

UDK 531.36:624.072.33

Stabilnost ravninskih okvirov

MAKS OBLAK — RUDI PUŠENJAK

1. UVOD

Obravnavana je stabilnost ravninskih okvirov, pri čemer izhajamo iz variacijske formulacije problema. V uporabnem delu članka so prirejeni zgledi tako, da je mogoče optimirati konstrukcijo. S tem je bil dosežen višji namen, kakor pa ga je bilo pričakovati ob nastanku programa, ki je vsestransko zahteven tako po dimenzijski kakor tudi po numerični strani in izredno obsežen (25 podprogramskih modulov s 4000 karticami). Program avtomatično zadošča predpisanim robnim pogojem, rešuje posplošeni problem lastnih vrednosti, ohranja pozitivno definitnost geometrijske matrike in izvaja kondenzacijo togostne matrike.

Na omejenem prostoru se ne moremo spuščati v podrobnosti, kljub temu pa bi radi poudarili široko uporabnost programskega paketa, ki bo vključen v sistem programov SASP na VTŠ v Mariboru.

2. UPOGIBNI UKLON NOSILCEV

Obravnavali bomo pojave nestabilnosti enoosnih elementov, pri katerih prihaja do deformacij samo v eni ravnini, tako da se posamezni prerezi lahko premaknejo v smeri upogiba, pri čemer zanemarimo možnost torzijskih deformacij.

Vzamemo homogen izotropen material ter se omejimo na veljavnost Hookove linearne zveze med napetostmi in deformacijami. Pri izvajanju enačbe (1) upoštevamo majhne deformacije in obravnavamo konservativne sisteme (za katere menimo, da so med pojavom uklona zunanje sile po velikosti in smeri konstantne).

Če predpostavimo, da palica nima prečne obremenitve in začetne ukrivljenosti, dobimo

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E I \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + F \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{dF}{dx} \frac{dv}{dx} = 0 \quad (1)$$

V primeru, ko sta tlačna osna sila F in upogibna togost $E I$ konstantni vzdolž osi nosilca, je

$$E I \frac{d^4 v}{dx^4} + F \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (2)$$

Z zamenjavo

$$\omega^2 = \frac{F}{E I} \quad (3)$$

se pojavijo v diferencialni enačbi parametri ω , ki dopuščajo netrivialne rešitve in jih imenujemo lastne vrednosti.

Slednje dobimo z reševanjem transcendentne enačbe oziroma iskanjem ničel Besselove funkcije (pri spremenljivi osni sili). Za inženirje v praksi sta navedena postopka reševanja preobširna in zapletena ter terjata preveč časa. Razvile so se numerične oziroma približne metode, ki se z natančnimi rezultati dovolj dobro ujemajo.

3. METODE REŠEVANJA

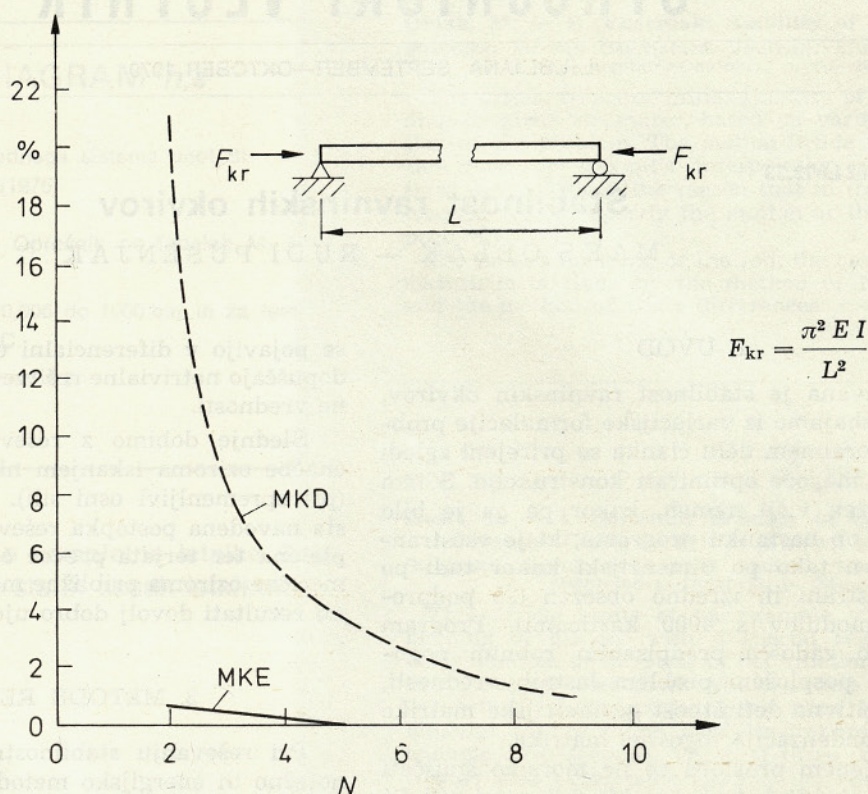
Pri reševanju stabilnostnih problemov z ravnotežno in energijsko metodo se skušamo v veliki meri približati natančnim rešitvam. V bolj zapletenih primerih (pri spremenljivi obremenitvi ali prerezu) postane natančno reševanje sila zamudno, če ne sploh nemogoče.

Obstajajo metode, s katerimi pridemo na razmeroma lahek in hiter način do rezultatov, ki sicer niso popolnoma natančni, vendar v večini primerov zadoščajo za poenostavljeno reševanje primerov konstrukcijske prakse.

Probleme fizike, ki predvsem zanimajo inženirsko prakso, rešujemo v glavnem po dveh postopkih. V prvem primeru rešimo ustrezno diferencialno enačbo, ki je podana za infinitezimalno področje z numerično metodo in jo imenujemo metoda končnih diferenc (MKD). V drugem primeru pa uporabimo variacijske metode, s katerimi po načelu ekstrema minimiziramo funkcional Π , ki velja za celotno področje obravnavanega kontinuuma.

Pri tem se pojavljajo težave vselej, kadar ni mogoče najti ustreznega funkcionala, oziroma, če ta sploh ne obstaja (nelinearni problemi). Za numerično metodo uporabljamo Ritzov postopek, katerega posebna različica je metoda končnih elementov (MKE), ki omogoča natančno obravnavanje realnih struktur (sl. 1).

Iz diagrama je razvidno, da je napaka pri izračunu prve kritične sile pri drugem Eulerjevem primeru 0,75 % po MKE in 19 % po MKD, če palico razdelimo na dva elementa. Ne bomo poudarjali prednosti ene in pomanjkljivosti druge metode, ker menimo, da so že toliko znane in nanje ni treba



Sl. 1. Konvergenčna karakteristika pri Eulerjevem uklonu palice

še posebej opozarjati. Seveda ni primerno uporabljati MKD pri dvodimenzionalnih problemih stabilnosti, kjer glede na zahtevano natančnost rezultata število enačb izredno naraste.

3.1. Variacijski problem

Diferencialni enačbi (2) je mogoče prirediti funkcional Π , definiran z integralno enačbo

$$\Pi = \frac{1}{2} \int \left[E I \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 - F \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (4)$$

katerega minimum je rešitev tega problema.

Z uporabo Eulerjeve enačbe variacijskega računa dokažemo, da zadošča funkcija pod integralom v funkcionalu (4) diferencialni enačbi (2) s pridruženima robnima pogoja

$$\delta v = 0 \quad (v \text{ je predpisan}) \quad (5a)$$

$$\delta v' = 0 \quad \left(\frac{dv}{dx} \text{ je predpisan} \right) \quad (5b)$$

Če razdelimo kontinuum na končne elemente, za katere predpišemo zvezo med funkcijo v polju elementa $\{v\}$ in vozliščnim vektorjem $\{U\}$ v znani obliki

$$\{v\} = [\Phi] \{U\} \quad (6)$$

kjer je $[\Phi]$ ustrezno izbrana oblikovna (bazna) funkcija, dobimo vozliščne parametre $\{U\}$ kot ne-

znanke sistema. Če predpostavimo, da je celotni funkcional enak vsoti po posameznih elementih, je

$$\Pi = \sum_e \Pi_e \quad (7)$$

Z minimizacijo enačbe (4) po vozliščnih parametrih dobimo

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{v\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial U_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial U_n} \end{Bmatrix} = 0 \quad (8)$$

Po vstavljanju enačbe (6) v enačbo (4) in upoštevanjem (7) dobi enačba (8) obliko

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_m} = \sum_e \int_0^s \cdot (E I [\Phi'']^T [\Phi''] - F [\Phi']^T [\Phi']) \{U\} dx = 0 \quad (9)$$

Z uvedbo simbolov za togostno

$$[K_e] = \left[\int_0^s E I [\Phi'']^T [\Phi''] dx \right] \quad (10a)$$

in geometrijsko matriko elementa

$$[G_e] = \left[\int_0^s F [\Phi']^T [\Phi'] dx \right] \quad (10b)$$

tvorimo enačbo strukture po znanih postopkih, pri čemer so robni pogoji v vozliščih (začetek ali konec elementa) predpisani v skladu s številom prostostnih stopenj elementa. Enačba strukture se tako glasi

$$([K] - F_{kr}[G])\{U\} = 0 \quad (11)$$

kjer pomenita

$$[K] = \left[\sum_e K_e \right] \quad (12a)$$

$$[G] = \left[\sum_e G_e \right] \quad (12b)$$

Za netrivialne rešitve homogenega sistema linearnih algebrskih enačb (11) mora biti determinanta sistema nič. Postopek reševanja smo prevedli na posplošeni problem lastnih vrednosti

$$[A]\{X\} = \lambda_{kr}[B]\{X\} \quad (13)$$

kjer je λ_{kr} (lastna vrednost) prenosorazmernostni faktor, ki je enak kritični sili.

Ne bomo se spuščali v podrobnosti, kako tvorimo oblikovne funkcije, ampak priporočamo bralcu ustrezno literaturo [2, 3, 4]. Za primere reševanja zgledov smo izbrali nastavek

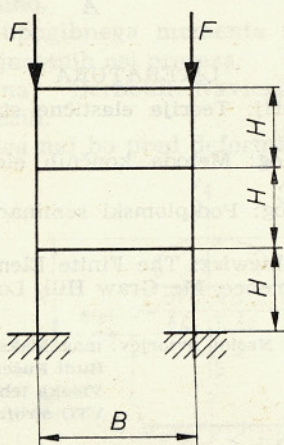
$$v(x) = \sum_{i=1}^4 \Phi_{i(x)} U_i \quad (14)$$

kjer je $v_{(0)} = U_1$ ter $\frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = U_2$ itd. (15)

pri čemer mora oblikovna funkcija $\Phi_{i(x)}$ zadoščati pogojem

$$\begin{aligned} \Phi_1(0) = 1 & \quad \frac{d\Phi_1}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \\ \Phi_1(s) = 0 & \quad \frac{d\Phi_1}{dx} \Big|_{x=s} = 0 \end{aligned} \quad \text{itd.} \quad (16)$$

Če predpostavimo kot deformirano obliko upogibnico gredi, dobimo z upoštevanjem enačb (16)



Sl. 2. Trietažni okvir s konstantno togostjo

oblikovno funkcijo, podano s Hermitovimi polinomi tretje stopnje.

$$\Phi_{1(x)} = 1 - 3\frac{x^2}{s^2} + 2\frac{x^3}{s^3} \quad \text{itd.} \quad (17)$$

4. REŠEVANJE PRAKTIČNIH PRIMEROV

Kadar je pri ravninskih konstrukcijah upogibna togost stebrov in prečk enakega velikostnega reda, strukture ne moremo nadomestiti z enim nosilcem.

Če želimo doseči dovolj natančne rezultate, moramo obravnavati realno strukturo, s čimer pa znatno povečamo obseg dela računalnika. Zgleda na slikah obravnavamo kot konzole le v primerih, ko je prečka absolutno toga in je v njej združena vsa masa. Stebri v tem primeru imajo določeno togost, vendar zanemarljivo maso (sl. 2 in 3).

Velikost kritične sile lahko zapišemo z enačbo

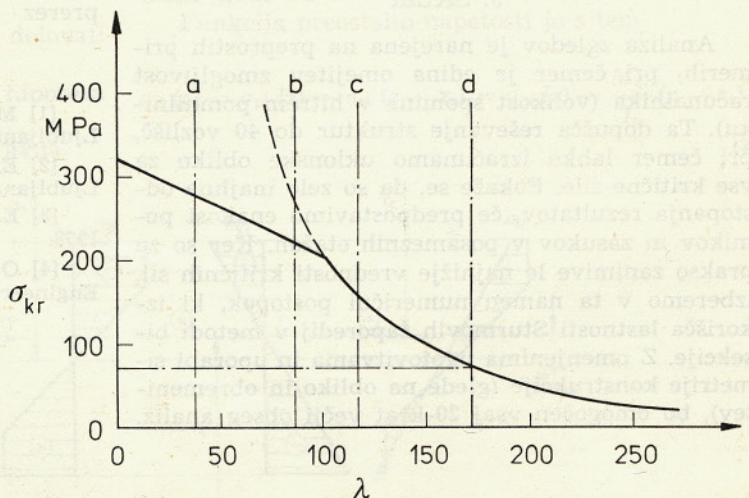
$$F_{kr} = k \frac{EI}{H^2} \quad (18)$$

pri čemer je koeficient primerjalne uklonske dolžine

$$\beta = \frac{\pi}{\sqrt{k}} \quad (19)$$

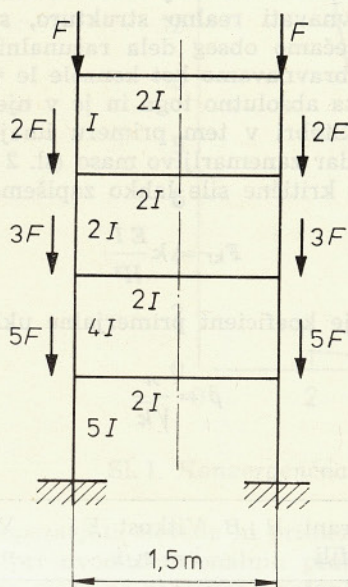
Tabela 1.

Število etaž	Izbrani profili	H : B	Vitkost $\lambda = s_k/i$	EI	V diagramu na sliki 3
ena	INP 20	3 : 1	40	const	a
ena	INP 10	1 : 1	86	const	b
šest	INP 10	1 : 1	117	const	c
šest	INP 10	1 : 3	170	const	d



Sl. 3. Odvisnost kritične napetosti in vitkosti

V prvem in drugem primeru je iz primerjalne uklonske dolžine ($H = 3$ m) izračunana vitkost manjša od 105. Torej doseže tlačna napetost mejo sorazmernosti preden pride do uklona. Lahko pa postopek računanja obrnemo in iščemo tisto število etaž, pri katerem je dosežena meja stabilnosti strukture (koeficient k se zmanjšuje, vrednost λ pa narašča). V zadnjem primeru sta $k = 1,893$ in ustrezna kritična sila $F_{kr} = 72,0$ kN. Iz diagrama na sliki 3 dobimo vrednost za $\sigma_{kr} = 68$ MPa in s tem popolno ujemanje rezultatov.



Sl. 4. Večetažni okvir s spremenljivo upogibno togostjo in zunanjo obtežbo

Za zgled na sliki 4 je $k = 1,59$, pri čemer je okvir izbran tako, da se spreminjata togost in obremenitev.

5. SKLEP

Analiza zgledov je narejena na preprostih primerih, pri čemer je edina omejitev zmogljivost računalnika (velikost spomina v hitrem pomnilniku). Ta dopušča reševanje struktur do 40 vozlišč, pri čemer lahko izračunamo uklonske oblike za vse kritične sile. Pokaže se, da so zelo majhna odstopanja rezultatov, če predpostavimo enakost pomikov in zasukov v posameznih etažah. Ker so za prakso zanimive le najnižje vrednosti kritičnih sil, izberemo v ta namen numerični postopek, ki izkorišča lastnosti Sturmovih zaporedij v metodi bisekcije. Z omenjenima ugotovitvama in uporabi simetrije konstrukcije (glede na obliko in obremenitev), bo omogočen vsaj 20-krat večji obseg analiz.

Prednosti opisanega postopka so predvsem v zanesljivosti, gospodarnosti in stabilnosti numeričnih postopkov, saj je med vsem potekom računanja izključen človeški faktor.

Torej ni potrebno nikakršno poprejšnje znanje o porazdelitvi korenov oziroma pojavljajočih se oblikah uklona (simetričnih ali nesimetričnih).

UPORABLJENE OZNAČBE

Veličina	Simbol	
modul elastičnosti	E	N/mm ² (MPa)
geometrijski		
moment vztrajnosti	I	m ⁴
zunanja obremenitev	F	N
funkcional	Π	—
pomik v polju nosilca	v	m
oblikovna funkcija	Φ	—
vozliščni vektor	U	m, rad
togostna matrika elementa	$[K_e]$	—
geometrijska		
matrika elementa	$[G_e]$	—
dolžina elementa	s	m
število elementov	e	—
lastna vrednost	λ_{kr}, ω^2	—
kritična sila	F_{kr}	N
togostna matrika strukture	$[K]$	—
geometrijska		
matrika strukture	$[G]$	—
koeficient kritične sile	k	—
koeficient primerjalne uklonske dolžine	β	—
širina etaže	B	m
višina etaže	H	m
kritična napetost	σ_{kr}	N/mm ² (MPa)
vitkost	λ	—
prerez	A	m ²

LITERATURA

- [1] M. Škerlj: Teorija elastične stabilnosti, U. Z. Ljubljana 1972.
- [2] E. Prelog: Metoda končnih elementov, U. Z. Ljubljana 1975.
- [3] E. Prelog: Podiplomski seminar, VTŠ Maribor 1978.
- [4] O. Zienkiewicz: The Finite Element Method in Engineering Science, Mc Graw Hill, London 1972.

Naslov avtorjev: mag. Maks Oblak,
Rudi Pušenjak, dipl. ing.,
Visoka tehniška šola —
VTO strojništvo, Maribor