

UDK 539.384:624.073

# Vpliv debeline plošče na njen upogib

FRANCE BREŠAR, VITODRAG KUMPERŠČAK

*V tehniški praksi se za izračun napetostno-deformacijskega stanja elastične plošče uporablja največ Kirchhoffova teorija, ki je zelo primerna za tanke plošče. V članku je v obravnavi natančnost te teorije v odvisnosti od debeline plošče.*

## 1. Uvod

Obravnava je omejena na homogene izotropne plošče. V splošnem bodo plošče končne ali neskončne, z luknjami ali brez njih.

Koordinatni sistem postavimo tako, da srednjo ravnino izberemo za ravnino  $xy$ , os  $Z$  je torej pravokotna na ploščo. Plošča je enakomerno debela z debelino  $2h$ . Srednja ravnina je tudi kompleksna ravnina, njene točke pa so

$$z = x + iy, \quad (i^2 = -1) \quad (1.1)$$

Kartezijske koordinate točk v prostoru bomo tako označevali  $x, y, Z$ , valjne pa  $r, \varphi, Z$ .

Osnovni predpostavki Kirchhoffove teorije tankih plošč sta naslednji:

1. točke srednje ravnine se lahko pomaknejo samo v smeri osi  $Z$ , torej  $u_0 \equiv 0, v_0 \equiv 0, w_0 \neq 0$ ;

2. ravni prerez, pravokoten na srednjo ravnino, ostane tudi po deformaciji raven in pravokoten na (upognjeno) srednjo ravnino.

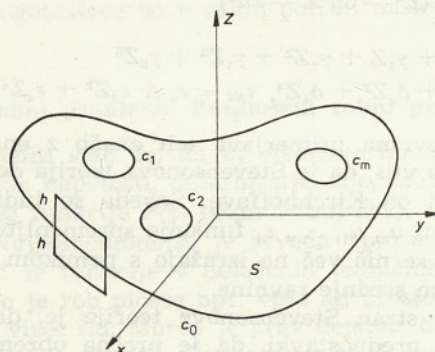
Izkušnje kažejo, da obe predpostavki dobro ustrezata dejanskemu stanju; seveda veljata tem bolj natančno, čim tanjša je plošča. Pri večjih debelinah pa obe predpostavki upravičeno vzbujata dvom. Kot njuna posledica so tudi komponente napetostnega tenzorja zelo preprosto odvisne od spremenljivke  $Z$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \alpha Z, \quad \sigma_y = \beta Z, \quad \tau_{xy} = \gamma Z, \\ \tau_{xz} &= \delta(h^2 - Z^2), \quad \tau_{yz} = \varepsilon(h^2 - Z^2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Vsi koeficienti se izražajo s parcialnimi odvodi upogiba  $w$  in so torej funkcije spremenljivk  $x$  in  $y$  [7]. Komponenta  $\sigma_z$  je neodvisna od  $w$  in v primerjavi z napetostima  $\sigma_x$  in  $\sigma_y$  zelo majhna.

Vsiljuje se vprašanje, do katerih debelin plošče je uporaba Kirchhoffove teorije še smiselna, do kdaj torej smemo ploščo imeti za tanko. Pri poskusu odgovora na to vprašanje smo si pomagali s Stevensonovo teorijo srednje debelih plošč [9], ki gotovo daje realnejšo sliko dejanskega napetostno-deformacijskega stanja v plošči.

V splošnem predpostavljamo, da ima plošča  $m$  lukenj, lahko tudi zarez. Zunanjo konturo označimo s  $c_0$ , konture lukenj s  $c_1, c_2, \dots, c_m$ . Množica vseh kontur je rob, ki ga označimo s  $c$



Slika 1

$$c = c_0 \cup c_1 \cup \dots \cup c_m \quad (1.3)$$

V primeru neskončne plošče zunanje konture, pa velja

$$c = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_m \quad (1.4)$$

Rob leži v srednji ravnini, določen je z enačbo

$$t = t(s) = x(s) + iy(s) \quad (1.5)$$

kjer je  $s$  naravni parameter in torej pomeni ločno dolžino krivulj roba. Od robnih krivulj zahtevamo, da so sklenjene, brez dvojnih točk, vsaj odsekoma dovolj gladke.

Del srednje ravnine, ki leži znotraj plošče, torej znotraj  $c_0$  in zunaj  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , bomo imenovali območje in ga označevali s  $S$ .

## 2. Stevensonova teorija srednje debelih plošč

Stevenson je leta 1942 izdelal teorijo upogiba plošč, ki zanesljivo daje realnejše rezultate kakor Kirchhoffova. Žal je matematično in numerično nekoliko zahtevnejša in se (še) ni uveljavila v tehniški praksi. Pri obravnavi si je Stevenson pomagal s funkcijami kompleksne spremenljivke. Delal je ob predpostavki, da ni prostorninskih sil ( $X = Y = Z = 0$ ) in je rešil ustrezeni sistem devetih parcialnih diferencialnih enačb, tri ravnotežne enačbe in šest Beltrami-Michellovih pogojev kompatibilnosti. Seveda je pri tem ustregel običajnim (fizikalnim) zahtevam, ki veljajo na zgornji in spodnji ravnini plošče:



$$\begin{aligned}\sigma_z(Z=h) &= -q, \quad \sigma_z(Z=-h) = 0 \\ \tau_{xz}(Z=\pm h) &= 0, \quad \tau_{yz}(Z=\pm h) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial Z}(Z=\pm h) &= 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

Dobil je naslednje rezultate

$$\begin{aligned}\sigma_x &= a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3 + a_5 Z^5 \\ \sigma_y &= \beta_0 + \beta_1 Z + \beta_2 Z^2 + \beta_3 Z^3 + \beta_5 Z^5 \\ \sigma_z &= \frac{q}{4h^3} (Z^3 - 3h^2 Z - 2h^3) \\ \tau_{xy} &= \gamma_0 + \gamma_1 Z + \gamma_2 Z^2 + \gamma_3 Z^3 + \gamma_5 Z^5 \\ \tau_{xz} &= \delta_0 + \delta_2 Z^2 + \delta_4 Z^4, \quad \tau_{yz} = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 Z^2 + \varepsilon_4 Z^4\end{aligned}\quad (2.2)$$

Že površna primerjava teh enačb z enačbami (1.2) daje vtis, da je Stevensonova teorija dosti natančnejša od Kirchhoffove. Seveda so tudi sedaj koeficienti  $a_0, a_1, \dots, \varepsilon_4$  funkcije spremenljivk  $x$  in  $y$ , ki pa se nič več ne izražajo s pomikom  $w_0$ , tj. s povsomo srednje ravnine.

Slaba stran Stevensonove teorije je, da velja samo ob predpostavki, da je prečna obremenitev  $q(x, y)$  na zgornjo ravnino plošče harmonična funkcija:

$$\Delta q(x, y) = \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0 \quad (2.3)$$

Vsekakor pa skoraj vsako obremenitev lahko aproksimiramo s harmonično. Torej tudi ta pomanjkljivost ni prehuda, vsaj ne hujša od one v Kirchhoffovi teoriji, kjer se zahteva, da je  $q(x, y)$  bistveno manjša veličina (1 : 1000) od drugih.

Zaradi (2.3) lahko menimo, da funkcija  $q(x, y)$  pomeni realni del neke analitične funkcije. Če to funkcijo označimo s  $P''(z)$ , je

$$q(x, y) = \operatorname{Re}[P''(z)] = \frac{1}{2}[P''(z) + \overline{P''(z)}] \quad (2.4)$$

$P''(z)$  pomeni drugi odvod funkcije  $P(z)$ , prečna črta pomeni konjugirano vrednost.

Znano je, da v teoriji tankih plošč upogib  $w$  lahko izrazimo z dvema analitičnima funkcijama  $\Omega(z)$  in  $\omega(z)$ , pri čemer moramo poznati še kakšno partikularno rešitev. Ob predpostavki (2.4) bi dobili tak rezultat

$$\begin{aligned}w = w_0 &= -\frac{1-\nu}{8\mu} \operatorname{Re}[\bar{z}\Omega(z) + \omega(z)] - \\ &\quad - \frac{3(1-\nu)}{128\mu h^3} \operatorname{Re}[z^2 \overline{P'(z)}]\end{aligned}\quad (2.5)$$

(Bralec se v nadaljevanju morda ne bo strinjal s koeficientom  $(1-\nu)/8\mu$ , ki bi ga lahko vključili v funkcije  $\Omega$ ,  $\omega$  in  $P$ . Zapis je prilagojen poznejšemu primerjanju s Stevensonovimi rezultati.) Vsi koeficienti v (1.2), torej vse komponente napetostnega tenzorja se tako dajo izraziti s tremi analitičnimi funkcijami  $\Omega$ ,  $\omega$  in  $P$  pri čemer je  $P$  generirana iz prečne obremenitve  $q$ .

V teoriji tankih plošč za pomike srednje ravnine velja  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ , upogib  $w$  pa ni odvisen od  $Z$ . V Stevensonovi teoriji dobimo dosti natančnejše rezultate:

$$\begin{aligned}u &= u_0 + u_1 Z + u_2 Z^2 + u_3 Z^3 + u_5 Z^5 \\ v &= v_0 + v_1 Z + v_2 Z^2 + v_3 Z^3 + v_5 Z^5 \\ w &= w_0 + w_1 Z + w_2 Z^2 + w_4 Z^4\end{aligned}\quad (2.6)$$

pri čemer  $u_0$  in  $v_0$  v splošnem nista enaka nič. Vsi koeficienti v (2.2) in (2.6) (torej  $a_0, a_1, \dots, w_4$ ) so funkcije spremenljivk  $x$  in  $y$  in se dajo izraziti s petimi analitičnimi funkcijami  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $P$ , pri čemer pomen  $P$  že poznamo. Zaradi primerjave z (2.5) si oglejmo samo, kako se izražajo koeficienti za izračun upogiba  $w$ :

$$\begin{aligned}w_0 &= \operatorname{Re}\left[-\frac{1-\nu}{8\mu}(\bar{z}\Omega(z) + \omega(z)) + \frac{h^2}{2\mu}\Omega'(z)\right] + \\ &\quad + \operatorname{Re}\left[-\frac{3(1-\nu)}{128h^3\mu}z^2\overline{P'(z)} + \frac{3}{32h\mu}\bar{z}P(z) + \frac{h}{4\mu}P''(z)\right] \\ w_1 &= -\frac{1}{\mu} \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \frac{\nu}{1+\nu} \varphi'(z) + \frac{1}{4} P''(z)\right] \\ w_2 &= -\frac{1}{\mu} \operatorname{Re}\left[\frac{\nu}{4} \Omega'(z) + \frac{3}{16h} P''(z) + \frac{3\nu}{32h^3} \bar{z}P'(z)\right] \\ w_4 &= \frac{1+\nu}{32\mu h^3} \operatorname{Re}[P''(z)]\end{aligned}\quad (2.7)$$

V teoriji tankih plošč je seveda  $w_1 = w_2 = w_4 = 0$ .

Pomembno je vprašanje, kako bi v konkretnih tehničnih problemih, ko je rob plošče npr. vpet, položen ipd., določili neznane funkcije  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  in s tem tudi celotno napetostno deformacijsko stanje plošče.

Kako to napravimo pri tankih ploščah je že leta 1938 pokazal Lehnickij [4]. Seveda je imel opraviti samo z dvema funkcijama  $\Omega$  in  $\omega$ . Nakazani problem je za primer  $q = 0$  za teorijo srednje debelih plošč leta 1965 rešil M. Muršič [5], splošno pa je problem rešen v [1]. Nekaj rezultatov bomo dali v četrtem razdelku tega prispevka.

### 3. Enotine sile in momenti

Enotine sile so definirane z enačbami

$$\begin{aligned}\Sigma_x &= \int_{-h}^{+h} \sigma_x dZ, \quad \Sigma_y = \int_{-h}^{+h} \sigma_y dZ, \quad T_{xy} = \int_{-h}^{+h} \tau_{xy} dZ \\ N_x &= \int_{-h}^{+h} \tau_{xz} dZ, \quad N_y = \int_{-h}^{+h} \tau_{yz} dZ\end{aligned}\quad (3.1)$$

in jih torej preprosto izračunamo iz znanih komponent napetostnega tenzorja, torej iz enačb (1.2) v teoriji tankih plošč oz. (2.2) v teoriji srednje debelih plošč. Takoj pa seveda opazimo, da v prvem primeru dobimo



$$\Sigma_x = 0, \Sigma_y = 0, T_{xy} = 0 \quad (3.2)$$

To pa ne velja v Stevensonovi teoriji. Tu so enotine sile  $\Sigma_x, \Sigma_y, T_{xy}$  v splošnem različne od nič in (teoretično) delujejo v srednji ravnini plošče. To daje slutiti, da je upogib plošče simultano povezan s problemom stene, torej s problemom ravninskega napetostnega stanja. Zanimiva je vsekakor tudi ugotovitev, da se  $\Sigma_x, \Sigma_y, T_{xy}$  izražajo samo s funkcijama  $\varphi, \psi$  (in seveda  $P$ ), medtem ko se pa strižni sili  $N_x$  in  $N_y$  ter seveda upogibni in torzijski momenti  $G_x, G_y, H_{xy}, H_{yx}$  izražajo samo z  $\Omega, \omega$  (in  $P$ ).

To seveda pomeni, da je v teoriji tankih plošč  $\varphi(z) \equiv 0$  in  $\psi(z) \equiv 0$ .

Enotini momenti so definirani takole

$$\begin{aligned} G_x &= \int_{-h}^{+h} \sigma_x Z dZ, \quad G_y = \int_{-h}^{+h} \sigma_y Z dZ, \\ H_{xy} &= -H_{yx} = \int_{-h}^{+h} \tau_{xy} Z dZ \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tudi sedaj problem upogiba plošče rešujemo tako, da strižni sili združimo s torzijskim momentom v reducirno prečno silo

$$N_n + \frac{dH_{nt}}{ds} \quad (3.4)$$

kjer je

$$\begin{aligned} N_n &= N_x \cos \alpha + N_y \sin \alpha, \\ H_{nt} &= H_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(G_y - G_x) \sin 2\alpha \\ \alpha &= \angle(n, x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Celoten prikaz komponent napetostnega tenzorja, premikov, enotinih sil in momentov je preobsežen, da bi ga izpisali v tem prispevku. Zahtevnejši bralec dobi te rezultate v [1].

Za zgled izpišimo le en primer:

$$\begin{aligned} \Sigma_x &= \operatorname{Re} \left[ \frac{h}{2} (2\varphi'(z) - \bar{z}\varphi''(z) - \psi'(z)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{3(1+\nu)} h^3 \varphi'''(z) \right] + \Sigma_x^0 \\ \Sigma_x^0 &= \frac{h}{2} \operatorname{Re} \left[ P''(z) - \frac{1}{2} \bar{z} P'''(z) + \frac{1}{3} h^2 P^{IV}(z) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

Podobno sta z istimi funkcijami prikazana  $\Sigma_y$  in  $T_{xy}$

$$\begin{aligned} \Sigma_y &= \Sigma_y[\varphi(z), \psi(z), P(z)], \\ T_{xy} &= T_{xy}[\varphi(z), \psi(z), P(z)] \end{aligned} \quad (3.6')$$

Po drugi strani pa

$$\begin{aligned} N_x &= N_x[\Omega(z), \omega(z), P(z)], \\ N_y &= N_y[\Omega(z), \omega(z), P(z)], \\ G_x &= G_x[\Omega(z), \omega(z), P(z)], \\ G_y &= G_y[\Omega(z), \omega(z), P(z)], \\ H_{xy} &= H_{xy}[\Omega(z), \omega(z), P(z)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Te enačbe znova potrjujejo domnevo, da je problem upogiba srednje debele plošče sestavljen iz dveh problemov:

— iz problema stene, ki ga povzročajo enotine sile  $\Sigma_x, \Sigma_y, T_{xy}$ ; opisan je s funkcijama  $\varphi$  in  $\psi$ , ki ju srečamo v ravninski teoriji elastičnosti, v kateri so le  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  od nič različne komponente napestnega tenzorja (gl. npr. [6]);

— iz upogiba plošče, ki ga povzročajo enotini momenti in strižne sile; ta je opisan s funkcijama  $\Omega$  in  $\omega$ , ki ju srečamo v teoriji tankih plošč (gl. [4]).

Te ugotovitve bo v celoti potrdil naslednji razdelek.

#### 4. Robni problemi. Posplošeni robni problemi

Omenili smo že, da bi elementarno lahko določili vse napetosti, deformacije, sile, momente, če bi poleg funkcije  $P(z)$  poznali tudi  $\Omega(z), \omega(z), \varphi(z), \psi(z)$ . Najpomembnejše je seveda vprašanje, kako določiti te funkcije v določenih tehničnih problemih, ko je rob plošče npr. vpet ali prosto položen, prosto viseč itd. Morda je prav dejstvo, da ta problem ni bil v celoti rešen, prispevalo k temu, da se Stevensonova teorija ni na široko uveljavila.

Zastavljeno problematiko smo reševali v [1]. Definirali smo t.i. posplošene robne probleme, ki smo jih uspeli prevesti v zelo dobro raziskano matematično področje — v robne probleme analitičnih funkcij. Pot do uporabe je tako odprta.

V matematični elastomehaniki sta definirana dva osnovna robna problema. Pri prvem osnovnem robnem problemu na ograji obravnavanega telesa poznamo napetosti, pri drugem pomike. Pogosto je pridružen tudi tretji, t.i. mešani robni problem.

Komponenti  $X_n$  in  $Y_n$  napetostnega vektorja, ki deluje v srednji ravnini ali vzporedno z njo, sta določeni takole:

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) \\ Y_n &= \tau_{yx} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

saj je  $\cos(n, z) = 0$ . V točki  $t = t(s)$  roba  $c$  tedaj deluje napetost

$$\int_c^{s+h} (X_n + iY_n) dZ ds \quad (4.2)$$

ki se glede na (4.1) in (3.1) očitno izraža s  $\Sigma_x, \Sigma_y, T_{xy}$ . Vzemimo, da je napetost (4.2) določena s funkcijo  $f(s)$ , ki je takole definirana

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{2i}{h} \int_c^{s+h} \int_{-h}^s (X_n + iY_n) dZ ds = \\ &= \frac{2i}{h} \int_c^s (\Sigma_x + iT_{xy}) \cos(n, x) ds + \\ &\quad + (T_{xy} + i\Sigma_y) \cos(n, y) ds \end{aligned} \quad (4.3)$$



Upogibni moment  $G_n = G_x \cos^2 \alpha + G_y \sin^2 \alpha + 2H_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$  in reducirna prečna sila  $N_n + \frac{dH_{nt}}{ds}$  pa naj bosta na robu določena s funkcijama

$m(s)$  in  $p(s)$ . Definicija prvega posplošenega robnega problema je sedaj na dlani.

**Definicija 1** (definicija prvega posplošenega problema)

Določi napetostno-deformacijsko stanje plošče, tako da bodo v vsaki točki

$$t = t(s) = x(s) + iy(s) \quad (4.5)$$

roba  $c$  izpolnjene enačbe:

$$\int_c \int_{-h}^{+h} (X_n + iY_n) dZ ds = \frac{h}{2i} f(s) \quad (4.6)$$

$$G_n = m(s), N_n + \frac{dH_{nt}}{ds} = p(s) \quad (4.7)$$

$f(s)$ ,  $m(s)$  in  $p(s)$  so podane funkcije, ki opisujejo napetosti na robu plošče.

V teoriji tankih plošč se pojavljata samo pogoja (4.7), medtem ko je izraz  $X_n + iY_n$  zaradi Kirchhoffovih predpostavk identično enak nič.

Dovolj zapleteni računi pokažejo, da posplošeni robni problem lahko prevedemo na naslednji problem iz teorije analitičnih funkcij:

**Definicija 1'** Določi funkcije  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Omega$ ,  $\omega'$ , ki bodo regularno analitične v območju  $S$ , tako da so tudi odvodi  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ,  $\Omega'$ ,  $\omega''$  zvezni do vključno roba  $c$  in da bo v vsaki točki  $t = t(s)$  ograje  $c$  veljalo

$$\begin{aligned} \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} - \frac{2}{3} \frac{\nu}{1+\nu} h^2 \overline{\varphi''(t)} &= \\ &= \tilde{f}(s(t)) + Q_1(t) + \alpha_k \end{aligned} \quad (4.6')$$

$$\begin{aligned} \kappa' \Omega(t) - t\overline{\Omega'(t)} - \overline{\omega'(t)} + \kappa'' h^2 \overline{\Omega''(t)} &= \\ &= \tilde{f}(s(t)) + \tilde{Q}_1(t) + i\alpha_k t + \beta_k \end{aligned} \quad (4.7')$$

$$\left( \kappa' = \frac{3+\nu}{1-\nu}, \kappa'' = \frac{2(2-\nu)}{5(1-\nu)}, k = 1, 2, \dots, m \right)$$

Bralec bo pomen posameznih označb lahko dobil v [1]. Omenimo, da so funkcije, ki se pojavljajo na desni strani enačbe, znane. Pomen funkcije  $f(s)$  je razviden iz (4.3), funkcijo  $\tilde{f}(s)$  določata  $m(s)$  in  $p(s)$ ,  $Q_1(t)$  in  $\tilde{Q}_1(t)$  se izražata s  $P(t)$ .  $r_k$  so realne konstante,  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  kompleksne konstante. Na različnih konturah  $c_k$  so različne, največ po eno smemo prosto izbrati.

Robni pogoj (4.6') dobimo v ravninski elastomehaniki (gl. [6]), seveda je tam brez člena, ki obsega  $\varphi''(t)$  in brez  $Q_1(t)$ . To je potrditev, da gre za problem stene, naše domneve so se torej uresničile.

Robni pogoj (4.7'), osiromašen za člen, ki vsebuje  $\Omega''(t)$ , dobimo v teoriji tankih plošč [4] s tem

členom, vendar brez  $\tilde{Q}_1(t)$ , pa v [5]. Pogoj (4.7') torej vsekakor pomeni problem upogiba plošče.

**Definicija 2** (definicija drugega posplošenega robnega problema)

Poišči napetostno-deformacijsko stanje plošče, tako da bodo na robu izpolnjeni pogoji:

$$u_0 = g_1(t), v_0 = g_2(t), w_0 = h(t), \frac{dw_0}{dn} = \tilde{g}_2(t) \quad (4.8)$$

$$t \in c; u_0, v_0, w_0 \text{ so pomiki srednje ravnine} \quad (4.9)$$

V teoriji tankih plošč seveda ni enačbe (4.8), saj sta tu pomika  $u_0$  in  $v_0$  identično nič.

Prevedba problema na teorijo analitičnih funkcij da naslednje robne pogoje

$$\kappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = g(t) + Q_2(t) \quad (4.8')$$

$$\Omega(t) + t\overline{\Omega'(t)} + \overline{\omega'(t)} - \frac{4}{1-\nu} h^2 \overline{\Omega''(t)} = \tilde{g}(t) + \tilde{Q}_2(t) \quad (4.9')$$

$$w_0 = h(s)$$

Funkcije na desni strani so znane.  $Q_2$  in  $\tilde{Q}_2$  se izražata s funkcijo  $P$ , torej s prečno obtežbo  $q(x, y)$ ;  $g(t)$  in  $\tilde{g}(t)$  pa imata naslednji pomen

$$g(t) = 8\mu(u_0 + iv_0) = 8\mu(g_1(t) + g_2(t))$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(t) &= -\frac{8\mu}{1-\nu} \left( \frac{dw_0}{dn} + i \frac{dw_0}{ds} \right) = \\ &= -\frac{8\mu}{1-\nu} (\tilde{g}_2(t) + i\tilde{g}_1(t)) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Zanimiv je pogoj (4.8'), ki ga v klasični teoriji plošč ne zasledimo. V tej obliki, osiromašeni za člen  $Q_2(t)$ , ga srečamo v ravninski elastomehaniki, torej v teoriji sten. Zanimivo je, da pogoji (4.6'), (4.7'), (4.9') obsegajo tudi člen s faktorjem  $h^2$ , kar kaže na vpliv debeline plošče. Pogoj (4.8') takega člena nima.

## 5. O numeričnem primerjanju rezultatov

Če npr. primerjamo izraze (1.2) za izračun napetostnega tenzorja v teoriji tankih plošč z enačbami (2.2), s katerimi računamo komponente napetosti v teoriji srednje debelih plošč, nas skoraj preseneti natančnost slednje teorije. Takoj se vsiljuje vprašanje, kako ta povečana natančnost vpliva na konkretne numerične izračune. Sprašujemo se torej, kako (oz. koliko) »napačna« je teorija tankih plošč oz. za koliko se tisti členi v (2.2), ki so v (1.2) enaki nič, razlikujejo od nič. Seveda gre tudi za podobne primerjave pri izračunu pomikov, enotnih sil in momentov. Zlasti zanimivo je vprašanje, kako Kirchhoffova predpostavka

$$\sigma_x = \alpha Z, \sigma_y = \beta Z, \tau_{xy} = \gamma Z \quad (5.1)$$



o »lihi simetriji« teh treh komponent napetostnega tenzorja glede na srednjo ravnino vpliva na natančnost izračuna. Prav ta predpostavka ima za posledico  $\Sigma_x = \Sigma_y = T_{xy} = 0$  in torej iz celotne obravnave plošče izključi problem stene. Pri zelo tankih ploščah je to že »po občutku« prav, pri debelejših pa ne. Na vprašanje, pri kako debelih ploščah postane uporaba Kirchhoffove teorije nesmiselna, žal ne bomo mogli odgovoriti v celoti. Izkazalo se je, da je odgovor odvisen tudi od robnih pogojev, od prečne obremenitve  $q$ , od oblike plošče. Včasih smo celo presenečeni nad tem, kako dobra je teorija tankih plošč.

Vsaj delne odgovore na postavljena vprašanja dajo izračuni, ki smo jih že opravili. Doslej smo napravili izračune samo za krožne plošče različnih debelin, ob različnih robnih pogojih ter ob konstantni in linearno rastoči prečni obremenitvi  $q$ .

Pri numerični obdelavi smo vzeli ploščo s polmerom 1 m in rezultate, dobljene po obeh teorijah, primerjali pri naslednjih različnih debelinah plošče

$$2h = 1 \text{ cm}, 4 \text{ cm}, 7 \text{ cm}, 10 \text{ cm}, 14 \text{ cm} \quad (5.2)$$

Za elastični konstanti smo izbrali

$$\nu = 0,3, E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \quad (= 200 \text{ kN/mm}^2) \quad (5.3)$$

Obremenitev  $q$  smo izbirali glede na debelino plošče tako, da so bile komponente napetostnega tenzorja v vseh računskih primerih enakega velikostnega reda. Izhajali smo iz predpostavke, da je debelina plošče prilagojena prečni obremenitvi  $q$ . Seveda smo ostali v območju elastičnosti plošče.

Glede na robne pogoje smo vzeli naslednje tri različne primere.

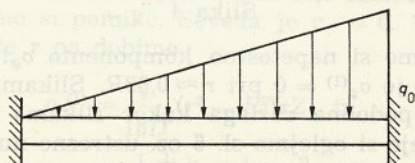
**Primer 1.** Krožna plošča polmera  $R$  je vzdolž roba vrtljivo podprta (položena) in obremenjena s konstantno prečno obtežbo  $q(x, y) = q_0 = \text{const}$ .

**Primer 2.** Krožna plošča polmera  $R$  je vzdolž roba togo vpeta in  $q(x, y) = q_0 = \text{const}$ .

**Primer 3.** Krožna plošča polmera  $R$  je vzdolž roba togo vpeta in obremenjena z linearno rastočo obtežbo

$$q = \frac{q_0}{2} \left( \frac{x}{R} + 1 \right) \quad (5.4)$$

Pri konkretnem reševanju postavljenih problemov smo sledili Mushelishvilijevi poti ([6], §80, §81).



Slika 2

Prva dva primera sta tako preprosta, da ju, rešena po klasični teoriji, najdemo celo v učbenikih [7].

V naslednjih razdelkih si oglejmo dobljene rezultate.

## 6. Položena plošča pri $q = q_0 = \text{const}$

### (Primer 1)

Zaradi krožne simetrije smo izbrali valjni koordinatni sistem  $r, \varphi, Z$ . Razlike, ki jih dobimo pri obeh načinih računanja, so v tem primeru najmanjše. Tu se namreč pokaže, da so enotine sile  $\Sigma_x, \Sigma_y, T_{xy}$  oz.  $\Sigma_r, \Sigma_\varphi, T_{r\varphi}$ , dejansko enake nič in sumljiva predpostavka (5.1) je še najmanj napačna.

Dobimo namreč

$$\sigma_r^{(1)} = \alpha Z, \quad \alpha = \frac{3q}{32h^3} (3 + \nu)(r^2 - R^2)$$

$$\sigma_r^{(2)} = \alpha_1 Z + \alpha_3 Z^3, \quad \alpha_1 = \alpha + \frac{3q(2 + \nu)}{40h},$$

$$\alpha_3 = -\frac{(2 + \nu)}{8h^3} q$$

Indeks (1) pomeni rezultate, ki smo jih dobili, če smo računali po teoriji tankih plošč, indeks (2) rezultate, ki sledijo iz druge teorije.

Razlika med obema rezultatoma

$$\sigma_r^{(2)} - \sigma_r^{(1)} = q \left( \frac{3(2 + \nu)}{40} - \frac{2 + \nu}{8} k^2 \right) k \quad (6.1)$$

je v srednji ravnini  $= 0$ . Uvedli smo novo spremenljivko

$$k = \frac{Z}{h} \quad (6.2)$$

ki pomeni nekakšno »enotino debelino« plošče. Izraz, ki je v (6.1) v oklepaju, je reda velikosti 0,1 in razlika med obema izračunoma je zelo majhna in narašča linearno glede na  $k$ .

Podobne ugotovitve veljajo tudi za  $\sigma_\varphi$ , medtem ko je  $\tau_{r\varphi}$  pri obeh izračunih enak nič. Tudi parabolični napetosti

$$\tau_{rz} = \frac{3q}{8h} r(1 - k^2)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0$$

sta v obeh izračunih enaki. Primerjava numeričnih rezultatov v ustreznih diagramih je skoraj nepomembna, saj se krivulje skoraj prekrivajo.

Podobne izsledke dobimo, če primerjamo pomicke. Seveda je upogib  $w = w_0 + w_1 Z + w_2 Z^2 + w_4 Z^4$  odvisen od spremenljivke  $Z$ , kar pomeni, da se zgornja polovica plošče (nad srednjo ravnino) drugače deformira kakor spodnja. Dejansko pride do neznatnih sprememb debeline plošče. Te posebnosti, ki je pravzaprav pričakovana, teorija tankih plošč seveda ne opiše.



Interesantni so pomiki v radialni smeri

$$v_r^{(1)} = \frac{q}{16D} \left( r^2 - \frac{3+\nu}{1+\nu} R^2 \right) r Z$$

$$v_r^{(2)} = \frac{q\nu h^3}{3(1-\nu^2)D} r + \frac{q}{16D} \left( r^2 - \frac{3+\nu}{1+\nu} R^2 + \frac{4}{5} \frac{2+9\nu+\nu^2}{1-\nu^2} r h^2 \right) Z - \frac{(2-\nu)q}{12(1-\nu)D} r Z^3$$

Razlika med obema izračunoma

$$v_r^{(2)} - v_r^{(1)} = \frac{q}{2E} (\nu + ak - bk^3) r \approx \frac{q}{20E} (3 + 7k - 6k^3) r$$

je največja na robovih plošče in je ni v središču pri  $r = 0$ . Zanimivo je, da je ta razlika premo sorazmerna s  $q$ , večje prečne obremenitve  $q$  pa terjajo večje debeline plošče: torej razlika med obema izračunoma je tem večja čim debelejša je plošča. To pa seveda ni nič novega.

Zanimivo je vsekakor, da v obravnavanem primeru pri enotinih silah in momentih sploh ni razlik med obema izračunoma. Tako obakrat dobimo:

$$\Sigma_r = \Sigma_\varphi = T_{r\varphi} = 0$$

$$N_r = \frac{q}{2} r, \quad N_\varphi = 0$$

$$G_r = \frac{q}{16} (3 + \nu)(r^2 - R^2),$$

$$G_\varphi = \frac{q}{16} [(3\nu + 1)r^2 - (3 + \nu)R^2], \quad H_{r\varphi} = 0$$

## 7. Togo vpeta plošča pri $q = q_0 = \text{const}$

(Primer 2)

V tem primeru sta enotini sili  $\Sigma_r$ ,  $\Sigma_\varphi$  različni od nič ( $T_{r\varphi} = 0$ ) in problemu upogiba je tudi pridružen problem stene. Upravičeno tedaj pričakujemo večje razlike med obema izračunoma, numerični izračuni pa ta pričakovanja tudi potrjujejo.

Iz rezultatov

$$\Sigma_r = \Sigma_\varphi = -\frac{\nu}{1-\nu} q h \quad (7.1)$$

vidimo, da je napaka, ki jo delamo pri računanju po teoriji tankih plošč premo sorazmerna debelini plošče. Če predpostavimo, da sta tudi količini  $q$  in  $h$  premo sorazmerni, bi torej lahko ugotovili, da omenjena napaka narašča celo s kvadratom debeline plošče.

Spet si najprej oglejmo komponente napetostnega tenzorja

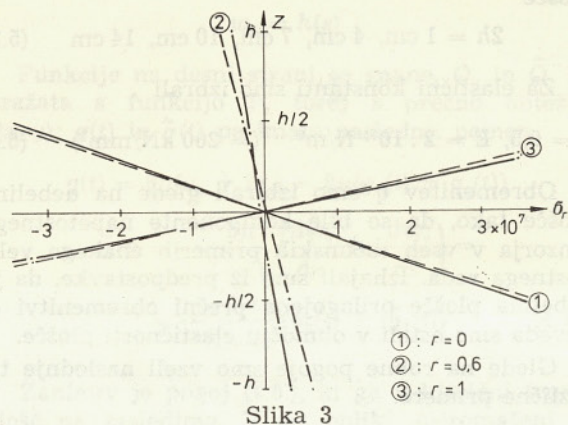
$$\sigma_r^{(1)} = aZ, \quad a = \frac{3q}{32h^3} [(3 + \nu)r^2 - (1 + \nu)R^2]$$

$$\sigma_r^{(2)} = \alpha_0 + \alpha_1 Z + \alpha_3 Z^3, \quad \alpha_1 = a + \frac{3q}{4(1-\nu)h}$$

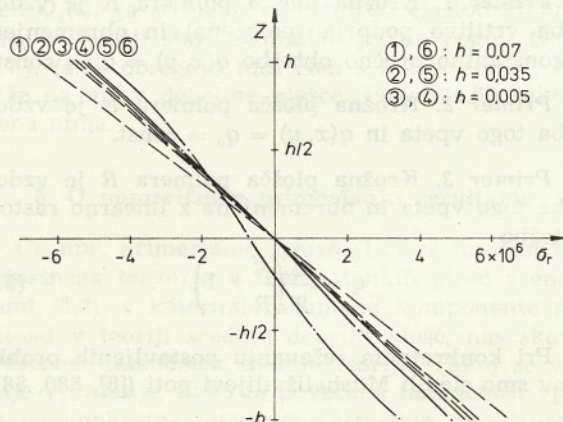
Razlika

$$\sigma_r^{(2)} - \sigma_r^{(1)} = \left( -\frac{\nu}{2(1-\nu)} + \frac{3}{4(1-\nu)} k - \frac{2+\nu}{8} k^3 \right) q \quad (7.2)$$

torej narašča premo sorazmerno s  $q$ . Natanko isti rezultat dobimo za  $\sigma_\varphi^{(2)} - \sigma_\varphi^{(1)}$ . Zanimivo je vsekakor, da razlika med obema izračunoma ni odvisna od  $r$ , torej od oddaljenosti točke od središča. Če razliko  $\sigma_r^{(2)} - \sigma_r^{(1)}$  primerjamo s  $\sigma_r^{(2)}$ , je ta največja pri  $\sigma_r^{(1)} = 0$ . To pa se zgodi pri  $r \approx 0,63R$ . Sl. 3 prikazuje napetosti  $\sigma_r$  v točkah  $r = 0$ ,  $r = 0,6R$ ,  $r = R$ , izračunanih po obeh teorijah pri  $h = 0,07R$ . (Na vseh slikah so z izvečeno črto risane količine, dobljene po Stevensonovi teoriji, s črtkano pa po Kirchhoffovi). Sl. 4 prikazuje napetosti  $\sigma_r$  v točki  $r = 0,6R$  pri različnih debelinah  $2h$ . S slike se lepo vidi, kako razlike z debelino naraščajo, saj ima »krivulja« ① povsem drugačen potek kakor krivulja ⑥, obe pa pripadata plošči  $h = 0,07R$ . Krivulji ③, ④ se skoraj prekrivata, saj pripade najtanjši plošči  $h = 0,005R$ .



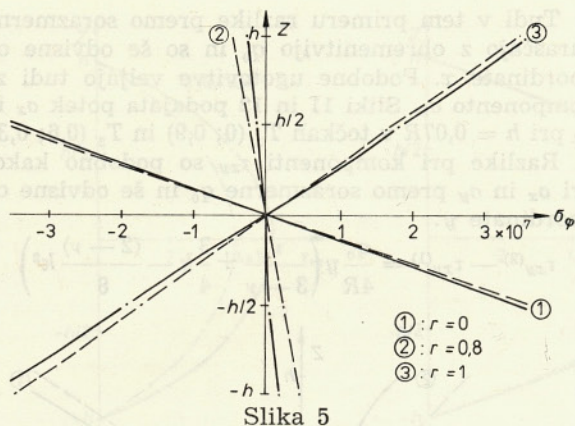
Slika 3



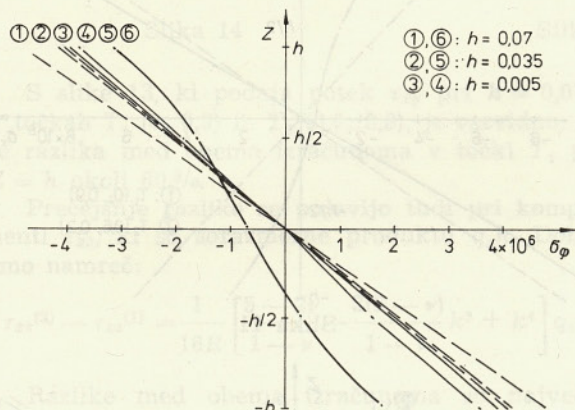
Slika 4

Oglejmo si napetostno komponento  $\sigma_\varphi$ ! Tu dobimo, da je  $\sigma_\varphi^{(1)} = 0$  pri  $r \approx 0,83R$ . Slikama 5 in 6 pripada podobna razlaga kakor slikama 3 in 4. Natančneje si oglejmo sl. 6 oz. ustrezne numerične izračune. Pri  $r = 0,8R$  na zgornjem robu plošče  $Z = h$  ugotovimo naslednje:





Slika 5



Slika 6

pri najtanjši plošči ( $h = 0,005R$ ) predstavlja razlika  $\sigma_\phi^{(2)} - \sigma_\phi^{(1)}$  le  $0,2\%$  od  $\sigma_\phi^{(1)}$ , torej  $\sigma_\phi^{(2)} - \sigma_\phi^{(1)} = 0,002\sigma_\phi^{(1)}$ ; pri naslednji debelini ( $h = 0,02R$ ) razlika naraste že na  $3\%$ , pri  $h = 0,05R$  na  $18\%$  in pri najdebelejši plošči ( $h = 0,07R$ ) je ta razlika že  $35\%$ , torej  $\sigma_\phi^{(2)} - \sigma_\phi^{(1)} = 0,35\sigma_\phi^{(1)}$ .

Zanimive so vrednosti komponente  $\sigma_\phi$  v srednji ravnini, saj so te po teoriji tankih plošč enake nič, v resnici pa so različne od nič. Če te vrednosti primerjamo z vrednostmi pri  $Z = h$  v »točki«  $r = 0,8R$ , ugotovimo naslednje:

$$h = 0,005R - \sigma_\phi(Z = 0) = 0,06\% \sigma_\phi(Z = h)$$

$$h = 0,02R - \sigma_\phi(Z = 0) = 1,1\% \sigma_\phi(Z = h)$$

$$h = 0,035R - \sigma_\phi(Z = 0) = 3,7\% \sigma_\phi(Z = h)$$

$$h = 0,05R - \sigma_\phi(Z = 0) = 8,5\% \sigma_\phi(Z = h)$$

$$h = 0,07R - \sigma_\phi(Z = 0) = 20\% \sigma_\phi(Z = h)$$

Podobne ugotovitve veljajo tudi za komponento  $\sigma_r$ .

Pri preostalih komponentah napetostnega tenzorja med obema izračunoma ni bilo razlik.

Oglejmo si pomike. Seveda je  $v_\phi = 0$ . V smeri koordinate  $r$  pa dobimo

$$v_r^{(1)} = \frac{q}{16D} (r^2 - R^2) r Z \quad \text{in}$$

$$v_r^{(2)} - v_r^{(1)} = \frac{1 + \nu}{4E} q r \left( 3 + \frac{2 - \nu}{2} k^2 \right) k$$

V srednji ravnini ( $k = 0$ ) ni razlik, pri  $Z = \pm h$  pa so razlike največje. Razlika med obema izračunoma raste premo sorazmerno z oddaljenostjo od središča plošče.

Upogib  $w_0$  srednje ravnine je po obeh izračunih enak:

$$w_0 = -\frac{q}{64D} (r^2 - R^2)^2$$

Pri  $Z \neq 0$  je razlika med obema izračunoma taka

$$w^{(2)} - w^{(1)} = w_1 Z + w_2 Z^2 + w_4 Z^4$$

pri čemer niti eden od koeficientov ni nič. Numerični rezultati (sl. 7) kažejo da je deformacija zgornje polovice plošče ( $Z > 0$ ) drugačna kakor deformacija spodnje polovice in da se v skladu s pričakovanji debelina plošče zmanjša.

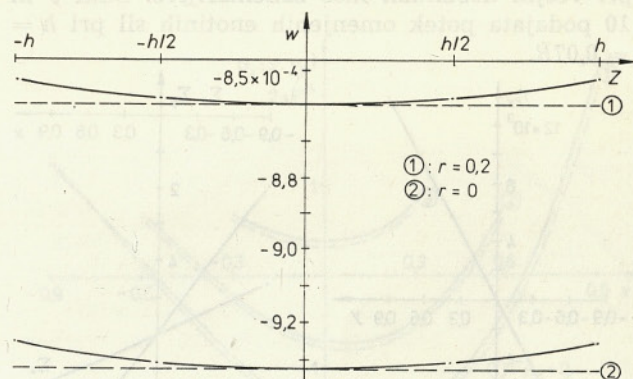
Enotne sile  $\Sigma_r$ ,  $\Sigma_\phi$ ,  $T_{r\phi}$  smo si že ogledali. Strižni sili  $N_r = qr/2$ ,  $N_\phi = 0$  sta seveda pri obeh izračunih enaki.

Torzijska momenta sta nič.

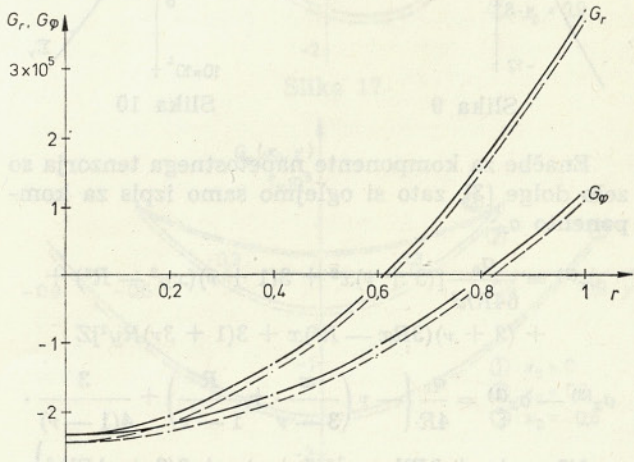
Za upogibne momente dobimo take razlike med obema izračunoma:

$$G_r^{(2)} - G_r^{(1)} = G_\phi^{(2)} - G_\phi^{(1)} = \frac{\nu^2 + \nu + 8}{20(1 - \nu)} q h^2$$

in je močno odvisna od debeline plošče. Sl. 8, ki prikazuje momente pri najdebelejši plošči, nas pre-



Slika 7



Slika 8



priča, da je razlika bistveno manjša od vrednosti momentov, v povprečju je približno 10 % teh vrednosti.

### 8. Togo vpeta plošča pri $q = \frac{q_0}{2} \left( \frac{x}{R} + 1 \right)$

(Primer 3)

V tem primeru nimamo več središčne simetrije. Zato smo uporabljali koordinatni sistem  $x, y, Z$ . Napetostno deformacijsko stanje smo morali računati v več točkah. Odločili smo se za kvadratno mrežo točk z ekvidistantnimi vozli, oddeljenimi med seboj po  $0,3R$ .

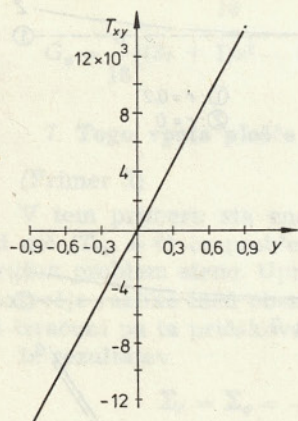
V tem primeru je večja natančnost Stevensove teorije najmočnejše izražena. Enotine sile  $\Sigma_x$ ,  $\Sigma_y$  in  $T_{xy}$  so vse različne od nič in niso več konstante ampak so odvisne od  $x, y$ .

$$\Sigma_x = -\frac{\nu}{2R(3-\nu)(1-\nu)} [(1-\nu)x + (3-\nu)R]q_0h$$

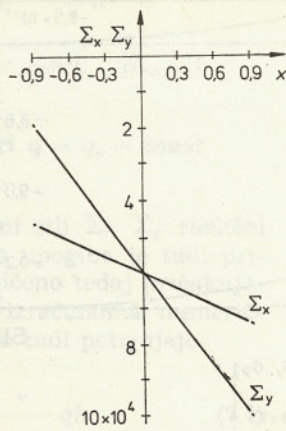
$$\Sigma_y = -\frac{\nu}{2R(3-\nu)(1-\nu)} [3(1-\nu)x + (3-\nu)R]q_0h,$$

$$T_{xy} = \frac{\nu}{2R(3-\nu)} q_0hy$$

Podobno kakor v primeru 2 so tudi tukaj enotine sile premo sorazmerne produktu  $q_0h$  in zato pri večjih debelinah niso zanemarljive. Sliki 9 in 10 podajata potek omenjenih enotinih sil pri  $h = 0,07R$ .



Slika 9



Slika 10

Enačbe za komponente napetostnega tenzorja so zelo dolge [3], zato si oglejmo samo izpis za komponento  $\sigma_x$ :

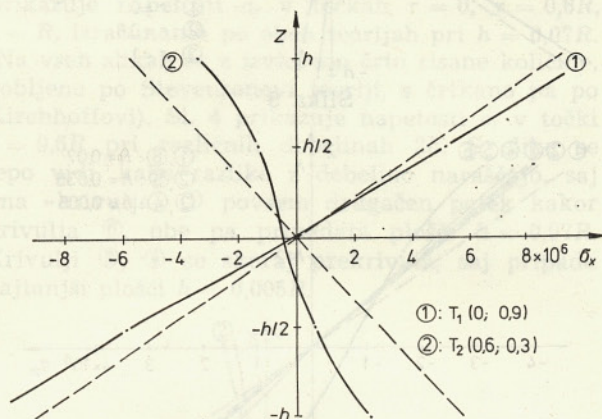
$$\sigma_x^{(1)} = \frac{q_0}{64Rh^3} [(5+\nu)x^3 + 3(1+\nu)(xy^2 - R^3) + (3+\nu)(3Rx - R^2)x + 3(1+3\nu)Ry^2]Z$$

$$\sigma_x^{(2)} - \sigma_x^{(1)} = \frac{q_0}{4R} \left\{ -\nu \left( \frac{x}{3-\nu} + \frac{R}{1-\nu} \right) + \frac{3}{4(1-\nu)} \cdot [(3-\nu)x + 2R]k - \frac{1}{8}[(6+\nu)x + 2(2+\nu)R]k^3 \right\}$$

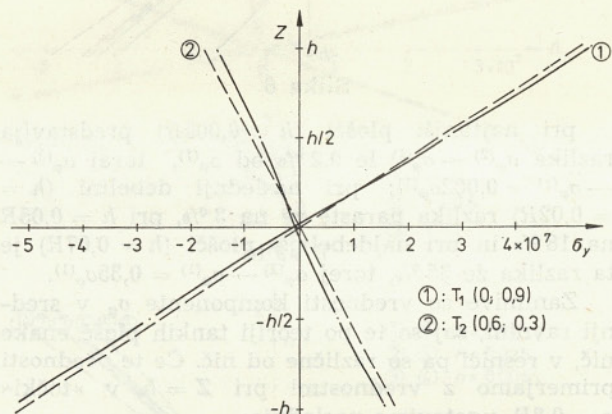
Tudi v tem primeru razlike premo sorazmerno naraščajo z obremenitvijo  $q_0$  in so še odvisne od koordinate  $x$ . Podobne ugotovitve veljajo tudi za komponento  $\sigma_y$ . Sliki 11 in 12 podajata potek  $\sigma_x$  in  $\sigma_y$  pri  $h = 0,07R$  v točkah  $T_1 (0; 0,9)$  in  $T_2 (0,6; 0,3)$ .

Razlike pri komponenti  $\tau_{xy}$  so podobno kakor pri  $\sigma_x$  in  $\sigma_y$  premo sorazmerne  $q_0$  in še odvisne od koordinate  $y$ :

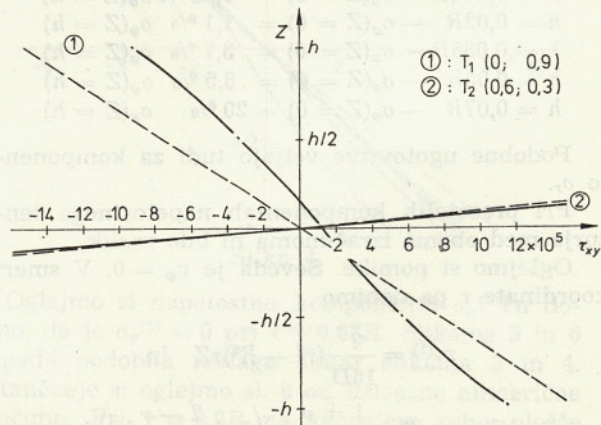
$$\tau_{xy}^{(2)} - \tau_{xy}^{(1)} = \frac{q_0}{4R} y \left( \frac{\nu}{3-\nu} + \frac{3}{4}k - \frac{(2-\nu)}{8}k^3 \right)$$



Slika 11

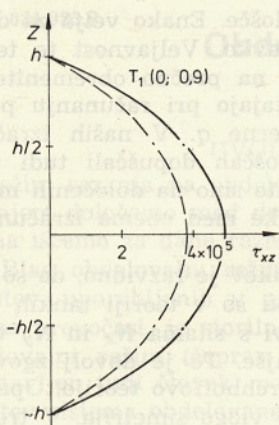


Slika 12

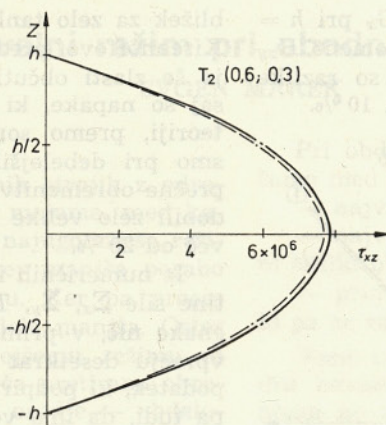


Slika 13

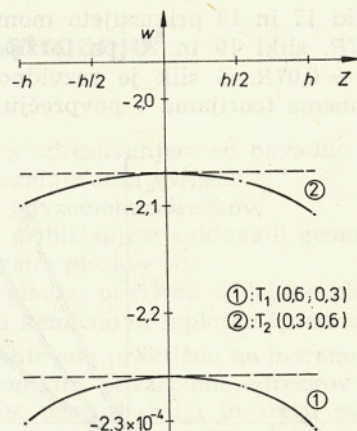




Slika 14



Slika 15



Slika 16

S slike 13, ki podaja potek  $\tau_{xy}$  pri  $h = 0,07R$  v točkah  $T_1(0; 0,9)$  in  $T_2(0,6; 0,3)$ , je razvidno, da je razlika med obema izračunoma v točki  $T_1$  pri  $Z = h$  okoli 60 %.

Precejšnje razlike se pojavijo tudi pri komponenti  $\tau_{xz}$ , ki so sorazmerne produktu  $q_0 h$ . Dobili smo namreč:

$$\tau_{xz}^{(2)} - \tau_{xz}^{(1)} = \frac{1}{16R} \left[ \frac{5-2\nu}{1-\nu} - \frac{3(2-\nu)}{1-\nu} k^2 + k^4 \right] q_0 h$$

Razlike med obema izračunoma so največje v srednji ravnini ( $k = 0$ ). Pri  $h = 0,07h$  v točki  $T_1(0; 0,9)$  pomenijo te razlike 29 % (slika 14), v točki  $T_2(0,6; 0,3)$  pa le 1,5 % (slika 15).

Izračuna za komponento  $\tau_{yz}$  se po obeh teorijah ujemata.

Precejšnje razlike nastanejo tudi pri pomikih. Po Stevensonovi teoriji smo dobili:

$$u = u_0 + u_1 Z + u_2 Z^2 + u_3 Z^3 + u_4 Z^4$$

$$v = v_1 Z + v_3 Z^3$$

$$w = w_0 + w_1 Z + w_2 Z^2 + w_4 Z^4$$

kjer so vsi  $u_i$ ,  $v_i$  in  $w_i$  različni od nič. Tudi v tem primeru je upogib srednje ravnine po obeh izračunih enak, medtem ko za točke zunaj srednje ravnine nastanejo razlike, ki so največje pri  $Z = \pm h$ . V točki  $T(0,6; 0,3)$  smo pri  $h = 0,07R$  dobili:

$$w^{(2)}(Z = h) - w^{(1)} = 2,4 \% w_1 \quad (\text{sl. 16})$$

Numerični izračun tudi v tem primeru potrjuje, da je deformacija zgornje polovice plošče različna od deformacije spodnje polovice in da se debelina plošče po deformaciji zmanjša.

Izračuna za enotini sili  $N_y$  se po obeh teorijah ujemata, pri enotini sili  $N_x$  pa pride do razlik:

$$N_x^{(2)} - N_x^{(1)} = \frac{(8-3\nu)}{20R(1-\nu)} q_0 h^2$$

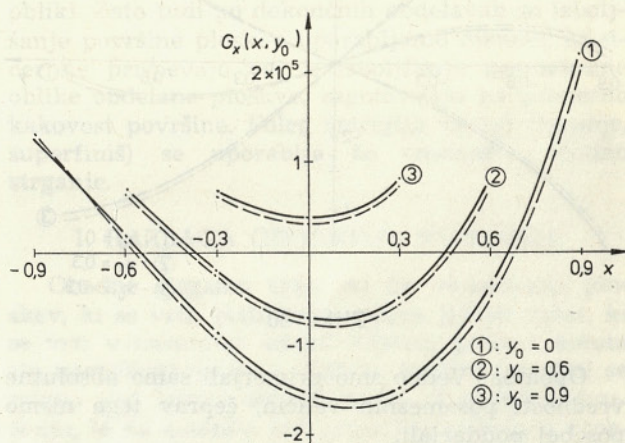
Te razlike so sorazmerne produktu  $q_0 h^2$ , ki z debelino plošče zelo hitro narašča.

Podobne ugotovitve veljajo tudi za upogibna momenta  $G_x$ ,  $G_y$  in torzijski moment  $H_{xy}$ , kjer razlike tudi naraščajo sorazmerno s produktom  $q_0 h^2$ .

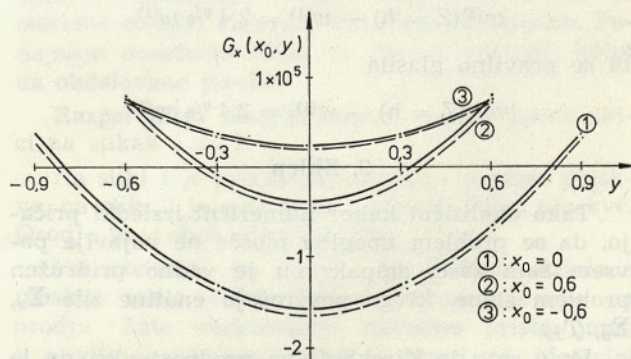
Na primer:

$$G_x^{(2)} - G_x^{(1)} = \frac{1}{80(1-\nu)R} [(24-5\nu+\nu^2)x + 2(8+\nu+\nu^2)R] q_0 h^2$$

$$H_{xy}^{(2)} - H_{xy}^{(1)} = \frac{8+\nu}{80R} y q_0 h^2$$



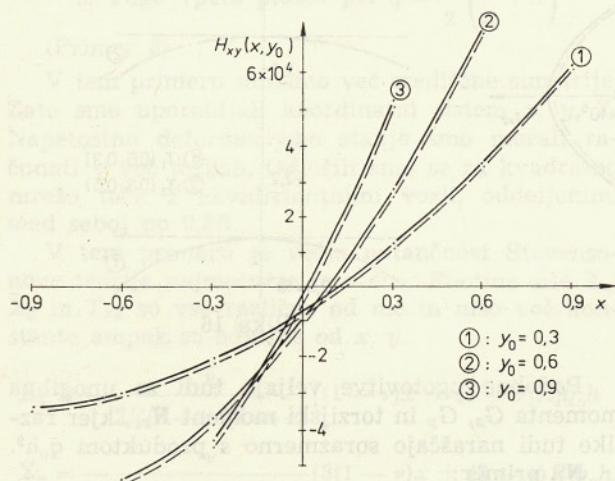
Slika 17



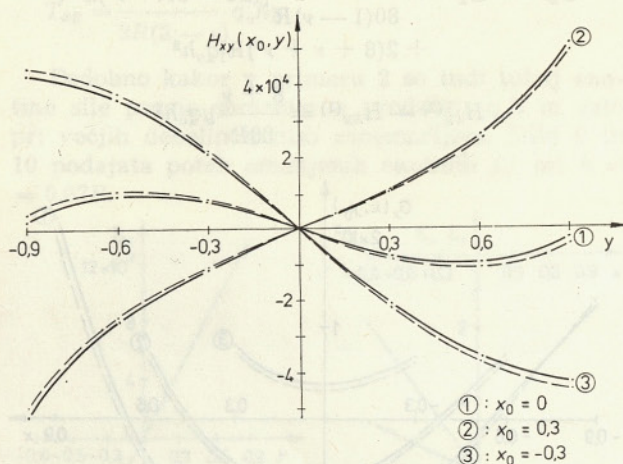
Slika 18



Sliki 17 in 18 prikazujeta moment  $G_x$  pri  $h = 0,07R$ , sliki 19 in 20 pa torzijski moment  $H_{xy}$  pri  $h = 0,07R$ . S slik je razvidno, da so razlike med obema teorijama v povprečju okoli 10 %.



Slika 19



Slika 20

Opomba: Vedno smo primerjali samo absolutne vrednosti posameznih veličin, čeprav tega nismo posebej poudarjali.

Primer: Enačba

$$w^{(2)}(Z = h) - w^{(1)} = 2,4 \% w^{(1)}$$

bi se pravilno glasila

$$|w^{(2)}(Z = h) - w^{(1)}| = 2,4 \% |w^{(1)}|$$

### 9. Sklep

Tako analitični kakor numerični izsledki pričajo, da se problem upogiba plošče ne pojavlja povsem sam zase, ampak mu je vedno pridružen problem stene, ki ga povzročajo enotine sile  $\Sigma_x$ ,  $\Sigma_y$ ,  $T_{xy}$ .

Prav zato je Kirchhoffova predpostavka, da je v srednji ravnini  $u_0 = v_0 = 0$ , le dovolj dober pri-

bližek za zelo tanke plošče. Enako velja za drugo Kirchhoffovo predpostavko. Veljavnost te teorije je še zlasti občutljiva na prečno obremenitev  $q$ , saj so napake, ki nastajajo pri računanju po tej teoriji, premo sorazmerne  $q$ . V naših izračunih smo pri debelejših ploščah dopuščali tudi večje prečne obremenitve, zato smo na določenih mestih dobili zelo velike razlike med obema izračunoma, več od 20 %.

Iz numeričnih izsledkov je razvidno, da so enotine sile  $\Sigma_x$ ,  $\Sigma_y$ ,  $T_{xy}$ , ki so v teoriji tankih plošč enake nič, v primerjavi s silama  $N_x$  in  $N_y$  v povprečju desetkrat manjše. To je dovolj zgovoren podatek, ki podpira Kirchhoffovo teorijo. Opazimo pa tudi, da ima veliko vlogo simetrija. V tretjem primeru, ko je bilo simetrije še najmanj, je bil vpliv sil  $\Sigma_x$ ,  $\Sigma_y$ ,  $T_{xy}$  največji in razlika med obema izračunoma največja.

Že površen pregled grafov pokaže, da se izračuna enotinih sil  $N_x$ ,  $N_y$  zelo dobro skladata. Enako velja za enotine momente in tudi za pomike. Največje razlike se pojavljajo pri izračunih komponent napetostnega tenzorja.

Lahko bi rekli, da teorija tankih plošč daje zelo nezanesljive informacije o poteku napetosti v sami plošči. V primeru najdebelejše plošče ( $h = 0,07R$ ) so te informacije neuporabne.

Računanje po Stevensonovi teoriji je seveda napornejše in zlasti daljše. Lahko trdimo, da sta računalniško gledano obe metodi enako zahtevni in enako ekonomični. Ta ugotovitev pa seveda daje prednost Stevensonovi teoriji, ki zanesljivo daje realnejšo sliko dejanskega napetostnega in deformacijskega stanja v plošči.

### LITERATURA

- [1] Brešar, F.: Študij upogiba neskončne elastične plošče z ravnimi zarezi na eni premici (disertacija). Visoka tehniška šola, Maribor 1978.
- [2] Kalandija, A. I.: Matematičeskie metody dvumernoj uprugosti, Nauka, Moskva 1973.
- [3] Kumperščak, V.: Vpliv debeline plošče na njeno napetostno-deformacijsko stanje (magistrsko delo). Visoka tehniška šola, Maribor 1979.
- [4] Lehnickij, S. G.: O nekih voprosah s teorij izgiba tonkih plit, Akademija nauk SSSR (prikladnaja matematika i mehanika), 1938 (str. 181—210).
- [5] Muršič, M.: Koncentracija napetosti na robovih lukenj v zmerno debelih elastičnih ploščah (disertacija), Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana 1965.
- [6] Mushelišvili, N. J.: Nekotorye osnovnye zadači matematičeskoj teorii uprugosti, Nauka, Moskva 1966.
- [7] Prelog, E.: Mehanika konstrukcij, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana 1974.
- [8] Sapondžjan, O. M.: Izgib tonkih uprugih plit, Ajastan, Erevan, 1975.
- [9] Stevenson, A. C.: On the equilibrium of Plates, Phils. Mag. 1942, London (str. 639—661).

Avtorjev naslov: izr. prof. dr. France Brešar, dipl. mat.,  
mag. Vitodrag Kumperščak, dipl. ing.,  
Visoka tehniška šola,  
Maribor, Smetanova 17