

UDK 536.2:681.3.06

Prenos toplote v vrteninah s postopkom robnih elementov

POLDE ŠKERGET in ANDRO ALUJEVIČ

1. Uvod

V prejšnji razpravi (SV 81/1—3) smo poročali o postopku robnih elementov pri prevajjanju toplote v ravninskih prerezih trdnih teles. Takrat smo imeli na voljo računalniški program s konstantnimi in linearimi elementi za ravninske probleme z mejnimi pogoji prve in druge vrste. Prikazali smo svoje prve rezultate, ko je bila podana robna temperatura oz. topotni tok, uporabili pa smo samo konstantne elemente. Kmalu po tej objavi nam je uspelo odpraviti težave, ki smo jih imeli z računalniškim programom za linearne elemente, ter izdelati program s kvadratnimi elementi. Prav tako smo vgradili tudi mešane (konvekcijske) pogoje tretje vrste in o tem poročali na 6. simpoziju termikov, ki je bil na Bledu v maju 1981. Sedaj smo v okviru raziskovalne naloge »Uporabnost robnih numeričnih metod« (program jedrske energetike) razširili svoje preračune tudi že na osnovno-metrične probleme teles, ki jih obravnavamo v meridianskih prerezih, posebej še s kvadratnim (parabolčnim) robnim elementom, ki ima tri vozlišča.

2. Osnove

Vodilna diferencialna enačba prevajanja toplote v ustaljenih razmerah je

$$\nabla^2 t + p/\lambda = 0 \quad (1)$$

kjer pomenijo t temperaturo, p gostoto topotne moči in λ topotno prevodnost, medtem ko so ustrezi robeni pogoji prve, druge in tretje vrste

$$t = \bar{t}, \quad q = -\lambda \partial t / \partial n = \bar{q}, \quad q = a(t - t_z) \quad (2)$$

kjer pomenijo q topotni tok, n smer normale na površino, a topotno prestopnost in t_z temperaturo fluida, ki obliva obravnavano telo.

S postopkom robnih elementov preide zgornja enačba v integralsko obliko, ki jo za ravninski primer N elementov zapišemo

$$\begin{aligned} c(P) t(P) + \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} t(S) q_2^*(P, S) d\Gamma(S) &= \\ = \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} q(S) t_2^*(P, S) d\Gamma(S) + \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} p(s) t_2^*(P, s) d\Omega(s) & \end{aligned} \quad (3)$$

kjer je sklenjen rob $\Gamma = \sum_{n=1}^N \Gamma_n$

oklepanega prereza $\Omega = \sum_{m=1}^M \Omega_m$

in pomenijo c karakteristično stalnico, P točko vira toplote, S referenčno točko na robu oziroma s referenčno točko v oklepanem območju, medtem ko sta »osnovna« rešitev in njen gradient

$$t_2^* = \frac{1}{2\pi} \ln(1/r), \quad q_2^* = \frac{\lambda}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (4)$$

kjer je $r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$.

Enačbo (3) lahko prevedemo v matrični zapis

$$H \mathbf{t} = \mathbf{G} \mathbf{q} + \mathbf{b} \quad (5)$$

kjer koeficiente h_{ij} in g_{ij} določimo z numerično integracijo oz. analitično v singularnih primerih, medtem ko velja $h_{ii} = -\sum h_{ij}, j \neq i$.

3. Vrtenine

V meridianskem polprerezu Ω_0 , katerega pozitivni obris je Γ_0 , velja nekoliko spremenjena enačba (3) v obliki

$$\begin{aligned} c(P) t(P) + \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} t(S) q_0^*(P, S) R(S) d\Gamma_0(S) &= \\ = \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} q(S) t_0^*(P, S) R(S) d\Gamma_0(S) + & \\ + \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} p(s) t_0^*(P, s) d\Omega_0(s) & \end{aligned} \quad (6)$$

kjer sta »osnovna« rešitev in njen gradient

$$\begin{aligned} t_0^* &= \frac{K(m)}{\pi \sqrt{a+b}} \\ q_0^* &= \frac{1}{\pi \sqrt{a+b}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2R(S)} \\ \cdot \left[\frac{R^2(P) - R^2(S) + [Z(P) - Z(S)]^2}{a-b} E(m) - K(m) \right] \\ \cdot \varphi_{nR}(S) + \frac{Z(P) - Z(S)}{a-b} E(m) \varphi_{nz}(S) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

kjer sta K in E popolna eliptična integrala prve oz. druge vrste, medtem ko so označbe $m = 2b/(a+b)$, $a = R^2(P) + R^2(S) + [Z(P) - Z(S)]^2$ in $b = 2R(P) R(S)$ ter φ , ki pomeni kot med normalo in ustrezeno koordinatno smerjo v referenčni točki. Kadar je vozlišče na vrtilni osi ($R(P) = 0$), velja $m = 0$ in $K(0) = E(0) = \pi/2$, medtem ko osnovna rešitev (7) preide v ustrezeno tridimenzionalno, pomnoženo z 2π .

Če točka P ne leži na elementu, popolne eliptične integrale aproksimiramo s polinomi, člene h_{ij} in g_{ij} pa računamo numerično. Kadar pa P leži na elementu, postanejo integrali singularni. Osnovno rešitev in njen gradient predstavimo tedaj z Legendrovimi funkcijami druge vrste

$$t_0^* = 8^{1/2} Q_{-1/2}(\gamma) / (4\pi b^{1/2}) \quad (8)$$

$$q_0^* = -\frac{8^{1/2}}{4\pi R(S) b^{1/2}} \left\{ \left[\frac{Q_{-1/2}(\gamma)}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{R^2(P) - R^2(S) + [Z(P) - Z(S)]^2}{b} \frac{dQ_{-1/2}(\gamma)}{dy} \right] \cdot \varphi_{nR}(S) + \frac{Z(P) - Z(S)}{R(P)} \frac{dQ_{-1/2}(\gamma)}{dy} \varphi_{nz}(S) \right\}$$

kjer je argument $\gamma = 1 + (a - b)/b$ in $1 \leq \gamma \leq \infty$. Za majhne vrednosti parametra $\gamma \rightarrow 1$ račun posenostavimo z aproksimacijama

$$Q_{-1/2}(\gamma) = -\frac{1}{2} \ln \frac{\gamma - 1}{32} \quad (9)$$

$$\frac{dQ_{-1/2}(\gamma)}{dy} = -\frac{1}{2(\gamma - 1)}$$

Singularne integrale lahko z izrazom (9) vrednotimo analitično. Pri višjerednih elementih postanejo ti integrali preobširni za analitično reševanje v celoti. Tedaj jih razvijemo tako, da osamimo vodilni singularni izraz, ki ga integriramo analitično, medtem ko preostanek izračunamo numerično.

Integrale elementov blizu vrtilne osi ne moremo integrirati po celotni dolžini elementa, ker postane parameter γ velik v točkah daleč stran od točke singularnosti. Singularnost v tem primeru ogradiamo s segmentom elementa dolžine L , kjer aproksimacije (9) veljajo. Preostali del elementa nato računamo tako, kakor da bi bil ločen element.

4. Parabolični elementi

Rešitev enačb (3) oz. (6) poiščemo tako, da predpostavimo linearo oz. konstantno spremenjanje temperature in topotnega toka v posameznem elementu. Ugodnejše razmere dosežemo s »kvadratnimi« elementi, kjer funkcijo in njen odvod (t, q) podamo s kvadratno parabolo, samo geometrijo pa z ravnimi segmenti (anizoparametrični robni elementi).

Vrednosti temperature in njenega gradiента v poljubni točki elementa podamo s tremi vozliščnimi vrednostmi s pomočjo naslednjih zvez

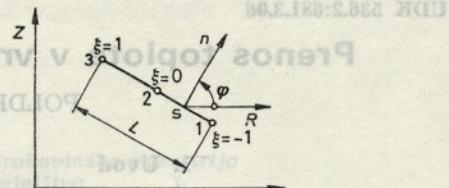
$$t(\xi) = \Phi^T t \quad , \quad q(\xi) = \Phi^T q \quad (10)$$

kjer so $t = \{t_1, t_2, t_3\}$, $q = \{q_1, q_2, q_3\}$ in $\Phi = \{\frac{1}{2}\xi, (\xi - 1), (1 - \xi^2), \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)\}$ pomeni interpolacijske polinome. Ker geometrijo elementa predstavljajo ravni odseki, veljajo relacije

$$x(\xi) = \Psi^T x \quad , \quad y(\xi) = \Psi^T y \quad (11)$$

kjer so $x = \{x_1, x_3\}$, $y = \{y_1, y_3\}$ in $\Psi = \{\frac{1}{2}(1 - \xi), \frac{1}{2}(1 + \xi)\}$ ter $J = L/2$, ki pomeni Jacobijanko ravnega elementa (slika 1).

Izračunane vrednosti komponent h_{ij} in g_{ij} smo podali v poročilu o raziskovalni nalogi [1] in jih zaradi obsežnosti tukaj ne bomo navajali. Omejimo se na primere posebnih leg elementov, ko izrazi postanejo preprostejši.



Sl. 1. Robni element

Za navpične elemente ($\varphi_{nz} = 0$) velja:

- pri vmesnem vozlišču $P(\xi = 0)$

$$g_{22} = 4L(4 - 3 \ln(L/16R(P)))/9$$

$$g_{21} = g_{23} = L(1 - 3 \ln(L/16R(P)))/9 \quad (12)$$

$$h_{21} = h_{23} = L \varphi_{nR}(2 + 3 \ln(L/16R(P)))/18R(P)$$

b) pri krajenem vozlišču $P(\xi = -1)$

$$g_{11} = L(17 - 6 \ln(L/8R(P)))/18$$

$$g_{12} = 2L(5 - 6 \ln(L/8R(P)))/9$$

$$g_{13} = L(-1 - 6 \ln(L/8R(P)))/18 \quad (13)$$

$$h_{12} = L \varphi_{nR}(1 + 6 \ln(L/8R(P)))/9R(P)$$

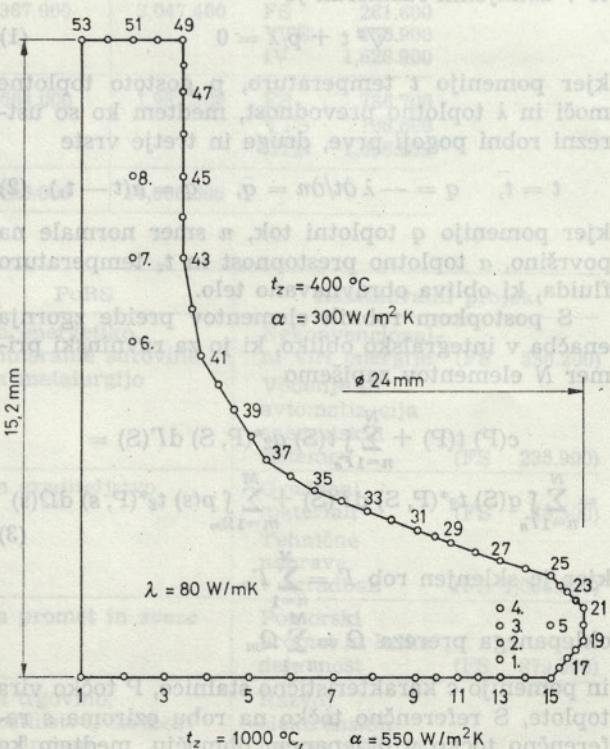
$$h_{13} = L \varphi_{nR}(7 + 6 \ln(L/8R(P)))/36R(P)$$

c) kadar je krajna točka v vrtilni osi, tj. $P(\xi = \pm 1)$ oz. $R(P) = 0$

$$g_{31} = g_{33} = -g_{11} = g_{13} = \pi L(\sin \varphi)/3$$

$$g_{32} = -g_{12} = 4\pi L(\sin \varphi)/3 \quad (14)$$

medtem ko so takrat vsi členi h_{ij} nič zaradi ortogonalnosti n in r .



Sl. 2. Model ventila

5. Primer rezultatov

Kot računski zgled za ponazoritev uspešnosti opisanega postopka predstavljamo model beta motornega ventila (slika 2), ki smo ga simulirali s 26 robnimi elementi (53 vozlišč). Uporabili smo konvekcijske robne pogoje — spodaj $t_z = 1000 \text{ }^{\circ}\text{C}$ in $\alpha = 550 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ oz. zgoraj $t_z = 400 \text{ }^{\circ}\text{C}$ in $\alpha = 300 \text{ W/m}^2 \text{ K}$. Rezultate v robnih in nekaterih notranjih točkah podaja tabela.

Rezultati

Robna točka št.	r mm	z mm	t $^{\circ}\text{C}$	q W/mm^2
1.	0,0	0,0	741,5	— 0,142
2.	1,0	0,0	740,8	— 0,142
3.	2,0	0,0	741,8	— 0,142
4.	3,0	0,0	741,8	— 0,142
5.	4,0	0,0	742,5	— 0,142
6.	5,0	0,0	742,8	— 0,141
7.	6,0	0,0	743,4	— 0,141
8.	7,0	0,0	743,7	— 0,141
9.	8,0	0,0	744,2	— 0,141
10.	8,5	0,0	744,4	— 0,141
11.	9,0	0,0	744,5	— 0,140
12.	9,5	0,0	744,7	— 0,140
13.	10,0	0,0	744,7	— 0,140
14.	10,6	0,0	744,9	— 0,140
15.	11,2	0,0	745,0	— 0,140
16.	11,4	0,2	744,7	— 0,140
17.	11,6	0,4	744,4	— 0,141
18.	11,8	0,6	744,0	— 0,141
19.	12,0	0,8	743,6	— 0,141
20.	12,0	1,2	742,3	0,103
21.	12,0	1,6	741,5	0,102
22.	11,8	1,8	741,4	0,102
23.	11,6	2,0	741,2	0,102
24.	11,4	2,2	740,9	0,102
25.	11,2	2,4	740,7	0,102
26.	10,6	2,6	740,5	0,102
27.	10,0	2,8	740,2	0,102
28.	9,4	3,0	739,8	0,102
29.	8,8	3,2	739,2	0,102
30.	8,4	3,4	738,9	0,102
31.	8,0	3,6	738,2	0,101
32.	7,4	3,8	737,6	0,101
33.	6,8	4,0	736,8	0,101
34.	6,2	4,2	736,0	0,101
35.	5,6	4,4	734,8	0,100
36.	5,0	4,8	732,9	0,100
37.	4,4	5,2	730,7	0,099
38.	4,0	5,8	727,7	0,098
39.	3,6	6,4	724,8	0,097
40.	3,2	7,0	721,5	0,096
41.	2,8	7,6	717,3	0,095
42.	2,6	8,8	709,2	0,093

Robna točka št.	r mm	z mm	t $^{\circ}\text{C}$	q W/mm^2
43.	2,4	10,0	701,9	0,091
44.	2,4	11,0	696,3	0,089
45.	2,4	12,0	691,9	0,088
46.	2,4	13,0	688,4	0,087
47.	2,4	14,0	685,8	0,086
48.	2,4	14,6	684,7	0,085
49.	2,4	15,2	683,9	0,085
50.	1,8	15,2	684,4	0,085
51.	1,2	15,2	684,9	0,085
52.	0,6	15,2	684,9	0,085
53.	0,0	15,2	685,2	0,085

Notr. točka št.	r mm	z mm	t $^{\circ}\text{C}$
1.	10,0	0,4	744,0
2.	10,0	0,8	743,3
3.	10,0	1,2	742,6
4.	10,0	1,6	741,9
5.	11,2	1,2	742,6
6.	1,2	8,0	714,0
7.	1,2	10,0	702,5
8.	1,2	12,0	697,3

LITERATURA

- [1] A. Alujević in sodelavci: Proučitev uporabnosti robnih numeričnih metod za toplotno in termoelastično analizo osnosimetričnih problemov. Poročilo o raziskovalni nalogi. Maribor 1981.
- [2] P. Škerget, F. Čuješ, A. Alujević: Uporaba postopka robnih elementov pri prevajanju toplote v ravnninskih prerezih. SV, 27, str. 26—28, Ljubljana 1981.
- [3] P. Škerget, F. Čuješ, A. Alujević: Postopek robnih elementov pri prevajanju toplote v ravnninskih prerezih trdnih teles. VI. simpozij termikov, Bled 1981.
- [4] C. A. Brebbia: The Boundary Element Method For Engineers. Pentech Press, London—Plymouth, 1978.
- [5] C. A. Brebbia: New Developments in Boundary Element Methods. CML Publ., Southampton 1980.
- [6] C. A. Brebbia: Boundary Element Methods. Proceedings of the 3rd Int. Seminar, Irvine California. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1981.
- Avtorja se zahvaljujeta RSS za štipendijo, s katero je bil PŠ v Southamptonu pri Computational Mechanics Centre od 30. 8. 81 do 28. 2. 82.
- Naslov avtorjev: asistent mag. Polde Škerget, dipl. ing. str., red. prof. dr. Andre Alujević, dipl. ing. str., oba: Visoka tehnička šola Maribor, VTO strojništvo, Smetanova 17.