

UDK 539.4.014.11:681.32

Analiza deformacij in napetosti s preprostimi in izoparametričnimi končnimi elementi na miniračunalniku

ANTON JEZERNIK

1. UVOD

Analize deformacij in napetosti po metodi končnih elementov za primere dveh in treh razsežnosti so dandanes v praksi še vedno vezane pretežno na uporabo večjih računalniških sistemov po multi-programskem načinu dela, le priprava podatkov in obdelava rezultatov se izvajata pogosto na miniračunalnikih. V naši praksi je na voljo še vedno razmeroma le malo zmogljivih večjih računalniških sistemov, pa tudi obstoječi večji sistemi večinoma niso opremljeni s kakovostno programsko opremo za take analize.

Zato je za uporabnike pomembno vedeti, da je tudi obsežnejše in zahtevne analize po metodi končnih elementov mogoče izvajati na domačih miniračunalniških sistemih, ki so se v zadnjih letih v gospodarstvu zelo razširili. Za analize deformacij in napetosti po metodi končnih elementov na takih sistemih pa je pomembno, da uporabnik čimbolj optimalno modelira problem (izbere tip končnega elementa) in izbere tako tehniko reševanja, pri kateri so računski časi čimkrajši.

Nekaj smernic za optimalno izbiro modela in reševanje napetostnih problemov po metodi končnih elementov na miniračunalnikih je v tem pripevku.

2. TEORETIČNE OSNOVE

2.1. Osnovne enačbe

Teorija metode končnih elementov za probleme elastomehanike je dobro znana [1], zato je podan tukaj le pregled osnovnih enačb, pomembnih za obravnavo preprostih in izoparametričnih končnih elementov.

Za končni element e , ki ga omejujejo vozlišča 1, 2, 3, ..., n , je vektor pomikov v vsaki točki znotraj elementa definiran z

$$\{u\} = [a] \{c\} \quad (1)$$

kjer je $\{u\}$ vektor pomika v polju elementa. Pravokotna matrika $[a]$ je t. i. poljska matrika, $\{c\}$ pa je vektor konstant. Vozlišče je robna točka polja, kjer zavzame pomik predpisane vrednosti. Za robne pogoje lahko torej zapišemo

$$\{u^k\} = \{U\} \quad \text{in} \quad [a^k] = [a]$$

pri čemer je k — konturna vrednost, enačba (1) pa dobi obliko

$$\{U\} = [a^k] \{c\}$$

kjer je $[a^k]$ poljska matrika robnih vrednosti. Če iz zgornje enačbe izrazimo $\{c\}$ in ga vstavimo v enačbo (1) dobimo enačbo

$$\{u\} = [a] [a^k]^{-1} \{U\} = [N] \{U\} \quad (2)$$

kjer je $[N]$ oblikovna matrika ali funkcija (tudi interpolacijska matrika), katere komponente so funkcije pozicije, $\{U\}$ pa je vektor pomikov v vozliščih elementa. Izbira oblikovne matrike je velikega pomena za analize po metodi končnih elementov. Specifične deformacije $\{\epsilon\}$ in napetosti $\{\sigma\}$ v odvisnosti od vozliščnih pomikov pa izhajajo iz naslednjih relacij:

$$\{\epsilon\} = [d] \{u\} = [d] [N] \{U\} \quad (3)$$

in

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} = [E] [d] [N] \{U\} + \{\sigma^t\} \quad (4)$$

kjer sta $[E]$ matrika elastičnosti, $\{\sigma^t\}$ pa vektor toplotnih obremenitev. Z upoštevanjem načela virtualnih pomikov je mogoče enačiti vozliščne sile, kontinuirne obremenitve in tlačne obremenitve z napetostmi v elementu. Dobimo osnovno ravnotežno enačbo KONČNEGA ELEMENTA

$$\{F\} = [k] \{U\} + \{F^t\} \quad (5)$$

kjer je

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \quad (6)$$

togostna matrika za končni element; $\{F^t\}$ je vektor toplotnih sil $[d] [N] = [B]$; vektor $\{F\}$ pa pomeni vektor vozliščnih sil. Togostna matrika $[K]$ povezuje vozliščne sile in vozliščne pomike in zajema geometrijo (velikost, lego in obliko) in mehanske lastnosti materiala končnega elementa. Togostna matrika končnega elementa je kvadratna in simetrična na glavno diagonalo. Enačba (5) izraža ravnotežje zunanjih in notranjih vozliščnih sil na elementu. Čim smo matriko $[N]$ izbrali, lahko iz enačbe (5) izračunamo vozliščne pomike $\{U\}$. Upoštevati je treba, da ima konstrukcija m elementov in n vozlišč, prek katerih so elementi povezani med seboj. Z ustreznim združevanjem vseh m enačb (5) dobimo ravnotežno enačbo konstrukcije

$$F = K U \quad (7)$$

kjer pomenijo F vektor vozliščnih sil, K togostno matriko konstrukcije, U pa vektor vozliščnih pomikov za konstrukcijo. Ob upoštevanju robnih pogojev in zunanje obremenitve poiščemo vse neznane komponente vektorja U .

2.2. Teorija preprostih in izoparametričnih dvodimenzionalnih končnih elementov

Pri analizah po metodi končnih elementov razdelimo stanja dveh razsežnosti na dve skupini: ravninska stanja, tj. stene, in osnosimetrična stanja ali vrtenine. Pri računanju ravninskih stanj obravnavamo najpogostejše:

— ravninsko napetostno stanje z deformacijskim tenzorjem ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$) in napetostnim tenzorjem ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) in

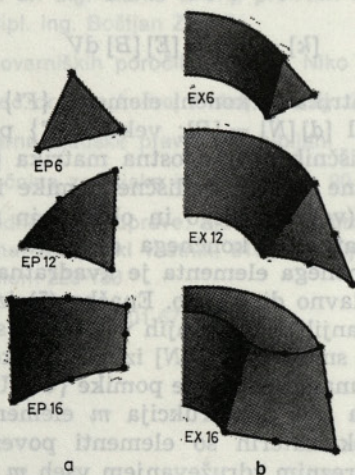
— tehnično ravninsko deformacijsko stanje z deformacijskim tenzorjem ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}$) in napetostnim tenzorjem ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$). Pri takem stanju sta smer deformacije ε_z in napetosti σ_z pravokotna na ravnino x, y .

Pri osnosimetričnem ali vrteninskem stanju se pojavljata deformacijski tenzor ($\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta$ in γ_{rz}) in napetostni tenzor ($\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta$ in τ_{rz}).

Za omenjene primere dveh razsežnosti uporabljamo pri modeliranju in analizah po metodi končnih elementov več vrst končnih elementov.

Končne elemente delimo na preproste, pri katerih postavimo, da se pomiki po elementu spreminjajo linearno, napetosti in deformacije po elementu pa vzamemo za konstantne, ter izoparametrične, pri katerih postavimo, da se pomiki po elementu spreminjajo po npr. kvadratni paraboli, deformacije in napetosti pa linearno ali pa spreminjanje pomikov, deformacij in napetosti po elementu modeliramo s polinomi višjih stopenj.

Sl. 1 prikazuje dva preprosta in štiri izoparametrične končne elemente za ravninske in osnosimetrične probleme.



Sl. 1. Preprosti in izoparametrični končni elementi
a — ravninski elementi, b — vrteninasti elementi

Za vse končne elemente velja enačba pomikov v polju elementa [1]. Poljska matrika ima za preproste končne elemente obliko:

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \quad (8)$$

in dimenzije $[2 \times 6]$. Za ta dva elementa velja, da so deformacije in napetosti po elementu konstantne, pomiki in temperature pa se spreminjajo linearno.

Poljska matrika za izoparametrična končna elementa EP 12 in EX 16 ima obliko:

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

in dimenzije $[2 \times 12]$. Pomiki po polju elementa se za ta dva elementa spreminjajo po kvadratni paraboli, napetosti pa linearno.

Za izoparametrična končna elementa EP 16 in EX 16 pa ima poljska matrika obliko

$$[a] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 & xy^2 & x^2y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 & xy^2 & x^2y \end{bmatrix} \quad (10)$$

in dimenzije $[2 \times 16]$. Pri elementih EP 16 in EX 16 se napetosti in deformacije vzdolž stranic spreminjajo linearno, pomiki in temperature pa po kvadratnem zakonu.

Iz enačbe (2) je razvidno, da za oblikovno matriko velja enačba

$$[N] = [a] [a^k]^{-1} \quad (11)$$

Oblikovna matrika je reda $[6 \times 6]$ za končna elementa EP 6, EX 6, $[12 \times 12]$ za končna elementa EP 12, EX 12 in reda $[16 \times 16]$ za končna elementa EP 16, EX 16. Invertiranje takšne matrike pa bi bilo zelo zamudno, zato uporabljamo drugačne postopke

$$[N] = [p_1 I_2, p_2 I_2, \dots, p_8 I_2] \quad (12)$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ — matrika enote drugega reda} \quad (13)$$

$$p_i = \frac{1}{2} (1 + x_0) (1 + y_0) (x_0 + y_0 - 1) \quad \text{za } i = 1, 3, 5, 7$$

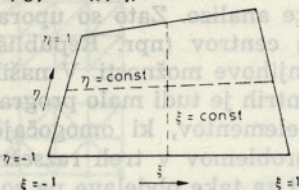
$$p_i = \frac{1}{2} (1 - x^2) (1 + y_0) \quad \text{za } i = 2, 6$$

$$p_i = \frac{1}{2} (1 - y^2) (1 + x_0) \quad \text{za } i = 4, 8 \quad (14)$$

kjer je $x_0 = x x_i$ in $y_0 = y y_i$.

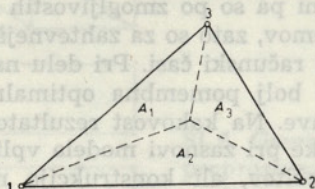
V te enačbe vstavljamo za x_i in y_i koordinate točk, ki so normirane tako, da zavzamejo vrednosti med $+1$ in -1 . Za poenostavitev izberemo brezdimenzijske koordinate, tako da ima končni element N vozlišče z vozliščnimi oblikovnimi funkcijami $p_i, i = 1 \dots N$. Po definiciji je v vsaki točki $j, P_j = 1$ in $p_i = 0$ za $i = 1 \dots, j-1, j+1 \dots N$. Vrednosti p_i zunaj vozlišč so odvisne od tipa končnega elementa.

Za četverkotnike sta brezdimenzijski koordinati ξ in η (sl. 2) izbrani tako, da variirata med -1 in $+1$, in se zaradi tega v prostoru (ξ, η) preslikata v kvadrat z dolžino stranic dve enoti. To je preslikava $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$.



Slika 2

Za trikotnik pa so brezdimenzijske površinske koordinate L_1, L_2 in L_3 izbrane tako, da nihajo med 0 in 1 in pri tem velja $L_1 + L_2 + L_3 = 1$. Tako velja, če je A površina trikotnika 123 (sl. 3), da je $L_1 = A_1/A$; $L_2 = A_2/A$ in $L_3 = A_3/A$.

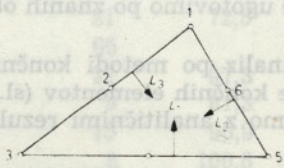


Slika 3

Relacija $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ pa pove, da lahko namesto treh koordinat uporabljamo samo dve: $L_3 = 1 - L_2 - L_1$.

Pri reševanju trikotnih elementov dobimo z uporabo površinskih koordinat mnogo ustrežnejše zapise vektorjev in matrik kakor s kartezijskimi. Zaradi nevariantnosti površinskih koordinat odpadejo obsežne transformacije togostnih matrik v globalni koordinatni sistem in izrazi za integriranje po ploskvi trikotnika se zelo poenostavijo.

Oblikovne funkcije za končna elementa EP 12 in EX 12 v površinskih koordinatah prikazuje slika 4.



Slika 4

Oba elementa imata šest vozlišč, tri v ogliščih in tri v razpoloviščih stranic.

$$N = p_1, p_2, \dots, p_6$$

$$p_1 = L_1 (2 L_1 - 1)$$

$$p_2 = 4 L_1 L_2$$

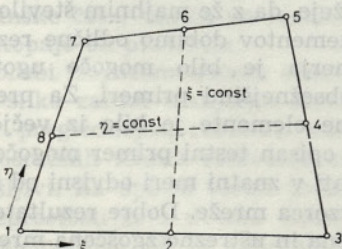
$$p_3 = L_2 (2 L_2 - 1)$$

$$p_4 = 4 L_2 L_3$$

$$p_5 = L_3 (2 L_3 - 1)$$

$$p_6 = 4 L_3 L_1$$

(15)



Slika 5

Oblikovne funkcije za končna elementa EP 16 in EX 16 v brezdimenzijskih koordinatah so prikazane na sliki 5.

Končna elementa imata osem vozlišč, štiri v ogliščih in štiri v razpoloviščih stranic.

$$N = p_1, p_2, \dots, p_8$$

$$p_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) (\xi + \eta + 1)$$

$$p_2 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta)$$

$$p_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta^2)$$

$$p_4 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (\xi + \eta - 1)$$

$$p_5 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (\xi + \eta - 1)$$

$$p_6 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta)$$

$$p_7 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) (-\xi + \eta - 1)$$

$$p_8 = \frac{1}{2} (1 - \xi) (1 - \eta^2) \quad (16)$$

2.3. Togostne matrike za izoparametrične elemente

Ko poznamo oblikovno matriko $[N]$, je že mogoče nastaviti osnovno ravnotežno enačbo končnega elementa (5). Togostno matriko elementa izračunamo po enačbi (6)

$$[K] = \int_V [B]^T [E] [B] dV$$

in jo numerično rešimo. Za preproste trikotne elemente je matrika $[K]$ dobro znana in preprosta, saj sta za te elemente oblikovna matrika $[N]$ in zato matrika $[B]$ preprosti.

Enačbo (6) rešimo za izoparametrične elemente (sl. 1) z Gaussovo integracijo, enačba (6) pa dobi obliko

$$[K] = \sum_i [B_i]^T [E] [B_i] W_i \quad (17)$$

kar je seštevek togostnih funkcij v t. im. Gaussovih točkah, indeks i pomeni ustrezno Gaussovo točko, W_i pa primerno obtežno funkcijo, kar pove, da je treba funkcije vrednosti izbrati pri natančno določenih vrednostih funkcijskega argumenta (abscise XG).

Za ravninske primere zadoščata dve Gaussovi točki, in sicer:

$$XG = 0,577350269189626$$

$$\text{in } XG = -0,577350269189626$$

ter njima pripadajoče uteži

$$UG = -1, 0$$

$$UG = +1, 0$$

Matrika elastičnosti ima za ravninsko napetostno stanje obliko

$$[E] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

za osnosimetrična stanja pa

$$[E] = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix}$$

Zapišemo še, da je (19)

$$\begin{aligned} G &= XG(I) & I &= 1, 2 \\ \text{in } H &= XG(J) & J &= 1, 2 \end{aligned}$$

G in H razdelimo med 0 in 1 za elementa EP 12 in EX 12

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2}(1 + G) = L_1 \\ H &= \frac{1}{2}(1 + H)(1 - G) = L_2 \end{aligned}$$

in za tako dobljeni vrednosti izračunamo matriko $[B] = [d][N]$, kjer je $[d]$ matrika diferencialnih operatorjev in ima obliko

za ravninske
elemente

za osnosimetrične
elemente

$$[d] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad [d] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Oblikovne funkcije $[N]$ so definirane v prejšnjih odstavkih.

3. ODLOČITVE PRI REŠEVANJU PROBLEMOV PO METODI KONČNIH ELEMENTOV

Analiza deformacij in napetosti po metodi končnih elementov za primere dveh in treh razsežnosti v praksi je pogosto povezana s precejšnjimi stroški, ki so odvisni od časa, porabljenega za pripravo modela oz. podatkov, in računalniških stroškov.

Stroške za pripravo podatkov oz. modele je danes z uporabo učinkovitih predprocesorskih programov in računalniške grafične opreme mogoče bistveno znižati, saj poteka avtomatična računalniška priprava predvsem obsežnih geometrijskih podatkov hitro in je za uporabnika zanimiva. Slika modela je mogoče prikazati in opazovati na zaslonu in risalniku. Še pred dobrim desetletjem pa je bil tak način dela zelo omejen.

Računanje napetosti in deformacij obsega večji del računalniških stroškov, ki so pri večjih problemih še vedno precejšnji. Pomembno pa je vedeti, da so računalniški stroški analiz in kakovost rezultatov v veliki meri odvisni tudi od nekaterih odločitev, preden začnemo s pripravo obdelave, in sicer:

- odločitev, ali za delo uporabljamo večji računalniški sistem ali miniračunalnik,
- odločitev, ali problem obravnavamo v dveh razsežnostih, oz. če je potrebno v treh,
- odločitev, ali element konstrukcije modeliramo, oz. računamo s preprostimi ali izoparametričnimi elementi.

Odgovor na prvi dve vprašanji v naši praksi ni posebno težak, saj je v našem gospodarstvu na voljo še vedno le malo zmogljivih večjih računalniških sistemov, pa tudi obstoječi večji sistemi večinoma niso opremljeni s kakovostno programsko opremo za take analize. Zato so uporabniki navezani na nekaj centrov (npr. Republiški računski center) in na njihove možnosti. V naših večjih računalniških centrih je tudi malo programov po metodi končnih elementov, ki omogočajo računanje zahtevnejših problemov v treh razsežnostih, računalniški stroški za take obdelave pa so zelo visoki.

Zato je za uporabnike pomembno vedeti, da je analize po metodi končnih elementov, tudi obsežnejše in zahtevne, mogoče izvajati tudi na domačih miniračunalniških sistemih, ki so se v zadnjih letih v delovnih organizacijah dokaj razširili. Miniračunalniški sistemi pa so po zmogljivostih skromnejši od večjih sistemov, zato so za zahtevnejše obdelave potrebni dolgi računski časi. Pri delu na teh sistemih je toliko bolj pomembna optimalna zasnova modela obdelave. Na kakovost rezultatov in računalniške stroške pri zasnovi modela vplivata v veliki meri odločitve, ali konstrukcijo modeliramo s preprostimi ali izoparametričnimi končnimi elementi, in izbira numerične tehnike reševanja enačbe konstrukcije.

V naslednjih odstavkih je prikazan primer analize deformacij in napetosti na miniračunalniku ISKRA DATA 18-20, en del analiz pa je bil izveden tudi na računalniku DELTA 340/40.

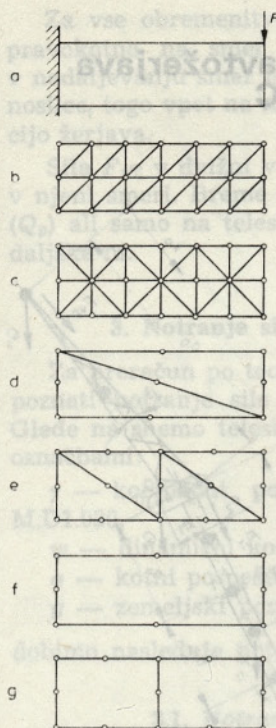
4. OBRAVNAVA TESTNEGA PRIMERA IN SKLEPI

Za primer vzemimo preprost konzolni nosilec obremenjen s silo F , prikazan na sliki 6 a. Za predpisane podatke ugotovimo po znanih obrazcih poves pod silo F .

Rezultate analiz po metodi končnih elementov za različne tipe končnih elementov (sl. 6 b, c, d, e, f in g) primerjamo z analitičnimi rezultati za poves pod silo F .

Pri analizah so bili uporabljeni programi STAG z iterativno tehniko reševanja in program BERSAFE z direktno frontalno tehniko reševanja enačb. Analize s programom STAG so bile izvedene na računalniku ISKRA DATA 18-20 in DELTA 340/40, s programom BERSAFE pa le na računalniku ISKRA DATA 18-20.

Rezultati za poves pod silo F v razpredelnici 1 in sliki 7 kažejo, da z že majhnim številom izoparametričnih elementov dobimo odlične rezultate. Podobna razmerja je bilo mogoče ugotoviti tudi z drugimi obsežnejšimi primeri. Za preproste trikotne končne elemente je bilo iz večjega števila analiz in za opisan testni primer mogoče ugotoviti, da so rezultati v znatni meri odvisni od števila elementov in vzorca mreže. Dobre rezultate daje čim bolj simetrična in ustrezno zgoščena mreža (npr. c).



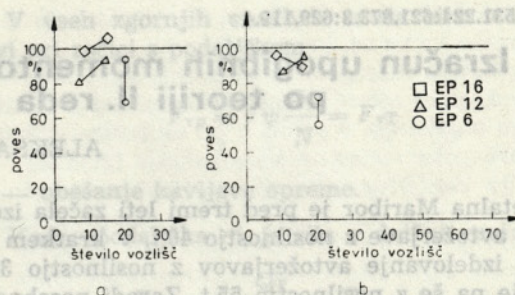
Sl. 6. Geometrijske mreže preprostega konzolnega nosilca za preproste in izoparametrične elemente

Razpredelnica 1. Natančnost rezultatov za testni primer

Mreža	Število elementov	Število vozlišč	Izračunan povos pod silo F Natančnost v %	
			program STAG (iterativna tehnika)	program BERSAFE (neposredna frontalna tehnika)
b	24	21	72,5	58,7
b	96	65		63,0
c	24	21	97,3	69,1
d	2	9	81,3	86,0
e	4	15	96,9	96,2
f	1	8	100,8	98,3
g	2	13	108,8	93,0

Preveč zgoščena mreža preprostih trikotnih elementov daje spet rezultate, ki bolj odstopajo od pravilnih vrednosti. Primerjava tehnik reševanja daje prednost neposrednim metodam, npr. frontalnemu v programu BERSAFE, saj iterativna tehnika reševanja v obsežnejših primerih zahteva zelo dolge računske čase, včasih pa rezultati nihajo oz. precej odstopajo od pravilnih.

Pri uporabi izoparametričnih elementov je geometrijska slika zaradi manjšega števila potrebnih elementov preglednejša, rezultati natančni in pri izbiri neposrednih tehnik reševanja sistema enačb tudi zanesljivi. Za opisan testni primer dosegamo zaradi preprostosti že z dvema elementoma EP 12 oz. enim elementom EP 16 optimalne rezultate in



Sl. 7. Povos nosilca pod silo F za različne numerične tehnike in modele mrež

a — za program STAG (Gauss-Seidelova iterativna tehnika), b — za program BERSAFE (Gaussova eliminacijska tehnika)

so npr. s povečanjem števila teh elementov z mrežo g rezultati celo nekoliko slabši kakor za mrežo f.

Razpredelnica 2. Časi računanja na računalniku ISKRA DATA 18-20 (v min)

Mreža	Število elementov	Število vozlišč	Program STAG min	Program BERSAFE min
b	24	21	0,88	25,13
b	96	65		88,3
c	24	21	0,85	10,1
d	2	9	3,28	6,0
e	4	15	4,61	10,13
f	1	8	15,13	10,13
g	2	13	11,81	10,13

V razpredelnici 2 navedeni časi računanja na računalniku ISKRA DATA 18-20 dajejo le določen vpogled v porabo računskega časa. Odvisno od zasedenosti računalnika je poraba časa mogoče vrednotiti le na osnovi več obsežnejših primerov. Pri analizah z izoparametričnimi elementi v splošnem, kljub majhnemu številu elementov v primerjavi s preprostimi končnimi elementi, ne dosegamo bistveno krajših časov obdelave, vendar pa so druge prednosti teh elementov odločilnega pomena. Za uporabnika, ki želi analizirati obsežnejše primere dveh razsežnosti, je priporočljiva izbira izoparametričnih elementov EP 12 in EX 12 in npr. frontalne eliminacijske tehnike reševanja sistema enačb.

LITERATURA

- [1] O. C. Zienkiewicz, The finite element method in engineering science. Mc Graw-Hill, London, 1971.
- [2] A. Jezernik, Zapiski predavanj Metoda končnih elementov, VTS, Maribor 1980.
- [3] T. K. Hellen, Priročniki o programskem sistemu BERSAFE, izdani pri britanskem elektrogospodarstvu (Central Electricity Generating Board, 1970—1980).
- [4] B. Voljč, Z. Kodrič, P. Postrak, G. Vrečer, Diplomске naloge iz analize napetosti in deformacij po metodi končnih elementov za dvorazsežne primere na miniračunalnikih, VTS, 1981.
- [5] S. Bader, Program BERSAFE na računalniku ISKRA DATA 18-20.

Avtorjev naslov: dr. Anton Jezernik, M. Sc., dipl. ing., izredni profesor VTS, VTO strojništvo Univerze v Mariboru