženega truda.

Na razmeroma preprostem zgledu (slika 2) s podatki [4], ki je rešljiv tudi po Holzerju (simetrija!), dobimo zanimive rezultate za lastne frekvence in pripadajoče lastne vektorje. Tako lahko fizikalno razložimo dvojne frekvence sistema in ničte lastne vektorje na posameznih razvezitvah. Veliko bolj zahteven za reševanje pa je zgled na sliki 3, pri katerem so rezultati potrjeni s preizkusi [5].

Vsi navedeni primeri so rešeni z izpopolnjeno verzijo programa DINALIN [6] po metodi končnih elementov (MKE).

$$\begin{aligned} J_1 &= 2742 & J_7 &= 390 \\ J_2 &= 29 & J_8 &= 300 \\ J_3 &= 51 & J_9 &= 271 \\ J_4 &= 26 & J_{10 \dots 17} &= 65,52 \\ J_5 &= 38 & J_{18} &= 21 \\ J_6 &= 2 \cdot 367 + 909 = 1643 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 29 & k_7 &= 16,7 \\ k_2 &= 29 & k_8 &= 231 \\ k_3 &= 86 & k_9 &= 115 \\ k_4 &= 11 & k_{10 \dots 16} &= 140 \\ k_5 &= 190 & k_{17} &= 45,4 \\ k_6 &= 137 \end{aligned}$$



Sl. 3. Šestvaljni vrstni motor z notranjim zgorevanjem

1 — vztrajnik, 2...7 — kolenasta gred, 8 — zobnik, 9 — tlačilka olja, 10 — tlačilka olja, 11 — zobnik, 12 — tlačilka goriva, 13 — regulator, 14 — tlačilka hidravličnega olja, 15 — jermencje, 16 — alternator, 17 — kompresor, 18 — dušilnik torzijskih nihanj, 19 — puhalo za hlajenje.

Rezultati k sliki (2):

$$\begin{array}{ll} \omega_1 = 55,74 \text{ Hz} & \omega_4^* = 345,4 \text{ Hz} \\ \omega_2^* = 108,1 \text{ Hz} & \omega_5 = 349,6 \text{ Hz} \\ \omega_3 = 156,5 \text{ Hz} & \omega_6 = 546,0 \text{ Hz} \end{array}$$

### Rezultati k sliki (3):

$$\begin{array}{ll} \omega_1 = 152,2 \text{ Hz} & \omega_4 = 877,7 \text{ Hz} \\ \omega_2 = 476,4 \text{ Hz} & \omega_5 = 1483,6 \text{ Hz} \\ \omega_3 = 482,0 \text{ Hz} & \omega_6 = 1788,0 \text{ Hz} \end{array}$$

Lastnih vektorjev ne izpisujemo, ker so izpisi za vse kolute preobsežni!

\* Lastni vektorji na posameznih vejah so enaki nič (koluti mirujejo!)

\*\* Dane togosti so deljene z  $10^6$ !

4 SKI FB

Reševanje teh problemov po MKE ima to prednost, da se prerez nosilca lahko poljubno spremi na, da statična nedoločenost in vpliv dodanih točkastih mas dodatno ne zapletata reševanja. Tako dobimo v primeru transverzalnih nihanj nosilca mase  $m$  z dodano točkasto maso v sredini nosilca po energijski metodi  $m_r = 1,371 m$ , oziroma  $m_r = \frac{192}{11,82^2} m$  po MKE, če sta masi enaki. Tudi pri tor- zijskih nihanjih lahko upoštevamo vpliv koncentri ranih mas (diskov) na lastne frekvence sistema. Priprava podatkov je preprosta, sicer obsežno delo v celoti opravi računalnik. Tudi robnim pogojem zadostimo tako rekoč sprotno (avtomatično), prav tako imajo rezultati fizikalno razlago in jih ne vsliljujemo metodi, kakor je to primer pri Holzerjevi metodi (logična interpretacija!).

$J_1$	= 22	$J_{11}$	= 0,078	$J_{16}$	= 0,16
$J_2 \dots 7$	= 1,11	$J_{12}$	= 0,022	$J_{17}$	= 0,08
$J_8$	= 0,12	$J_{13}$	= 0,013	$J_{18}$	= 1,29
$J_9$	= 0,02	$J_{14}$	= 0,02	$J_{19}$	= 1,03
$J_{10}$	= 0,02	$J_{15}$	= 0,59		
$k_1$	= 45,45	$k_{10}$	= 9,61	$k_{15}$	= 0,03
$k_2 \dots 6$	= 28,16	$k_{11}$	= 10,92	$k_{16}$	= 0,01
$k_7$	= 36,10	$k_{12}$	= 0,04	$k_{17}$	= 1,33
$k_8$	= 9,09	$k_{13}$	= 9,61	$k_{18}$	= 0,02
$k_9$	= 9,09	$k_{14}$	= 83,33		

## UPORABLJENE OZNAČBE

Veličina	Simbol	Enota
Gostota	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>
Vozliščni vektor	$U$	m, rad
Lastna frekvenca	$\omega$	rad/s
Modul elastičnosti	$E$	N/m <sup>2</sup>
Prerez nosilca	$A$	m <sup>2</sup>
Dolžina končnega elementa	$s$	m
Geometrijski moment vztrajnosti	$I$	m <sup>4</sup>
Moment vztrajnosti mase	$J$	kg m <sup>2</sup>
Poissonovo število	$v$	—
Dolžina nosilca	$l$	m
Čas	$t$	s
Število končnih elementov	$N$	—
Zasuk	$\Theta$	rad
Togost	$k$	N/m, Nm/rad
Masa nosilca	$m$	kg
Reducirana masa	$m_r$	kg

UPOBABI-JENI VIBI-

- [1] A. Kuhelj (ml.): Podiplomski seminar, VTŠ Maribor 1974.

[2] E. Prelog: Metoda končnih elementov, UZ Ljubljana 1975.

[3] A. Kuhelj: Propagation of Elastic Waves, Ljubljana 1976.

[4] I. Škrtič: Diplomsko delo, VTŠ Maribor 1978.

[5] M. Prašnički: Analiza uporabe numeričnih metod na vozilu TAM, Raziskovalna naloga, VTŠ Maribor 1978.

[6] M. Oblak: Uporaba metode končnih elementov pri dinamičnih problemih, Mašinstvo br. 6, Beograd 1977.

Naslov avtorjev: mag. Maks Oblak  
Gospodstvenška 19 a, Maribor  
Rudi Pušenjak, dipl. ing.  
Ormožka 4, Ljutomer