

Matematična analiza izolacijskih sistemov

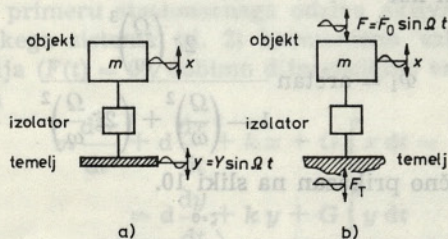
MAKS OBLAK

Uporabljene označbe in enote

Veličina	Označba	Enota
Amplituda vzbujevalne sile	F_0	N
Sila, ki se prenese na temelj	F_T	N
Čas	t	s
Ojačitev aktivnega elementa	G	N/(m . s)
Amplituda nihanja	X, Y	m
Krožna frekvenca vsiljenega nihanja	Ω	s ⁻¹
Lastna krožna frekvenca	ω	s ⁻¹
Togost vzmeti	k	N/m
Viskozno dušenje	d	Ns/m
Kritično dušenje	d_{kr}	Ns/m
Faktor viskoznega dušenja	ξ	—
Frekvenčna karakteristika	$H(\Omega)$	—
Masa vseh nihajočih delov	M	kg
Masa ekscentrično rotirajočih delov	m	kg
Ekscentričnost	e	m
Prenosnost	T	—

Teoretične osnove izolacije vibracij

V obravnavi je zmanjševanje vibracijskih učinkov. Vibracijski izolator v svoji najbolj preprosti obliki imamo lahko za elastični člen, ki združuje objekt in temelj. Njegova vloga je torej zmanjšati velikost motnje, prenesene iz vzbujajočega temelja na objekt oziroma zmanjšati velikost sile, ki se prenaša prek objekta na njegov temelj. V prvem primeru govorimo o vzbujanju s pomiki, v drugem pa o vzbujanju s silami. Na sliki 1 je prikazan osnutek izolacije vibracij kot nihajoči sistem z eno prostostno stopnjo.

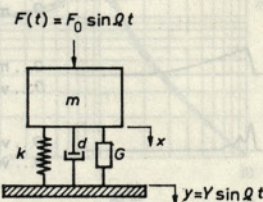


Sl. 1. Osnutek izolacije vibracij

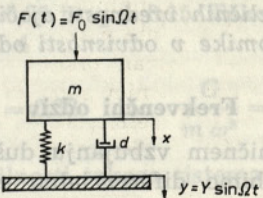
- Vsiljeno nihanje temelja s pomikom y , pri čemer se motnja x prenaša na objekt
- Vzbujanje s silo F na objektu, pri čemer se sila F_T prenaša na temelj

Na sliki 2 je prikazan aktivni izolacijski sistem, pri čemer G označuje ojačitev aktivnega elementa.

Pasivni (konvencionalni) izolacijski sistem je prikazan na slici 3.



Sl. 2. Aktivni izolacijski sistem



Sl. 3. Pasivni izolacijski sistem

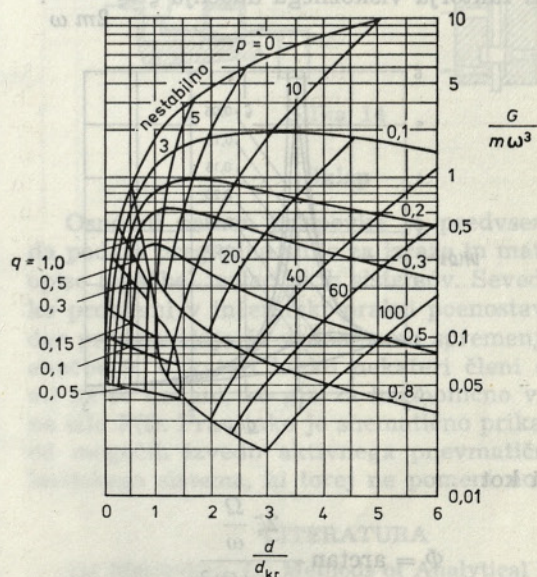
Prehodni odziv

Diferencialna enačba gibanja sistema na sliki 2 se za mirujoč temelj ($y = 0$) zapiše

$$m \ddot{x}(t) + d \dot{x}(t) + k x(t) + G \int x(t) dt = F(t) \quad (1)$$

in jo pri vzbujaanju z enotino stopnico najlaže rešimo z Laplaceovo transformacijo.

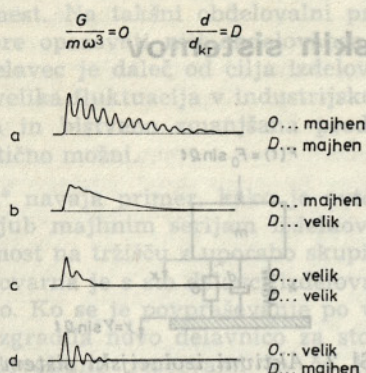
Na sliki 4 je grafično prikazana rešitev enačbe 1 pri čemer sta p in q brezdimenzijski konstanti.



Slika 4

Za različne vrednosti $\frac{d}{d_{kr}}$ in $\frac{G}{m \omega^3}$ dobimo diagrame, prikazane na sliki 5.

$$\frac{G}{m \omega^3} = O \quad \frac{d}{d_{kr}} = D$$



Sl. 5. Vpliv različnih vrednosti ojačitve in dušenja na pomike v odvisnosti od časa

Frekvenčni odziv

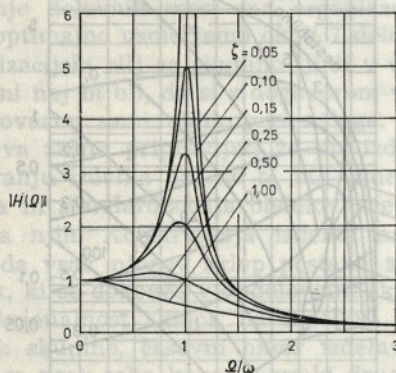
Pri harmoničnem vzbujaanju dušenega sistema na sliki 3 dobimo diferencialno enačbo gibanja ($y = 0$)

$$m \ddot{x}(t) + d \dot{x}(t) + k x(t) = F(t) \quad (2)$$

in ojačitveni faktor (frekvenčna karakteristika)

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right]^2 + \left[2\zeta \frac{\Omega}{\omega} \right]^2 \right\}^{1/2}} \quad (3)$$

grafično prikazan na sliki 6 v odvisnosti od razmerja vsiljene in lastne frekvence $\frac{\Omega}{\omega}$ ter različnih vrednosti faktorja viskoznega dušenja $\zeta = \frac{d}{2m\omega}$.



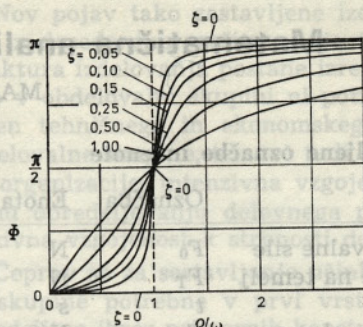
Slika 6

Fazni kot

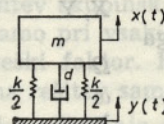
$$\Phi = \arctan \frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega}}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2}$$

je grafično prikazan na sliki 7.

Prenosnost $\frac{F_T}{F_0}$ je enaka kakor pri harmoničnem vzbujaanju temeljev (sl. 9).



Slika 7



Slika 8

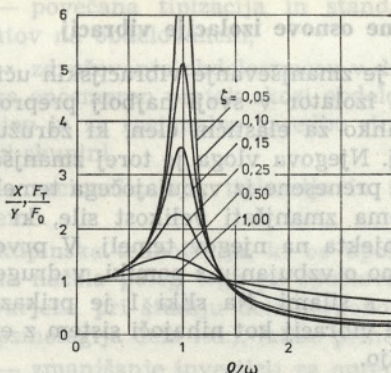
Za sistem na sliki 3 ($F(t) = 0$) dobimo diferencialno enačbo gibanja

$$m \ddot{x} + d(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (4)$$

in je prenosnost podana z enačbo

$$\left| \frac{X}{Y} \right| = \left[1 + \left(\frac{2\zeta \Omega}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} |H(\Omega)| \quad (5)$$

oziroma grafično ponazorjena na sliki 9.

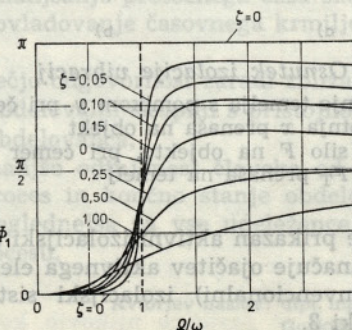


Slika 9

Fazni kot

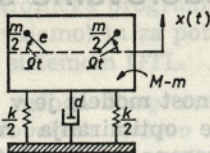
$$\Phi_1 = \arctan \frac{2\zeta \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^3}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega} \right)^2} \quad (6)$$

je grafično prikazan na sliki 10.



Slika 10

V inženirski praksi pogosto srečujemo rotirajoče neizravnanе mase. Na sliki 11 sta prikazani ekscentrični masi, ki se vrtita v nasprotni smeri s kotno hitrostjo Ω .



Slika 11

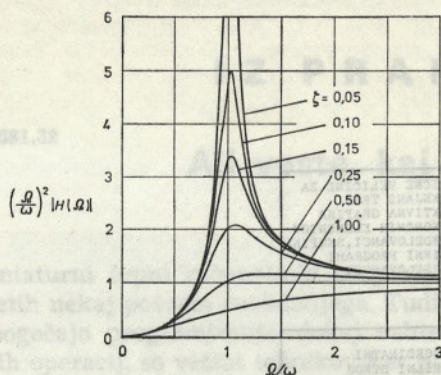
Diferencialna enačba gibanja sistema se zapiše

$$M \ddot{x}(t) + d \dot{x}(t) + k x(t) = \text{Im} (m e \Omega^2 e^{i\Omega t}) \quad (7)$$

Rešitev napišemo v obliki

$$\frac{M X}{m e} = \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 H(\Omega) \quad (8)$$

in je podana na sliki 12 za različne vrednosti ζ in $\frac{\Omega}{\omega}$.



Slika 12

Stacionarni odziv

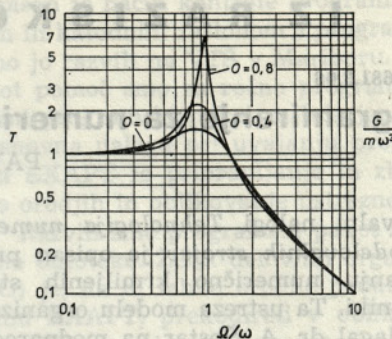
V primeru stacionarnega odziva aktivnega izolacijskega sistema (sl. 2) harmonično vzbujanega temelja ($F(t) = \emptyset$), dobimo diferencialno enačbo gibanja

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} + d \frac{dx}{dt} + k x + G \int x dt &= \\ &= d \frac{dy}{dt} + k y + G \int y dt \end{aligned} \quad (9)$$

Rešitev te enačbe zapišemo v obliki

$$\left| \frac{X}{Y} \right| = \sqrt{\frac{\left[\frac{G}{m \omega^3} - 2 \frac{d}{d_{kr}} \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2}{\left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right]^2 + \left[\frac{G}{m \omega^3} - 2 \frac{d}{d_{kr}} \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right]^2}} \quad (10)$$

in je podana na sliki 13.



Slika 13

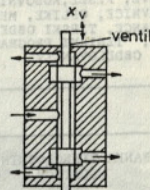
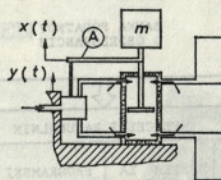
V inženirski praksi se najpogosteje pojavljata vrednosti $p = 0,25$ in $q = 0,15$. Tako dobimo iz diagrama na sliki 4

$$\frac{d}{d_{kr}} = 0,32 \quad \text{in} \quad \frac{G}{m \omega^3} = 0,13$$

Pogoj stabilnosti takega sistema je podan z enačbo

$$2 \frac{d}{d_{kr}} - \frac{G}{m \omega^3} \geq 0 \quad (11)$$

Podobne enačbe oziroma diagrame lahko napišemo in narišemo za AKTIVNI IZOLACIJSKI sistem shematično prikazan na sliki 14 z obojestransko delujočo dušeno PNEVMATIČNO vzmetjo.



Slika 14

Sklep

Osnovni namen prispevka je predvsem v tem, da podaja pregledno sliko za izraze in matematične opise (enačbe) izolacijskih sistemov. Seveda se lahko problemi v inženirski praksi poenostavijo, vendar predstavljajo še vedno samo spremenjeni zapis enačbe 9, v kateri lahko nekateri členi odpadejo, ali pa so dodani, ko gre za harmonično vzbujevalno silo $F(t)$. Prav tako je shematično prikazana ena od mogočih izvedb aktivnega pnevmatičnega izolacijskega sistema, ki torej ne pomeni novosti.

LITERATURA

- [1] Meirovitch, L.: Methods of Analytical Dynamics, McGraw-Hill Book Co., New York, 1970.
- [2] Meirovitch, L.: Analytical Methods in Vibrations, The Macmillan Co., New York, 1967.
- [3] Neobjavljen tipkopis doktorske disertacije (M. Oblak, VTŠ Maribor, 1979).

Avtorjev naslov: dr. ing. Maks Oblak,
VTŠ — Maribor