

UDK 53.082.4

Opis delovanja šumnih linearnih sistemov

IGOR GRABEC

UVOD

Delovanje tehniškega sistema simbolično popišemo s funkcijsko zvezo med vhodno (vzbujevalno) in izhodno (odzivno) veličino. Zelo pogosto naletimo na sisteme, katerih lastnosti se s časom ne spreminjajo, odziv pa je linearno odvisen od vzbujanja. V članku [1] smo pokazali, da lahko delovanje takšnega linearnega sistema označimo s pomočjo konvolucijskega integrala

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t') x(t - t') dt' = h * x \quad (1)$$

ki povezuje časovno spremenljivo vhodno veličino $x(t)$ z izhodno veličino $y(t)$. Lastnosti sistema vplivajo na obliko odzivne (težnostne) funkcije $h(t)$, ki popisuje odziv sistema na vzbuditev z enotnim impulzom. Metode določanja odzivne funkcije so splošno izdelane [1, 2, 3], zato pogosto uporabljamo linearne modele tudi za približno popisovanje nekaterih drugih sistemov. V ta namen razcepimo odziv sistema na linearno komponento $y_1(t)$ in ostanek $n(t)$:

$$y(t) = y_1(t) + n(t) = h * x + n(t) \quad (2)$$

Ostanek $n(t)$ je odvisen od vrste sistema in tudi od vhodne veličine.

Med različnimi nelinearnimi sistemi naletimo v tehniki pogosto na sisteme, pri katerih predstavlja ostanek $n(t)$ od vzbujanja neodvisno naključno veličino. V takem primeru govorimo o šumnem linearnem sistemu. Njegovo obnašanje opišemo splošno tako, da določimo odzivno funkcijo $h(t)$ in označimo lastnosti šuma $n(t)$. Pri analitičnem pristopu lahko določimo odzivno funkcijo kar z istimi metodami kakor pri nešumnih linearnih sistemih, lastnosti šuma pa opišemo z ustreznim naključnim procesom [4]. Pri empiričnem pristopu določimo lastnosti šuma iz posnetkov izhodnega signala nevzbujenega sistema, medtem ko moramo za določitev odzivne funkcije najprej posneti vhodni in ustrezni izhodni signal ter nato rešiti integralno enačbo (2). Pri tem pa se pojavijo težave. Zaradi naključne narave šuma se posneti signali od pri-

mera do primera razlikujejo in ne moremo posameznega posnetka nedvoumno razcepiti na linearni odziv in šum. Zaradi tega tudi ne moremo uporabljati pri empiričnem določanju odzivne funkcije šumnega sistema dekonvolucije, ki jo uporabljamo pri nešumnih linearnih sistemih [1], temveč moramo najprej odpraviti nedoločenost pri razcepitvi izhodnega signala na linearni odziv in šum. V ta namen običajno vzamemo, da označuje obnašanje linearnega šumnega sistema optimalna odzivna funkcija, pri kateri je energija šuma na opazovanem časovnem intervalu najmanjša. Ta predpostavka nas vodi do formulacije Wiener-Hopfove integralne enačbe za optimalno odzivno funkcijo, ki jo bomo v članku opisali. Ker so splošne metode reševanja te enačbe dokaj zapletene in za praktično delo neprimerne [5], bomo predstavili novo iterativno metodo, ki je predvsem primerna za hitro približno določanje optimalne odzivne funkcije. Označitev linearnega sistema z optimalno odzivno funkcijo se pokaže kot zelo uporabna v merilni tehniki, kjer lahko pogreške zaradi merjenja označujemo s šumno komponento. Zato bomo na koncu članka s primerom, ki je značilen za merilno tehniko, prikazali uporabnost iterativne metode.

DEFINICIJA OPTIMALNE ODZIVNE FUNKCIJE

Z namenom, da vpeljemo kriterij optimalnosti, izrazimo najprej šumno komponento z razliko dejanskega odziva in linearnega približka

$$n(t) = y(t) - h * x \quad (3)$$

Različnim linearnim ocenam odziva, ki jih dobimo z različnimi privzetki o odzivni funkciji, ustrezajo na splošno različni signali šuma. Ker merimo običajno vse veličine posredno prek električnih, bomo za kakovost linearne ocene uporabili moč šuma, ki je sorazmerna $n^2(t)$. Opazovanje signala bomo brez škode za splošnost obravnave omejili na časovni interval od 0 do T . Energijo šuma na tem intervalu definiramo z

$$W = \int_0^T n^2(t) dt \quad (4)$$

Nadalje vzamemo, da je linearni približek tem boljši, čim manjša je pripadajoča energija šuma. V primeru, ko je odzivna funkcija $h(t)$ opredeljena, se pri ponovitvah vzbujanja sistema z istim signalom energija šuma naključno spreminja. Zato obravnavamo energijo šuma kot naključno spremenljivko, ki pa je hkrati odvisna tudi od izbrane odzivne funkcije. Kot merilo povprečnega odstopanja dejanskega odziva sistema od linearno ocenjenega bomo uporabili statistično povprečje energije šuma

$$J = E[W] = \int_0^T E[n^2(t)] dt \quad (5)$$

V zadnjem izrazu smo upoštevali, da lahko vrstni red integriranja in statističnega povprečja zamenjamo. Če izrazimo šum z enačbo (4), dobimo za povprečno energijo šuma izraz

$$J = \int_0^T E[(y - h * x)^2] dt = J(h) \quad (6)$$

Zapisani integral je odvisen od izbire odzivne funkcije. Iz množice odzivnih funkcij bomo izbrali kot karakteristiko sistema tisto, pri kateri je statistično povprečje energije šuma $J(h)$ najmanjše. Imenovali jo bomo optimalna odzivna funkcija in označili $h_0(t)$. Z njo je opredeljen optimalni linearni sistem, katerega odziv se glede na izbrani kriterij najboljše ujema z dejanskim odzivom opazovanega sistema.

Določitev optimalne odzivne funkcije ustreza iskanju minimuma integrala [7], kar je naloga variacijskega računa [5, 6]. Pri reševanju tega problema najprej postavimo, da predstavlja h_0 funkcijo, pri kateri ima integral ekstrem. Nadalje to funkcijo spremenimo (variiramo), tako da ji prištejemo variacijo $\delta h = a v(t)$, pri čemer opisuje parameter a amplitudo in $v(t)$ poljubno obliko variacije, ki pa mora zadoščati istim pogojem kakor odzivna funkcija. To pomeni, da mora biti $v(t) = 0$ za $t < 0$. Če vstavimo variirano funkcijo

$$h(t) = h_0(t) + \delta h \quad (7)$$

v integral (6), se njegova vrednost glede na ekstremno spremeni

$$\begin{aligned} J(h_0(t) + \delta h) &= J(h_0) + \delta J = \\ &= \int_0^T E[(y - (h_0 + \delta h) * x)^2] dt \end{aligned} \quad (8)$$

Spremenjena vrednost integrala je odvisna od amplitude in oblike variacije, vendar mora preiti v ekstremno vrednost neodvisno od oblike variacije, če gre amplituda variacije proti 0. To pomeni, da mora imeti integral $J(h_0(t) + a v(t))$ kot funkcija parametra a pri $a = 0$ ekstrem, kar izrazimo s pogojem:

$$\left. \frac{\partial J(h_0(t) + a v(t))}{\partial a} \right|_{a=0} = 0; \text{ neodvisno od } v(t) \quad (9)$$

Z izvedbo nakazane operacije dobimo

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \int_0^T E[(y - (h_0 + a v) * x)^2] dt \Big|_{a=0} &= \\ &= -2 \int_0^T E[(y - h_0 * x) (v * x)] dt = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

V tem izrazu zapišemo konvolucijo $v * x$ z integralom in dobimo:

$$\int_0^T E[(y - h_0 * x) \int_0^\infty v(t') x(t - t') dt'] dt = 0 \quad (11)$$

Če zamenjamo vrstni red integriranja po t' in t ter statističnega povprečja, dobimo

$$\int_0^\infty v(t') \left\{ \int_0^T E[(y - h_0 * x) \cdot x(t - t')] dt \right\} dt' = 0 \quad (12)$$

Pri tem smo upoštevali, da $v(t)$ ni naključna variabla. Ker je funkcija $v(t)$ za $t \geq 0$ poljubna, je zadoščeno enačbi (12), če je za $t' \geq 0$ izraz v zaviatem oklepaju enak 0

$$\int_0^T E[(y - h_0 * x) x(t - t')] dt = 0 \quad \text{za } t' \geq 0 \quad (13)$$

Ta izraz lahko prevedemo v bolj pregledno obliko, če izrazimo konvolucijo z integralom ter upoštevamo, da odzivna funkcija h_0 ni naključna variabla.

$$\begin{aligned} \int_0^T E[y(t) x(t - t')] dt &= \\ &= \int_0^\infty h_0(t'') \left\{ \int_0^T E[x(t - t'') x(t - t')] dt \right\} dt'' \\ &\quad \text{za } t' \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Zapisana integralna enačba za optimalno odzivno funkcijo vsebuje na obeh straneh integral korelacijske funkcije. Nadalje bomo vzeli, da imamo opravka s stacionarnimi naključnimi procesi, kar bistveno ne omejuje uporabnosti nadaljnjih rezultatov v tehniki, poenostavi pa obravnavo. Za stacionarne naključne procese je korelacijska funkcija odvisna samo od razlike obeh časov opazovanja, zato lahko zapišemo

$$E[x(t_1) y(t_2)] = R_{xy}(t_2 - t_1) \quad (15)$$

Na obeh straneh enačbe (14) sta zato korelacijski funkciji od t neodvisni, tako da dobimo z integracijo samo faktor T . Zaradi preglednosti še spremenimo označbe $t' \rightarrow t$, $t'' \rightarrow t'$ in dobimo

$$R_{xy}(t) = \int_0^\infty h_0(t') R_{xx}(t - t') dt'; \quad \text{za } t \geq 0 \quad (16)$$

Izpeljani izraz je Wiener-Hopfova integralna enačba za optimalno odzivno funkcijo linearnega šumnega sistema v primeru stacionarnih vhodnih in izhodnih signalov.

Iterativna metoda reševanja Wiener-Hopfove enačbe

Če hočemo določiti optimalno odzivno funkcijo, moramo rešiti integralno enačbo (16). Splošna metoda reševanja te enačbe sloni na uporabi Fourierove transformacije in je sorazmerno zapletena [5], zato bomo tukaj prikazali neposredno, toda aproksimativno pot. V ta namen naštejmo najprej nekatere pomembne lastnosti avtokorelacijskih funkcij stacionarnih naključnih procesov [5].

Osnovna značilnost avtokorelacijske funkcije stacionarnega naključnega procesa je, da ima največja vrednost pri $t = 0$ in da limitira proti 0, ko narašča t prek vsake meje. Za širok razred stacionarnih naključnih procesov je padanje korelacijske funkcije proti 0 mogoče označiti s karakterističnim korelacijskim časom. Pri tem je vrednost korelacijske funkcije za čas, bistveno večji od korelacijskega časa, zanemarljivo majhna. Če predstavimo korelacijsko funkcijo z diskretnimi vzorci, ki so za več kakor korelacijski čas narazen, dobimo od nič različno vrednost samo pri $t = 0$, v preostalih točkah pa zanemarljivo majhno vrednost. To pomeni, da je mogoče korelacijsko funkcijo v najbolj grobem približku opisati z enotno impulzno funkcijo delta [1]:

$$R_{xx}(t-t') \approx A \cdot \delta(t-t') \quad (17)$$

S tem približkom pa je mogoče integriranje v enačbi (16) takoj izvesti, tako da dobimo po deljenju z A

$$h_0(t) \approx B \cdot R_{xy}(t) \quad \text{za } t \geq 0 \quad (18)$$

kjer je $B = 1/A$.

Ta izraz kaže, da je optimalna odzivna funkcija v najbolj grobem približku podana s križno korelacijsko funkcijo med vhodno in izhodno veličino. Ta rezultat je precej pomemben, ker omogoča hitro določiti približni videz odzivne funkcije, hkrati pa omogoča izdelati učinkovito aproksimativno metodo. V ta namen izrazimo najprej optimalno odzivno funkcijo kot vsoto neke znane funkcije h_x in druge neznane $h_1(t)$

$$h_0(t) = h_x(t) + h_1(t) \quad (19)$$

Iz enačbe (16) izhaja, da mora neznana funkcija $h_1(t)$ zadoščati enačbi

$$\begin{aligned} R_{xy}(t) - \int h_x(t') R_{xx}(t-t') dt' = \\ = \int_0^\infty h_1(t') R_{xx}(t-t') dt' \end{aligned} \quad (20)$$

ki jo lahko zapišemo v obliki

$$R_{xy1}(t) = \int_0^\infty h_1(t') R_{xx}(t-t') dt' \quad (21)$$

Dobili smo ponovno Wiener-Hopfovo enačbo, to pot za neznano funkcijo h_1 , toda z isto avtokorelacijsko funkcijo in spremenjeno križno korelacijsko funkcijo R_{xy1} . To pomeni, da se z nastavkom

(19) ne moremo izogniti reševanju Wiener-Hopfove enačbe, vendar intuitivno pričakujemo, da bo neznana funkcija $h_1(t)$ predstavljala tem manjši popravek, čim bolj z znano funkcijo $z(t)$ zadenemo potek optimalne odzivne funkcije $h_0(t)$. Z namenom, da zadostimo najbolj grobem približku, zapišemo

$$h_x(t) = B R_{xy}(t) \quad (22)$$

Konstanto B bi lahko določili iz izrazov (17) in (18) ob upoštevanju znanih lastnosti delta funkcije, vendar bomo tukaj izbrali drugo pot. V ta namen si najprej oglejmo enačbi (20) in (21). Čim bolj z znano funkcijo $h_x(t)$ popišemo optimalno odzivno funkcijo, tem manjši bo popravek h_1 oziroma R_{xy1} . Kot mero za napako približka bomo uporabili integral kvadrata funkcije R_{xy1} na opazovanem časovnem intervalu

$$\begin{aligned} D = \int_0^T [R_{xy1}(t)]^2 dt = \\ = \int_0^T \left[R_{xy}(t) - B \int_0^\infty R_{xy}(t') R_{xx}(t-t') dt' \right]^2 dt \end{aligned} \quad (23)$$

Konstanto B bomo izbrali tako, da bo napaka D najmanjša, kar da pogoj

$$\frac{dD}{dB} = 0 \quad (24)$$

Iz tega pogoja izhaja za B izraz

$$B = \frac{\int_0^\infty R_{xy}(t) f(t) dt}{\int_0^\infty f^2(t) dt} \quad (25)$$

kjer je

$$f(t) = \int_0^\infty R_{xy}(t') R_{xx}(t-t') dt' \quad (26)$$

S tako določeno konstanto B opredelimo začetni približek optimalne odzivne funkcije

$$h_x(t) = B R_{xy}(t) \quad (27)$$

Popravek predstavlja funkcija $h_1(t)$, ki tudi zadošča Wiener-Hopfovi enačbi, toda s spremenjeno križno korelacijsko funkcijo R_{xy1} . Zato lahko uporabimo enak postopek približnega računanja kakor za h_0 , kar je osnova iteracije. Tako dobimo za popravek približek

$$h_1(t) = B_1 R_{xy1}(t) \quad (28)$$

v katerem moramo B_1 izračunati s funkcijo R_{xy1} . S tem približkom dobimo nato enačbo za naslednji popravek h_2 itd., tako da lahko na splošno zapišemo

$$h_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k R_{xyk}(t) \quad (29)$$

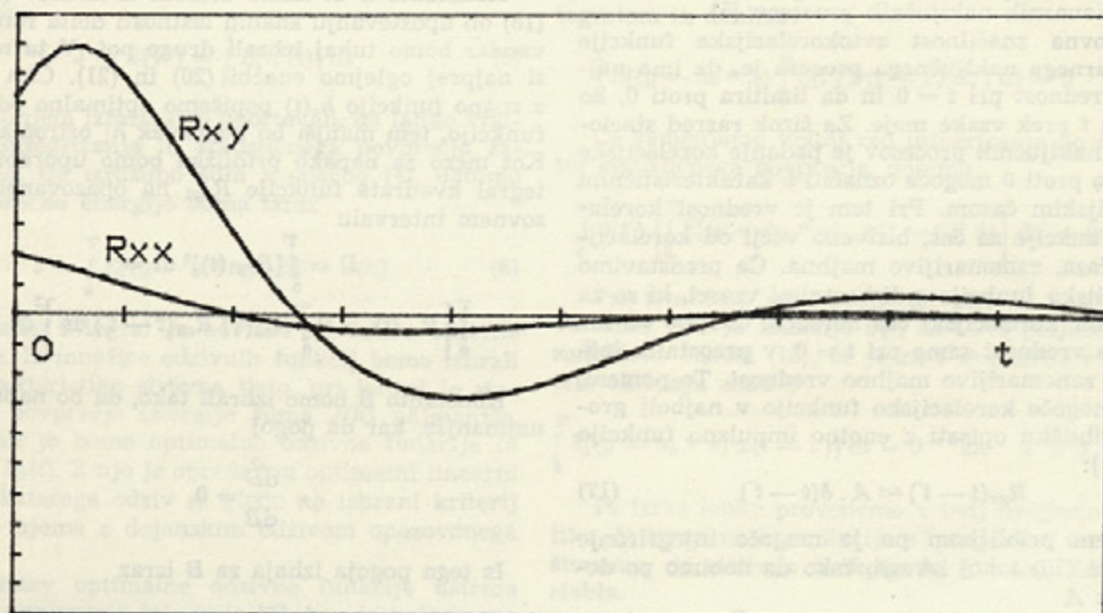
V tem izrazu ustrežata $B_0 = B$ in $R_{xy0} = R_{xy}$ začetni aproksimaciji. Nadalje uporabimo izraz

$$R_{xyk+1}(t) = R_{xyk}(t) - B_k \int_0^{\infty} R_{xyk}(t') R_{xx}(t - t') dt' \quad (30)$$

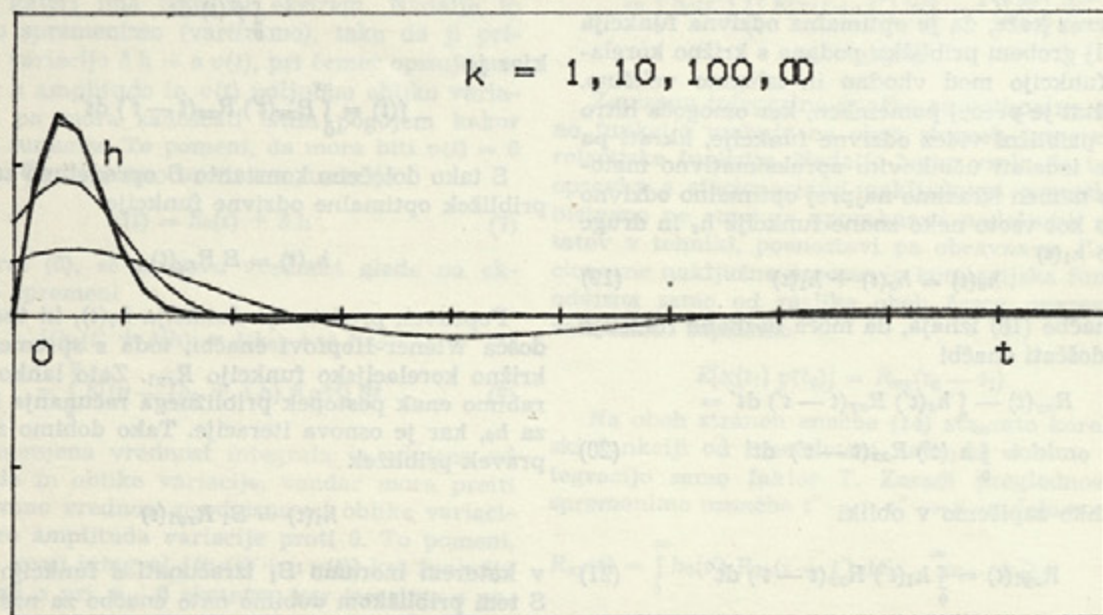
za izračun popravljenih križno korelacijskih funkcij in izraz (25) s k -to križno korelacijsko funkcijo za izračun B_k .

Primer določanja h_0

Opisani iterativni postopek je primeren za izvedbo na digitalnem računalniku. V ta namen predstavimo najprej izmerjeni korelacijski funkciji z zaporedji vrednosti pri enakomerno naraščajočih časovnih trenutkih. S tem preidejo nakazani integrali v vsote, iterativni postopek pa v ciklično izvajanje enakih računskih operacij. Iteracijo običajno ustavimo, ko je amplituda popravljenega križ-

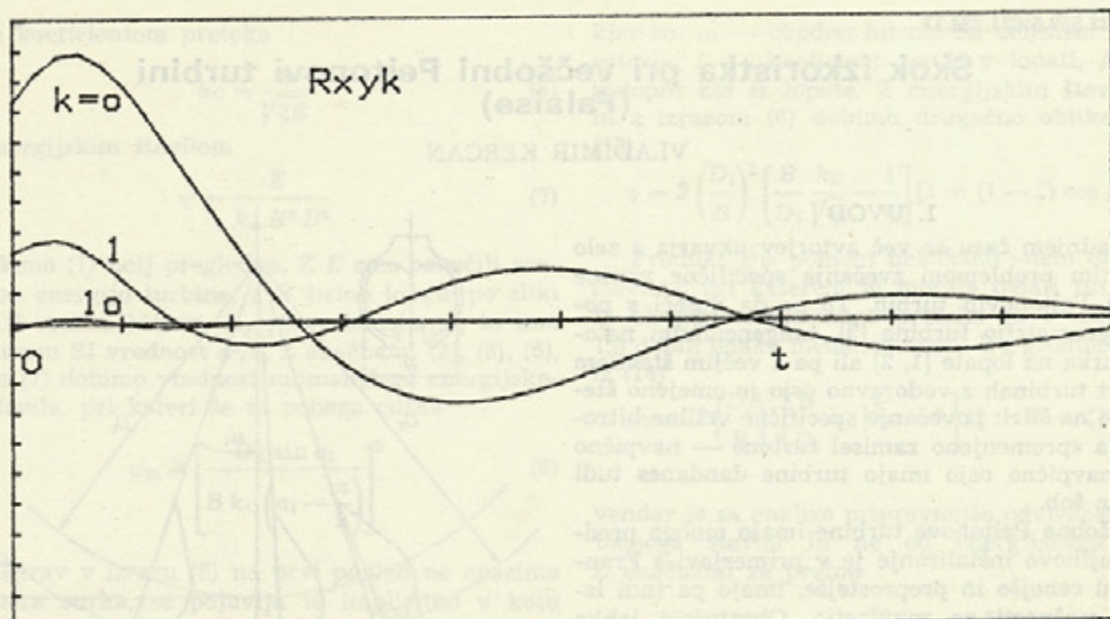


Sl. 1. Avtokorelacijska funkcija R_{xx} vhodnega in križno korelacijska funkcija R_{xy} vhodnega ter izhodnega procesa



Sl. 2. Predpostavljena optimalna odzivna funkcija sistema h ter aproksimacije po $k = 1, 10$ in 100 korakih

Največja vrednost h z indeksom iteracije k narašča, približki pa se vedno bolj ujemajo s predpostavljeno funkcijo



Sl. 3. Zaporedne križno korelacijske funkcije

Očiten je padec amplitude po vsem časovnem intervalu z naraščajočim indeksom iteracije

no korelacijske funkcije R_{xyk} istega reda velikosti kakor statistična napaka pri merjenju korelacijskih funkcij. Konvergence nakazanega iterativnega postopka analitično sicer še nismo raziskali, smo pa preverili njegovo uspešnost na simuliranih in realnih linearnih šumnih sistemih.

V merilni tehniki zelo pogosto naletimo na naključne procese, ki imajo avtokorelacijske funkcije podobne funkciji [5]

$$R_{xx}(t) = R_0 e^{-at} \cos \omega t \quad (31)$$

ter na nizkopasovne ojačevalnike, katerih odzivne funkcije lahko označimo z impulzom določene širine, višine ter zakasnitve. Za demonstracijo iterativnega računanja optimalne odzivne funkcije smo simulirali tak primer. Izbrani funkciji R_{xx} in h sta prikazani na slikah 1 in 2. Iz teh funkcij je bila izračunana križno korelacijska funkcija R_{xy} z Wiener-Hopfovno enačbo (16). Prikazana je skupno z R_{xx} na sliki 1. S pomočjo obeh korelacijskih funkcij je bil nato izveden iterativni postopek računanja optimalne odzivne funkcije, rezultati prvega, desetega in stotega koraka pa so prikazani skupno s predpostavljeno odzivno funkcijo na sliki 2. Rezultati kažejo, da se po stoti iteraciji ocenjena optimalna odzivna funkcija navidezno razlikuje od predpostavljene le še v eni točki. Za oceno napake približka smo pri izpeljavi iterativnega postopka uporabili integral kvadrata prirejenih križno korelacijskih funkcij R_{xyk} . Grafi teh funkcij so za korake 0, 1, 10 prikazani na sliki 3. Vidimo, da je že po desetem koraku amplituda te funkcije v območju reda velikosti napake, ki jo običajno naredimo pri merjenju korelacijskih funkcij ($\approx 1\%$).

Sklep

Iterativno metodo računanja optimalnih odzivnih funkcij smo doslej uporabljali za označitev odzivnih funkcij elektronskih ojačevalnih sistemov, ki delajo s tako visokimi ojačenji, da njihov šum ni več zanemarljivo majhen. Eksperimenti so pokazali, da je za praktično uporabo pogosto dovolj izvesti le približno 10 iteracij. Na namiznih računalnikih, ki se običajno uporabljajo za zbiranje eksperimentalnih podatkov (na primer HP 9835), traja ta račun približno četrt ure, kar je sorazmerno ugodno za hitro označitev delovanja sistema.

Iterativna metoda, ki smo jo tukaj razvili, je primerna le za primer stacionarnih naključnih procesov. Z majhno modifikacijo pa jo je mogoče prirediti tudi za obravnavanje šumnih prehodnih pojavov, kar bomo opisali v prihodnjih objavah.

LITERATURA

- [1] I. Grabec, Strojniški vestnik, 27, 1981/4—6, str. 57 ... 62.
- [2] G. A. Korn, T. M. Korn, Mathematical handbook for scientists and engineers, Mc Graw Hill, New York, 1968, poglavje 9. 4—3.
- [3] R. Bracewell, The Fourier transform and its applications, Mc Graw Hill, New York, 1965.
- [4] E. Parzen, Stochastic processes, Holden Day, San Francisco, 1967.
- [5] Y. W. Lee, Statistical theory of communication, J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.
- [6] I. Vidav, Višja matematika II, Univerza v Ljubljani, 1951, str. 405.

Avtorjev naslov: prof. dr. Igor Grabec,
Fakulteta za strojništvo
v Ljubljani