UDK 534.013:681.32

Analiza lastnih torzijskih nihanj razvejanih sistemov z namiznimi računalniki

IGOR EMRI, ANTON KUHELJ, MIHA MUŠIČ

1. UVOD

Pri različnih oblikah batnih strojev, zobniških prenosnikov in rotacijskih strojev naletimo pogosto na problem torzijskih nihanj. Ker so sistemi te vrste ponavadi slabo dušeni, je poznavanje lastnih frekvenc sistema posebno pomembno. Obratovanje v njihovi bližini je nezaželeno, saj se lahko pojavijo razpoke in zlomi mehanskega sistema.

V primeru, ko imamo na voljo računalnik z velikim spominom, je analiza lastnih nihanj razmeroma preprosta, saj se problem prevede na določanje lastnih vrednosti in lastnih vektorjev homogenega sistema enačb. Zgornji pogoj seveda zmeraj ni izpolnjen, poleg tega pa lahko tudi hitro ugotovimo, da je nastavljanje gibalnih enačb za razvejane sisteme precej zapleteno.

V našem prispevku je prikazan postopek, s katerim se zgornjim težavam izognemo.

Postopek sloni na znani metodi prenosnih matrik, katere glavna prednost je v tem, da se izognemo nastavljanju gibalnih enačb in prevedemo problem na množenje matrik drugega reda.

Bistvo postopka je v tem, da obravnavani mehanski sistem opišemo z zaporedno in vzporedno vezavo treh osnovnih tipov elementov razvejanega torzijskega sistema. Celotni sistem opišemo z blokovnim diagramom, posamezni tip elementov pa s prenosno matriko. Sistem nato rešujemo postopoma, tako da prenosne matrike elementov oblikujemo sproti. Iz navedenega razloga potrebujemo za reševanje računalnik z razmeroma majhnim spominom, število mas torzijskega sistema pa je praktično neomejeno. Za ponazoritev naj povemo, da lahko z namiznim računalnikom tipa HP 9835 analiziramo sisteme s petsto masami, se pravi praktično lahko rešimo vse primere, ki se pojavljajo v praksi.

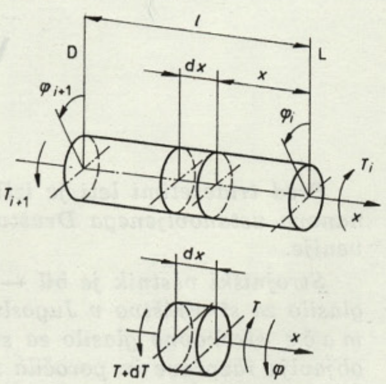
2. TEORETIČNE OSNOVE

Kakor smo omenili v uvodu, imamo pri reduciranih torzijskih sistemih samo tri osnovne tipe elementov, ki jih bomo opisali v nadaljevanju.

2.1. Torzijski element

Torzijski element bomo imenovali del okrogle gredi konstantnega prereza A in dolžine l.

Če z i_x označimo masni vztrajnostni radij gredi, z μ maso na enoto dolžine, z M torzijski moment, s φ zasuk gredi in z ω lastno krožno frekvenco, lahko za delček gredi dolžine dx (sl. 1. b) zapišemo naslednjo gibalno enačbo:



Sl. 1. *Torzijski element*

$$(i_x^2\, \mu\, \mathrm{d}x)\, \ddot{\varphi} = (M + \mathrm{d}M) - M \qquad (1\text{ a})$$

Z upoštevanjem razmerja

$$\ddot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{dt^2} = -\omega^2 \varphi$$

dobimo

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} + i_x^2\, \mu\, \omega^2 \varphi = 0 \qquad (1\text{ b})$$

Z upoštevanjem znanega razmerja

$$M = I_p\, G\, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

in robnih pogojev $x = 0$, $\varphi = \varphi_i$ in $M = M_i$, izhaja rešitev enačbe (1 b)

$$\varphi = \varphi_i \cos\left(\lambda \frac{x}{l}\right) + M_i \frac{l}{\lambda\, J_p\, G} \sin\left(\lambda \frac{x}{l}\right) \qquad (2)$$

pri tem smo označili

$$\lambda^2 = \omega^2 \frac{\mu\, i_x^2\, l^2}{I_p\, G} \qquad (3)$$

kjer so: l — dolžina gredi, I_p — polarni vztrajnostni moment presečne ploskve gredi in G — strižni modul gredi.

Zvezo med zasukom in momentom leve in desne gredi najdemo sedaj v obliki

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{i+1} \\ M_{i+1} \end{Bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \cos\lambda & \dfrac{l}{\lambda\, I_p\, G} \sin\lambda \\ -\dfrac{\lambda\, I_p\, G}{l} \sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ M_i \end{Bmatrix} \qquad (4)$$

in od tod prenosno matriko torzijskega elementa

$$[TE] = \begin{bmatrix} \cos\lambda & \dfrac{l}{\lambda I_p G}\sin\lambda \\ -\dfrac{\lambda I_p G}{l}\sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix} \tag{5}$$

Vektor

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} \varphi \\ M \end{Bmatrix} \tag{6}$$

imenujemo vektor stanja, ki podajo moment in zasuk gredi v poljubnem prerezu.

V primeru, ko je masni vztrajnostni moment gredi zanemarljiv, dobimo brezmasno *torzijsko vzmet,* katere prenosna matrika je

$$[K] = \lim_{i_x \to 0} [TE] = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Pri tem smo s $k = G\,I_p/l$ označili torzijsko togost okrogle gredi.

V primeru kratkih rotorjev, ki jih smemo v primerjavi s preostalimi elementi imeti za popolnoma toge, dobimo element, katerega prenosna matrika je

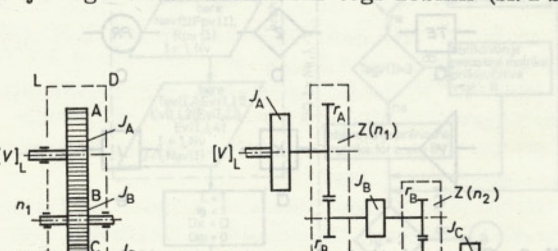
$$[J] = \lim_{k \to \infty} [TE] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -J\,\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Pri tem je $J = \mu\, i_x^2\, l$ masni vztrajnostni moment koluta okrog osi rotacije.

2.2. Zobniški prenos

Ena izmed značilnosti razvejanih sistemov so zobniški prenosi, ki v splošnem povzročajo spremembo velikosti in smeri zasuka in momenta gredi.

Ker lahko zobnike v teh primerih obravnavamo zmeraj kot popolnoma toge elemente, bomo posamezni zobnik obravnavali kot vztrajnik, na katerega je togo vezan brezmasni togi zobnik (sl. 2 b).



Sl. 2. *a — Primer zobniškega prenosa*
b — Pripadajoči fizikalni model

Prenosna matrika, ki »prenese« vektor stanja $\{V\}$ prek vztrajnika, je podana z izrazom (8), prenosno matriko brezmasnega zobniškega para pa dobimo iz razmerij

$$\varphi_D = n\,\varphi_L \tag{9 a}$$

$$M_D = \frac{1}{n} M_L \tag{9 b}$$

Od tod izhaja

$$[Z] = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{n} \end{bmatrix} \tag{10}$$

kjer je $n = r_A/r_B = \omega_B/\omega_A$ prestavno razmerje in ima negativni predznak, če se smer rotacije spremeni, in pozitivni predznak, če se smer rotacije ohrani.

Prenosna matrika $[Z]$ pomeni drugi osnovni tip elementa torzijskih sistemov.

Primer, prikazan na sl. 2, lahko sedaj opišemo z blokovno shemo, prikazano na sl. 3 a.

Hitro lahko ugotovimo, da v primeru, ko smemo vztrajnostne momente zobnikov zanemariti, lahko celotno zobniško predležje, sestavljeno iz serije zobnikov, opišemo z eno samo prenosno matriko $[Z]$. n je v tem primeru celotno prestavno razmerje zobniškega predležja.

Za primer, prikazan na sl. 2, bi npr. pri pogoju $J_A = J_B = J_C = 0$ dobili

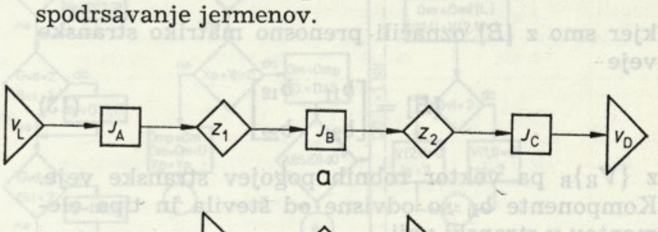
$$\{V\}_D = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{n} \end{bmatrix} \{V\}_L \tag{11 a}$$

kjer je

$$n = n_1 \,.\, n_2 = \left(-\frac{r_A}{r_B}\right)\left(-\frac{r_B}{r_C}\right) = \frac{r_A}{r_C} \tag{11 b}$$

Blokovna shema primera je prikazana na sl. 3 b.

Nadalje lahko ugotovimo, da prenosna matrika (10) opisuje v bistvu tudi vse oblike jermenskih prenosov, če smemo pri tem zanemariti maso in spodrsavanje jermenov.

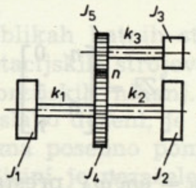


Sl. 3. *Blokovni diagram zobniškega prenosa prikazanega na sliki 2*

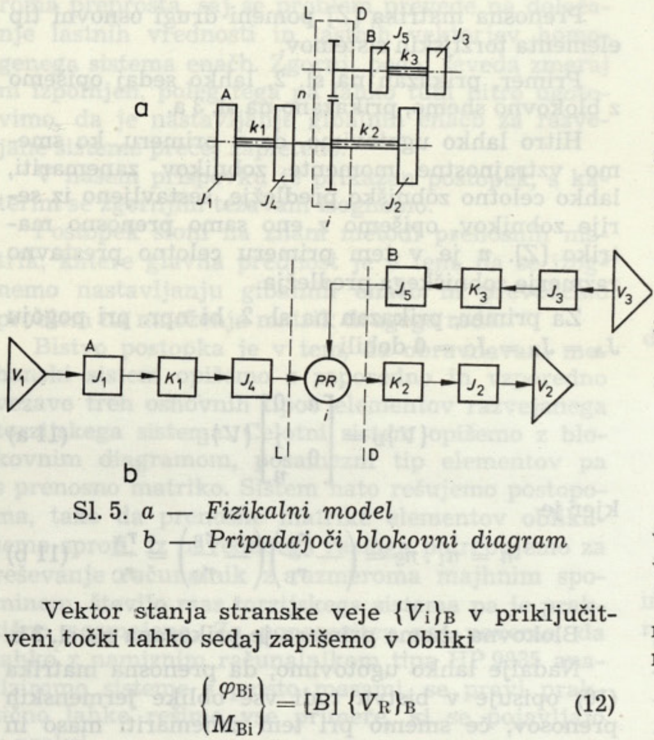
a — z upoštevanjem in
b — brez upoštevanja vztrajnostnih momentov zobnikov

2.3. Priključitev veje

Tretji osnovni tip elementov torzijskega sistema je priključitev stranske veje. Da bomo nazornejši, si oglejmo preprost primer, prikazan na sl. 4. V skladu z dosedanjimi izvajanji lahko obravnavani sistem opišemo z modelom (sl. 5 a) in pripadajočim blokovnim diagramom (sl. 5 b).



Sl. 4. *Primer priključitve stranske veje na glavno vejo torzijskega sistema*



Sl. 5. *a — Fizikalni model*
b — Pripadajoči blokovni diagram

Vektor stanja stranske veje $\{V_i\}_B$ v priključitveni točki lahko sedaj zapišemo v obliki

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{Bi} \\ M_{Bi} \end{Bmatrix} = [B]\,\{V_R\}_B \tag{12}$$

kjer smo z $[B]$ označili prenosno matriko stranske veje

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \tag{13}$$

z $\{V_R\}_B$ pa vektor robnih pogojev stranske veje. Komponente b_{ij} so odvisne od števila in tipa elementov v stranski veji.

Z upoštevanjem robnih pogojev $\varphi_R = \varphi_0$, $M_R = 0$ za primer prostega konca v nadaljevanju RP-1 in $\varphi_R = 0$, $M_R = M_0$, za primer togega vpetja v nadaljevanju RP-2, dobimo po vrsti

$$\frac{\varphi_{Bi}}{M_{Bi}} = \frac{b_{11}}{b_{21}} \tag{14}$$

oziroma

$$\frac{\varphi_{Bi}}{M_{Bi}} = \frac{b_{12}}{b_{22}} \tag{15}$$

Za priključitveno točko na glavni veji lahko zapišemo

$$\varphi_i^{D} = \varphi_i^{L} = +\,n\,\varphi_{Bi} \tag{16 a}$$

$$M_i^{D} = M_i^{L} + \frac{1}{n} M_{Bi} \tag{16 b}$$

Pri tem smo z n označili prestavno razmerje med stransko in glavno vejo. Prestavno razmerje je negativno, če sta smeri rotacije stranske in glavne veje različni, in pozitivno, če sta enaki.

Z upoštevanjem (14) in (15) in nekaj algebre najdemo prenosno matriko priključitvene veje

$$[PR] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{n^2}\,\dfrac{b_{21}}{b_{11}} & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

za primer robnega pogoja stranske veje RP-1 in

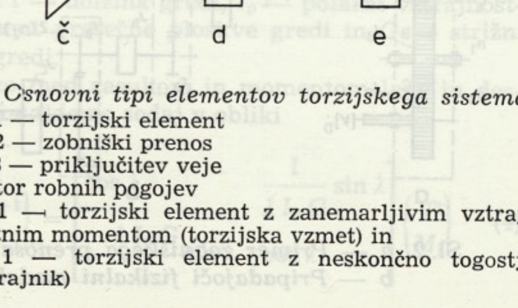
$$[PR] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{n^2}\,\dfrac{b_{22}}{b_{12}} & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

za robni pogoj RP-2.

3. PRAVILA ZA OBLIKOVANJE BLOKOVNEGA DIAGRAMA. ALGORITEM PROGRAMA

Vsak torzijski sistem bomo najprej zapisali v obliki blokovne sheme, ki bo potem vodilo za vstavljanje podatkov v računalnik.

Blokovno shemo poljubnega torzijskega sistema lahko sestavimo z vezavo osnovnih tipov elementov (sl. 6).



Sl. 6. *Osnovni tipi elementov torzijskega sistema*
a) tip 1 — torzijski element
b) tip 2 — zobniški prenos
c) tip 3 — priključitev veje
d) vektor robnih pogojev
e) tip 1 — torzijski element z zanemarljivim vztrajnostnim momentom (torzijska vzmet) in
f) tip 1 — torzijski element z neskončno togostjo (vztrajnik)

Pri oblikovanju blokovne sheme, se bomo držali naslednjih pravil in označb:

a) Eno izmed vej torzijskega sistema izberemo za glavno vejo. Izberemo jo tako, da se veja začne in konča z vektorjem robnih pogojev.

b) Oštevilčenje elementov glavne veje začnemo pri prvem torzijskem elementu na levi strani.

c) Elemente stranskih vej in podvej oštevilčimo od mesta priključitve h glavni veji oziroma stranski veji proti vektorju robnih pogojev. Z 1 označimo zmeraj vztrajnost zobnika, s katerim je veja povezana z glavno vejo oziroma podveja s stransko vejo.

d) Vektorjev robnih pogojev ne oštevilčimo.

e) Prestavno razmerje zobniškega prenosa v glavni veji računamo od leve proti desni, v stranski veji oziroma podveji pa od vektorja robnih pogojev proti mestu priključitve.

f) Vektor robnih pogojev oblike $\{V\}^T = \{\varphi, 0\}$ bomo označili z 1, vektor oblike $\{V\}^T = \{0, M\}$ pa z 2.*

Na sl. 7 je podan algoritem programa »VEJA«, kjer smo uporabili naslednje označbe:

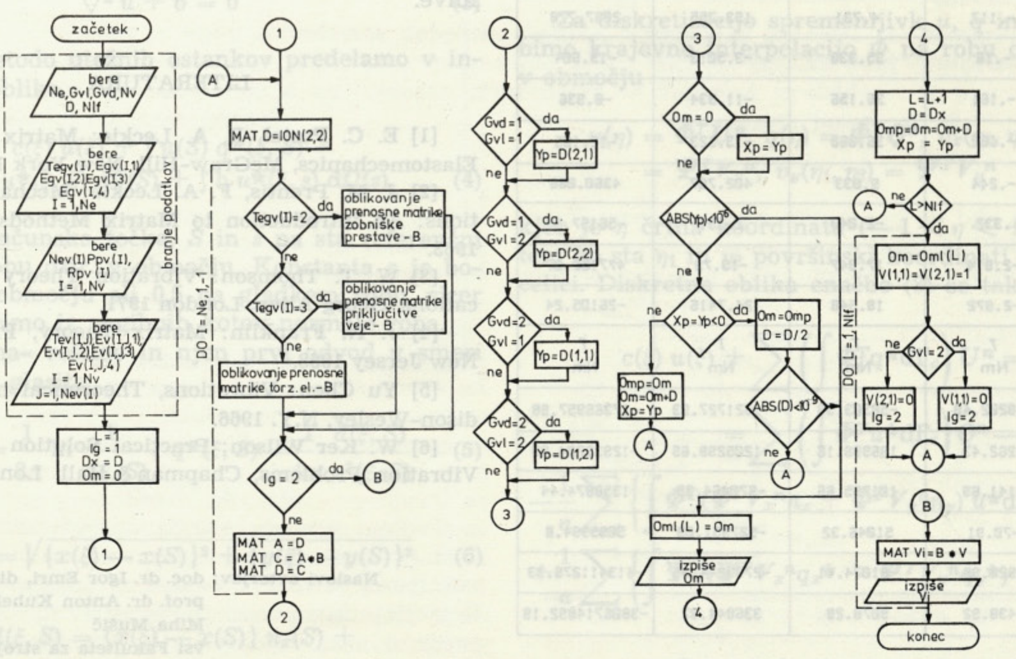
Ne število elementov glavne veje
G_{vl} — levi robni pogoj glavne veje
G_{vd} — desni robni pogoj glavne veje
N_v število vej
D — korak frekvence
N_{lf} — število lastnih frekvenc
$T_{egv}(\mathrm{I})$ — tip elementa glavne veje
$E_{gv}(\mathrm{I}, 1)$ — masni vztrajnostni moment i-tega elementa glavne veje
$E_{gv}(\mathrm{I}, 2)$ — togost i-tega elementa glavne veje
$E_{gv}(\mathrm{I}, 3)$ — zobniška prestava i-tega elementa glavne veje
$E_{gv}(\mathrm{I}, 4)$ — številka/označba veje
$N_{ev}(\mathrm{I})$ — število elementov v i-ti veji
$P_{pv}(\mathrm{I})$ — prestava priključitve i-te veje
$R_{pv}(\mathrm{I})$ — robni pogoj i-te veje
$T_{ev}(\mathrm{I}, \mathrm{J})$ — tip j-tega elementa i-te veje
$E_v(\mathrm{I}, \mathrm{J}, 1)$ — masni vztrajnostni moment j-tega elementa i-te veje
$E_v(\mathrm{I}, \mathrm{J}, 2)$ — togost j-tega elementa i-te veje
$E_v(\mathrm{I}, \mathrm{J}, 3)$ — zobniška prestava j-tega elementa i-te veje
$E_v(\mathrm{I}, \mathrm{J}, 4)$ — številka/označba podveje
Om — krožna frekvenca
V — vektor stanja

4. PRIMER

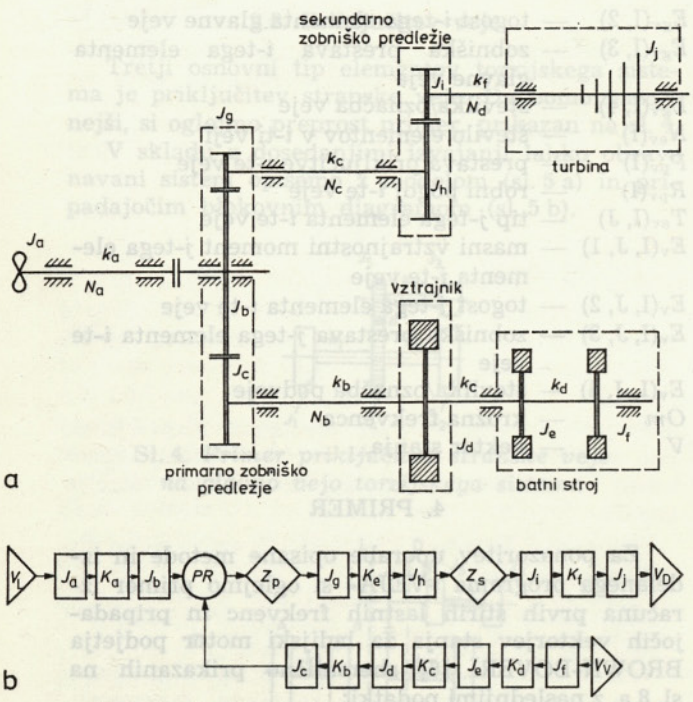
Za ponazoritev uporabe opisane metode in izdelanega programa »VEJA« si oglejmo primer izračuna prvih štirih lastnih frekvenc in pripadajočih vektorjev stanja za ladijski motor podjetja BROWN-BOVERI [6] shematično prikazanih na sl. 8 a, z naslednjimi podatki:

$J_a = 34{,}1335$ kg m²	$k_a = 19\,173{,}7564$ Nm/rad
$J_b = 3{,}4555$ kg m²	$k_b = 6\,110{,}3180$ Nm/rad
$J_c = 0{,}1264$ kg m²	$k_c = 123\,891{,}9646$ Nm/rad
$J_d = 1{,}4117$ kg m²	$k_d = 241\,252{,}2099$ Nm/rad
$J_e = 0{,}8217$ kg m²	$k_e = 6\,826{,}7001$ Nm/rad
$J_f = 0{,}8217$ kg m²	$k_f = 7\,564{,}1523$ Nm/rad
$J_g = 0{,}0126$ kg m²	$N_a = 110$ min⁻¹
$J_h = 1{,}0535$ kg m²	$N_b = 255$ min⁻¹
$J_i = 0{,}0013$ kg m²	$N_c = 530$ min⁻¹
$J_j = 0{,}2866$ kg m²	$N_d = 4\,500$ min⁻¹

---
* S T smo označili operacijo transponiranja.



Sl. 7. *Algoritem programa »VEJA«*



Sl. 8. *a — Shematični prikaz ladijskega motorja podjetja Brown-Boveri*
b — Pripadajoča blokovna shema

ω rad/s	23.09	41.33	217.97	713.36
	φ/φ_a	φ/φ_a	φ/φ_a	φ/φ_a
J_a	1	1	1	1
J_b	.051	-2.041	-83.581	-904.924
J_c	-.117	4.731	193.755	2097.778
J_d	-.16	35.335	-3.5013	-19.904
J_e	-.161	36.156	-11.334	-8.936
J_f	-.162	36.368	-13.523	-12.185
J_g	-.244	9.833	402.707	4360.086
J_h	.332	-2.043	2.331	-56197.91
J_i	-2.814	17.347	-19.79	477152.07
J_j	-2.872	18.548	24.7416	-26105.24
	T Nm	T Nm	T Nm	T Nm
k_a	-18202.48	-58303.58	-1621727.93	-17369957.98
k_b	-262.43	186999.16	-1205298.69	-12939704.93
k_c	-141.69	101795.66	-970464.39	1358874.44
k_d	-70.91	51046.32	-527951.09	5095394.8
k_e	3928.96	-81074.41	-2733244.95	-413411279.33
k_f	-438.92	9078.28	336844.87	-3806714892.19

Preglednica 1: *Pregled rezultatov*

Pripadajoča blokovna shema motorja je prikazana na sl. 8 b.

Z uvrstitvijo podatkov v program »VEJA« dobimo rezultate, podane v preglednici 1.

V literaturi [6] je za primerjavo obravnavani primer rešen s poenostavitvijo v štirimasni sistem in so za prve tri lastne frekvence dobljene po vrsti naslednje vrednosti:

23,1; 41,6 in 219 rad/s.

5. SKLEPI

Po potrditvi opisane metode in programa »VEJA« na različnih primerih lahko sklenemo, da je metoda zelo učinkovita, saj omogoča z namiznim računalnikom izračun lastnih frekvenc in vektorjev stanja za razvejane sisteme z do petsto masami. Ima pa seveda tudi šibke točke. Iz algoritma programa na sl. 7 je razvidno, da računalnik konča iteracijo, če je Y_p, ki je največkrat moment na prostem koncu glavne veje, manjši od 10^{-6} ali, če je korak frekvence D manjši od 10^{-9}. Oba pogoja se na prvi pogled zdita več ko zadovoljiva, pri izračunu vektorjev stanja višjih lastnih frekvenc (sto in več) pa se pokaže, da je izračunavanje frekvence natančno 10^{-9} rad/s nezadostno, ker je naklonski kot krivulje $y_p = f(\omega)$ zelo blizu $\pi/2$. Glede na obliko algoritma in možnosti računalnika HP 9835 pa se natančnost koraka frekvence na žalost ne da povečati.

Opisani pogrešek se pojavlja samo pri izračunu najvišjih lastnih frekvenc več ko sto masnega sistema, ki pa največkrat za prakso niso niti zanimive.

LITERATURA

[1] E. C. Pestel, F. A. Leckie: Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, New York 1963.

[2] J. M. Prentis, F. A. Leckie: Mechanical Vibrations: An introduction to Matrix Methods, Longmans, 1963.

[3] W. T. Thomson: Vibration Theory and Applications, Georg Allen, London 1971.

[4] J. N. Franklin: Matrix Theory, Prentice-Hall, New Jersey 1968.

[5] Yu Chen: Vibrations, Theoretical methods Addison-Wesley, N.Y. 1966.

[6] W. Ker Wilson: Practical Solution of Torsional Vibration Problems, Chapman & Hall, London 1967.

Naslovi avtorjev: doc. dr. Igor Emri, dipl. ing.
prof. dr. Anton Kuhelj, dipl. ing.
Miha Mušič
vsi Fakulteta za strojništvo
v Ljubljani