

UDK 539.4.01/41

Postopek robnih elementov v ravninski elastomehaniki

IZTOK POTRČ, ANDRO ALUJEVIĆ

1. Uvod

Ob postopkih končnih razlik (MKR) in končnih elementov (MKE) se v zadnjem času uveljavljajo tudi metode robnih elementov (MRE). Ta postopek je numerična metoda, pri kateri vodilno diferencialno enačbo transformiramo v integralsko enačbo za rob definicijskega območja, katerega razdelimo na določeno število segmentov. Takšna diskretizacija privede do sistema simultanih linearnih enačb za neznane pomike in reakcije na robu območja. Spremenljivkam na robu predpišemo potek s polinomi. Torej podobno kakor pri MKE tudi pri MRE ločimo konstantne, linearne in višjeredne robne elemente. Če se v telesu pojavljajo tudi notranje sile, npr. zaradi težnosti, magnetizma, centrifugalnih in termičnih sil, moramo njihov vpliv integrirati po notranjosti območja, vendar to ne primaša dodatnih vozlišč oziroma novih neznank.

Ker imajo končni elementi določene nerešljive težave, npr. zaradi napetostnih singularnosti, kar se ne da odpraviti z delitvami na gostejše mreže, so robeni elementi primerni predvsem za take primerne. Vendar tudi robeni elementi niso brez nadlog, npr. kadar lastnosti snovi niso homogene. Zato v takih primerih lahko uporabljamo oba postopka, tj. MKE in MRE združeno.

Postopek robnih elementov je v primerjavi z MKE in MKR tudi ugodnejši za uporabnika, saj je priprava podatkov mnogo preprostejša, računski časi pa precej krajiši in torej cenejši, obenem pa so še rezultati navadno boljši.

2. Zasnova

Pri robnih elementih delamo z modelom, ki zadošča vodilnim enačbam, ima pa določeno število nedoločenih količnikov, ki jih poiščemo s pomočjo robnih pogojev v vozliščih na konturi telesa.

Vodilne enačbe elastomehanike (ravnotežna, konstitutivna in deformacijska) ter njihove robne pogoje (pomike \bar{u} in sile \bar{p}) združimo z načelom virtualnih pomikov v obliko

$$\int (\sigma_{jk,j} + b_k) u^*_k d\Omega = \int (p_k - \bar{p}_k) u^*_k d\Gamma_p + \int (\bar{u}_k - u_k) p^*_k d\Gamma_u \quad (1)$$

kjer so σ napetosti, b prostorske ozir. p površinske sile, u pomiki, medtem ko sta Ω območje in Γ njegov rob. Z integracijo enačbe (1) dobimo

$$c u^i + \int u_k p^*_{kl} d\Gamma = \int p_k u^*_{kl} d\Gamma + \int b_k u^*_{kl} d\Omega \quad (2)$$

kjer je karakteristična stalnica $c = 1$ v notranjih točkah in $c = \frac{1}{2}$ na robu, medtem ko pomenita p^* in u^* sile oziroma pomike v smeri k zaradi enotne obremenitve točke i v smeri l . S postopkom robnih elementov tako dobimo enačbo v matrični obliki

$$K u = G p + b \quad (3)$$

ki jo razrešimo z numeričnimi sredstvi na računskem stroju. Tako dobimo robne pomike in reakcije, notranje vrednosti pomikov pa določimo posebej iz robnih vrednosti pomikov.

Ustrezne osnovne rešitve za u^* in p^* so pri izotropiji za prostorska in ravninska telesa naslednje

3D :

$$u^*_{kl} = \left[(3 - 4\nu) \delta_{kl} + \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] / [16\pi G(1 - \nu) r] \quad (4)$$

$$p^*_{kl} = - \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1 - 2\nu) \delta_{kl} + \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} - (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_l} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_l \right) \right] / [8\pi(1 - \nu) r^2] \quad (5)$$

2D :

$$u^*_{kl} = \left[(3 - 4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{kl} + \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] / [8\pi G(1 - \nu)] \quad (6)$$

$$p^*_{kl} = - \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1 - 2\nu) \delta_{kl} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\} - (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_l} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_l \right) \right] / [4\pi(1 - \nu) r] \quad (7)$$

Napetosti določimo iz pomikov z obrazcem

$$\sigma_{ij} = \int D_{kij} p_k d\Gamma - \int S_{kij} u_k d\Gamma + \int D_{kij} b_k d\Omega \quad (8)$$

kjer sta ustrezeni zvezni

$$D_{kij} = \frac{1}{r^A} \left[(1 - 2\nu) \left(\delta_{ki} \frac{\partial r}{\partial x_j} + \delta_{kj} \frac{\partial r}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) + B \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] / [4A\pi(1 - \nu)] \quad (9)$$

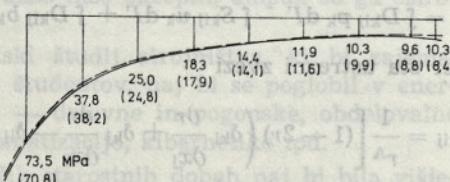
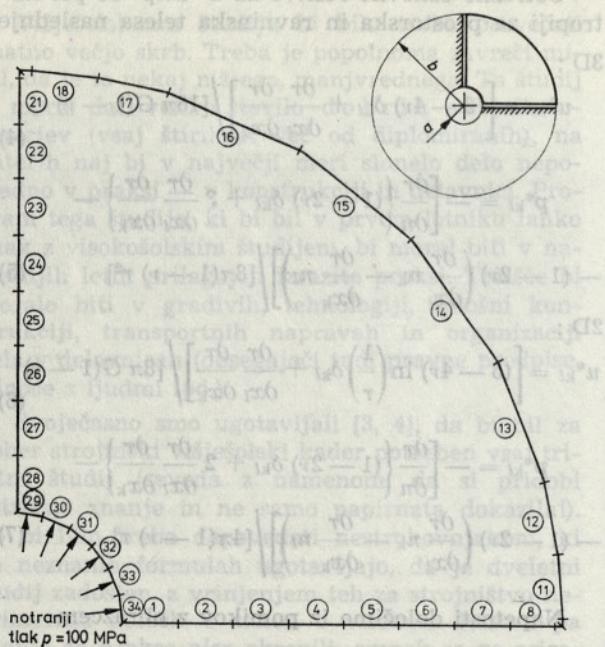
$$S_{kij} = \frac{2\nu}{r^B} \left\{ B \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1 - 2\nu) \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \nu \left(\delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial x_j} + \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) - C \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] + B \nu \left(n_i \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} + n_j \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) + (1 - 2\nu) \left(B n_k \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} + n_i \delta_{ik} + n_i \delta_{jk} \right) - (1 - 4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} / [4A\pi(1 - \nu)] \quad (10)$$

kjer so: B = dimenzija naloge (2D ali 3D), $A = B - 1$; $C = B + 2$.

3. Rezultati

Z opisano metodo smo obdelali dva zgleda — debelostensko cev z notranjim tlakom (slika 1) in zobnik, obremenjen s silo (slika 2).

DEBELOSTENSKA CEV: Zaradi simetrije smo upoštevali samo en kvadrant, ki smo ga modelirali s 34 robnimi elementi, katerih vozlišča so v težiščih daljic. Rezultati so bili zelo dobri. Primerjali smo obročne napetosti, ki so se ujemale z znanou analitično rešitvijo (napaka 4 % zaradi grobosti delitve). Samo v vogalih kvadranta cevi je bila napaka do 20 % zaradi spremembe pogoja v kotu,



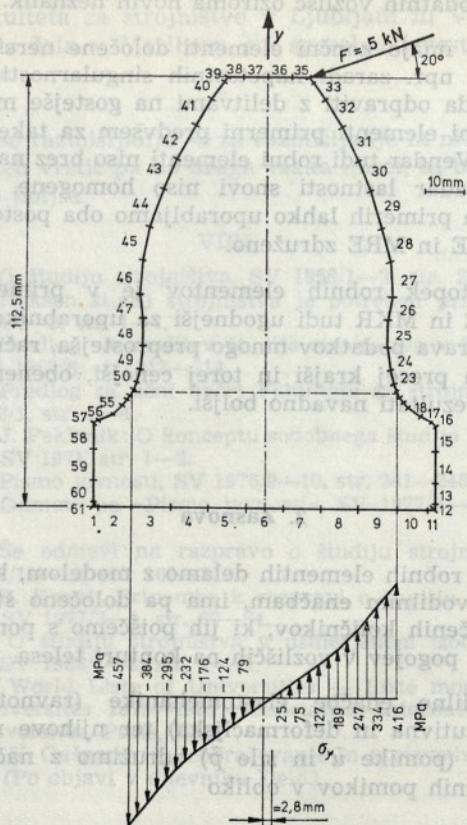
Sl. 1. Debelostenska cev

kar pa lahko povsem izločimo le z obravnavo celotnega prereza cevi oziroma z uporabo višjerednih robnih elementov. V notranjih točkah so se gibali rezultati prav tako zelo blizu analitičnim rešitvam (napake 3 %), razen tik ob robu, kjer so nenatančnosti razmeroma velike v pasu, ki sega do pol dolžine robnega elementa v neposredni bližini. Ta napaka seveda ni bistvena, pomagamo si lahko z interpolacijo v obrobju, saj so robne vrednosti pravilne.

ZOBNIK: Ker so bile znane numerične rešitve, dobljene z MKE (200 elementov in 121 vozlišč), smo ta primer obdelali z 61 robnimi elementi. Ob manjši porabi časa (50 %) smo dobili boljše rezultate kakor [1].

4. Sklep

Z analizami smo se prepričali, da za naše potrebe lahko uporabljamo postopek robnih elementov. Na voljo imamo ustrezne ravninske toplotne [2], elastomehanske [3] in plastomehanske [4] programe, ki smo jih dobili pri Computational Mechanics Ltd. Southampton [5—10]. Ker dobljeni programi vsebujejo le osnovne konstantne robne elemente, vgrajujemo vanje višjeredne elemente, ločili pa smo se tudi termoelastičnosti in osnosimetrično obremenjenih vrtenin [11].



Sl. 2. Model korena zoba

LITERATURA

- [1] J. Flašker, M. Huzjak, Z. Čar: Določanje napetosti v korenju zoba z metodo končnih elementov. Strojniški vestnik, 27, 14—18, Ljubljana 1981.
- [2] P. Škerget: Metoda robnih elementov v kondukciji toplotne s konvekcijskim pogojem. Poročilo raziskovalne naloge, VTŠ Maribor 1981 (Strojniški vestnik, 27, 26—28, Ljubljana 1981 in Strojniški vestnik, 28, 19—21, Ljubljana 1982).

[3] I. Potrč, A. Alujevič: Elastomehanika z metodo robnih elementov. Poročilo raziskovalne naloge, VTŠ Maribor 1981 (glej tudi IJS-DP-2371, Ljubljana 1981).

[4] I. Potrč, A. Alujevič: Plastomehanika z metodo robnih elementov. Poročilo raziskovalne naloge, VTŠ Maribor 1981 (glej tudi IJS-DP-2372, Ljubljana 1981).

[5] C. A. Brebbia: The Boundary Element Method for Engineers. Pentech Press, London-Plymouth 1978.

[6] C. A. Brebbia (ed.): Recent Advances in Boundary Element Methods. Pentech Press, London-Plymouth 1978 (Proceedings 1st Int. Seminar on BEM).

[7] C. A. Brebbia-S. Walker: Boundary Element Techniques in Engineering. Newnes-Butterworths, London 1979.

[8] C. A. Brebbia (ed.): New Developments in Boundary Element Methods. CML Publications, Southampton 1980 (Proceedings 2nd Int. Seminar on BEM).

[9] C. A. Brebbia (ed.): Boundary Element Methods. CML Publ. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1981 (Proceedings 3rd Int. Seminar on BEM).

[10] C. A. Brebbia (ed.): Progress in Boundary Element Methods, Vol. 1. Pentech Press, London-Plymouth 1981.

[11] M. Mayr: Ein Integralgleichungsverfahren zur Lösung rotationssymmetrischer Elastizitätsprobleme. Disertacija, TU München 1975.

[12] P. K. Banerjee-R. Butterfield (ed.): Developments in Boundary Element Methods. Applied Science Publishers, London 1979.

[13] T. A. Cruse-F. J. Rizzo (ed.): Boundary-Integral Equation Method, Computational Applications in Applied Mechanics. ASME, New York 1975.

Naslov avtorjev: Asistent Iztok Potrč, dipl. ing. str.
Red. prof. dr. ing. Andro Alujevič,
Oba — VDO Visoka tehniška šola
VTO strojništvo

Univerza v Mariboru
62000 Maribor, Smetanova 17

UDK 62.002.2:539.4:519.2

Dimenzioniranje na verjetnostni osnovi*

MAKS OBLAK, BRANKO BUTINAR

Uporaba računalnika v inženirski praksi omogoča manj zamudno reševanje z novimi metodami že prej rešljivih problemov, hkrati pa omogoča obravnavanje pojmov, ki jih do sedaj ni bilo mogoče računsko reševati. Področje uporabne mehanike je aplicirano na verjetnostno analizo koncentracije napetosti in središčne prehodne razpoke. Zlasti mehanika loma je izredno aktualna in bi se morala vključiti v programe dodiplomskega študija kot vzgojna disciplina.

1. Uvod

Ko načrtujemo konstrukcijo, njena odpornost ni vnaprej povsem določena, saj je odvisna od spremenljivih mehanskih lastnosti materiala, neznane natančnosti izdelave, morebitnih napak itd. Doslej smo vajeni dimenzionirati strojne dele in naprave s postopkom dopustnih napetosti. Vse polno pa je dokazov, da postopek dopustnih napetosti, zlasti pri statično nedoločenih konstrukcijah, stabilnostnih problemih, vplivu zaostalih napetosti in koncentracij napetosti ne omogoča ustreznegra vpogleda v dejansko varnost konstrukcij. Tudi obremenitev se spreminja in je negotova zlasti pri vplivih, ki jih človek ne more obvladati. Zato se pojavlja mnenje, da je deterministično gledanje na reševanje zgoraj navedenih problemov neustrezno.

2. Teoretične osnove

a) Kritično silo obojestransko členkasto pritrjenne palice izračunamo po enačbi

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E I}{L^2} \quad (1)$$

Praksa kaže, da smemo predpostaviti porazdelitev parametrov palice E , I in L tako, da za opis ustrezone porazdelitve zadoščata ocenjeni vrednosti za parametre μ in s . Npr. slučajna spremenljivka E je določena z (\bar{E}, \hat{s}_E) . Sedaj postane tudi F_{kr} slučajna spremenljivka in moramo dobiti njen po razdelitev, da lahko nadaljujemo s konstruiranjem na verjetnostni osnovi. Natančno porazdelitev F_{kr} je težko dobiti, laže dobimo oceni za parametra $\mu_{F_{kr}}$ in $\hat{s}_{F_{kr}}$.

Oceni dobimo z razvitjem v Taylorjevo vrsto.

* Delo je sofinancirala RSS, št. pogodbe C2-0132/795-81.