UDK 539.319:536

Določanje termičnih napetosti v vrteninah z robnimi elementi

ANDRO ALUJEVIČ, IZTOK POTRČ in POLDE ŠKERGET

1. Zasnova

Vodilne enačbe termoelastičnosti (ob že znanih temperaturah) so

a) mehansko ravnotežje $\sigma_{ij,j} + b_i = 0$,

b) Hookov zakon $\sigma_{ij} = D_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \alpha_l\, T\, \delta_{kl})$, z vezno matriko $D_{ijkl} = \lambda\, \delta_{ik}\, \delta_{jl} + \mu(\delta_{ij}\, \delta_{kl} + \delta_{il}\, \delta_{kj})$,

c) deformacijska enačba $\varepsilon_{kl} = (u_{k,l} + u_{l,k})/2$,

kjer pomenijo σ napetosti, ε deformacije, b prostorninske sile, u pomike, T temperature, α količnik temperaturne razteznosti, δ Kroneckerjevo funkcijo, medtem ko sta λ in μ Laméjevi konstanti, ki sta odvisni od Youngovega modula in Poissonovega števila. Podane diferencialne enačbe lahko, skupaj s predpisanimi robnimi pogoji (površinske sile p) pretvorimo (za vrtenino) v integralsko obliko

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}(\xi)\, \boldsymbol{u}(\xi) + 2\pi \int \boldsymbol{P^*}(\xi, s)\, \boldsymbol{u}(s)\, r(s)\, \mathrm{d}\Gamma_0(s) = \\
&= 2\pi \int \boldsymbol{U^*}(\xi, s)\, \boldsymbol{p}(s)\, r(s)\, \mathrm{d}\Gamma_0(s) + \\
&+ \alpha\, \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \int (T\, \nabla^2 \boldsymbol{G} - \nabla \boldsymbol{G}\, \nabla T + \boldsymbol{G}\, \nabla^2 T)\, \cdot \\
&\cdot\, \boldsymbol{n}\, r(s)\, \mathrm{d}\Gamma_0(s)
\end{aligned}
$$

kjer smo predpostavili le prostorninske sile zaradi temperaturnega raztezanja. $\boldsymbol{C}$ so konstante ($^1/_2$ na gladkih površinah), ξ in s računske točke, $\boldsymbol{n}$ zunanja normala, r polmer in Γ_0 obris meridianskega prereza ($r > 0$), medtem ko so osnovne rešitve $\boldsymbol{P^*}$, $\boldsymbol{U^*}$ in $\boldsymbol{G}$ znane za osnosimetričen primer obremenitve vrtenin

$$
\boldsymbol{U^*}_{ji} = \begin{pmatrix} U_{rr} & U_{rz} \\ U_{zr} & U_{zz} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{P^*}_{ji} = \begin{pmatrix} P_{rr} & P_{rz} \\ P_{zr} & P_{zz} \end{pmatrix} = \tau^i{}_{kj}\, n_k
$$

$$
\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} G_r \\ G_z \end{pmatrix}
$$

s posameznimi deleži, ki jih določimo iz geometrijskih podatkov.

2. Podrobnosti

Vrtenino opišemo z valjnimi koordinatami

$$\varrho = r(\xi)\ ,\ \zeta = z(\xi)\ ,\ R = r(s)\ ,\ Z = z(s)\ ,\ \Phi(\xi) = \Phi(s)$$

iz katerih izračunamo naslednje parametre

$$
\begin{aligned}
C_1 &= R^2 + \varrho^2 \\
C_2 &= \varrho^2 + (Z - \zeta)^2 \\
C_3 &= R^2 + (Z - \zeta)^2 \\
C_4 &= (R + \varrho)^2 + (Z - \zeta)^2 \\
C_5 &= (R - \varrho)^2 + (Z - \zeta)^2 \\
C_6 &= R^2 + \varrho^2 + (Z - \zeta)^2 \\
C_7 &= R^2 - \varrho^2 \\
C_8 &= 16\pi^2(1 - \nu) \sqrt{C_4} \\
C_9 &= 8\pi(1 - \nu)
\end{aligned}
$$

medtem ko sta popolna eliptična integrala prve in druge vrste

$$
K = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\Theta}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \Theta}} \qquad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \Theta}\, \mathrm{d}\Theta
$$

z argumentom $\beta = \sqrt{4R\, \varrho / C_4}$.

Iz teh izrazov lahko izvrednotimo iskane prispevke

$$
\begin{aligned}
U_{rr} &= A_1(B_1\, E + B_2\, K) & U_{zr} &= A_2(B_3\, E - K) \\
U_{rz} &= A_3(B_4\, E + K) & U_{zz} &= A_4(B_5\, E + B_6\, K) \\
\tau^r{}_{rr} &= A_5(B_7\, E + B_8\, K) & \tau^r{}_{rz} &= A_6(B_9\, E + B_{10}\, K) \\
\tau^r{}_{zz} &= A_7(B_{11}\, E - B_{12}\, K) & \tau^z{}_{rr} &= A_8(B_{13}\, E + B_{14}\, K) \\
\tau^z{}_{rz} &= A_9(B_{15}\, E + B_{16}\, K) & \tau^z{}_{zz} &= A_{10}(B_{17}\, E + B_{18}\, K) \\
G_r &= A_{11}(C_5\, K - C_6\, E) & G_z &= A_{12}\, E
\end{aligned}
$$

kjer so posamezne konstante

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 1/(R\, \varrho\, \mu\, C_8) & A_2 &= (Z - \zeta)/(\varrho\, \mu\, C_8) \\
A_3 &= (Z - \zeta)/(R\, \mu\, C_8) & A_4 &= 2/(\mu\, C_8) \\
A_5 &= 1/(2R^2\, \varrho\, C_8) & A_6 &= (Z - \zeta)/(R\, \varrho\, C_8) \\
A_7 &= 2/(\varrho\, C_8) & A_8 &= (Z - \zeta)/(R^2\, C_8) \\
A_9 &= -2/(R\, C_8) & A_{10} &= 4(Z - \zeta)/C_8 \\
A_{11} &= \sqrt{C_4}/(24\pi^2\, \mu\, R\, \varrho) & A_{12} &= \sqrt{C_4}/(4\pi^2\, \mu)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_1 &= -4(1 - \nu)\, C_4 + [C^2{}_7 + (Z - \zeta^2]/C_5 \\
B_2 &= 4(1 - \nu)\, C_6 - C_1 \\
B_3 &= [C_7 + (Z - \zeta)^2]/C_5 \qquad B_4 = [C_7 - (Z - \zeta)^2]/C_5 \\
B_5 &= (Z - \zeta)^2/C_5 \qquad B_6 = 3 - 4\nu \\
B_7 &= (7 - 8\nu)\, C_4 + 4(1 - \nu)\, [-\varrho^2\, C_7 + \\
&+ (Z - \zeta)^2\, (2\varrho^2 + C_3)]/C_5 + \\
&+ [-3C^2{}_7 - 6(Z - \zeta)^2\, C_7 + 9(Z - \zeta)^4]/C_5 + \\
&+ 4\{(\varrho + R)^3\, (\varrho - R)^3 - (Z - \zeta)^6 + \\
&+ (Z - \zeta)^2\, C_7[(Z - \zeta)^2 + C_7]\, C_6\}/(C_4\, C^2{}_5) \\
B_8 &= 3C_7 - 9(Z - \zeta)^2 - 4(1 - 2\nu)\, (R^2 + 2C_2) - \\
&- \{(\varrho + R)^3\, (\varrho - R)^3 - (Z - \zeta)^6 + \\
&+ (Z - \zeta)^2\, C_7[(Z - \zeta)^2 + C_7]\}/(C_4\, C_5) \\
B_9 &= -[6(Z - \zeta)^2 + 2(1 - 2\nu)\, C_6]/C_5 + \\
&+ 4[(Z - \zeta)^4 - C^2{}_7]\, C_6/(C_4\, C^2{}_5) \\
B_{10} &= 3 + 2(1 - 2\nu) - [(Z - \zeta)^4 - C^4{}_7]/(C_4\, C_5) \\
B_{11} &= \{(1 - 2\nu)\, [C_7 + (Z - \zeta)^2] + 3(Z - \zeta)^2\}/C_5 - \\
&- 4(Z - \zeta)^2\, C_6[C_7 + (Z - \zeta)^2]/(C_4\, C^2{}_5) \\
B_{12} &= 1 - 2\nu - (Z - \zeta)^2[C_7 + (Z - \zeta)^2]/(C_4\, C_5) \\
B_{13} &= \{4(1 - 2\nu)\, R^2 - 6[C_7 - (Z - \zeta)^2]\}/C_5 + \\
&+ 4C_6[C_7 - (Z - \zeta)^2]^2/(C_4\, C^2{}_5)
\end{aligned}
$$

$$B_{14} = -3 - [C_7 - (Z - \zeta)^2]^2/(C_4 C^2_5)$$

$$B_{15} = \{3(Z - \zeta)^2 + (1 - 2\nu)[C_7 - (Z - \zeta)^2]\}/C_5 + 4(Z - \zeta)^2 C_6[C_7 - (Z - \zeta)^2]/(C_4 C^2_5)$$

$$B_{16} = 1 - 2\nu - (Z - \zeta)^2 [C_7 - (Z - \zeta)^2]/(C_4 C_5)$$

$$B_{17} = -(1 - 2\nu)/C_5 - 4(Z - \zeta)^2 C_6/(C_4 C^2_5)$$

$$B_{18} = (Z - \zeta)^2/(C_4 C_5)$$

3. Rešitev

Iz podanih enačb dobimo naslednji matrični zapis

$$\boldsymbol{K u} = \boldsymbol{Q f} + \boldsymbol{b}$$

kjer sta matriki $\boldsymbol{K}$ (togost) in $\boldsymbol{Q}$ znani, medtem ko so sile $\boldsymbol{f}$ dane s statičnimi robnimi pogoji, termične sile $\boldsymbol{b}$ pa vrednotimo z računalniškim programom. Nato lahko izračunamo pomike $\boldsymbol{u}$ z uporabo razpoložljive računske opreme stroja, na koncu pa dobimo še porazdelitev notranjih napetosti. V nekaterih primerih, ko so predpisani kinematski robni pogoji, moramo tam izračunati ustrezne reakcije.

4. Sklep

Na voljo za nakup imamo računalniške programe *Computational Mechanics Ltd., Southampton.* Tudi *Lehrstuhl für Mechanik, TU München* ponuja svoje vrteninske programe. Na Visoki tehniški šoli Maribor tudi že pripravljamo svoj lasten računalniški program za analizo termičnih napetosti v vrteninah po postopku robnih elementov, kar omogočajo sredstva Raziskovalne Skupnosti Slovenije v okviru programa jedrske energetike.

LITERATURA

[1] C. A. Brebbia: The Boundary Element Method for Engineers. Pentech Press, London-Plymouth, 1978.

[2] C. A. Brebbia, S. Walker: Boundary Element Techniques in Engineering. Newnes-Butterworths, London, 1979.

[3] C. A. Brebbia (ed.): Proceedings 1st, 2nd, 3rd, 4th International Seminars of BEM, 1978, 1980, 1981, 1982.

[4] C. A. Brebbia (ed.): Progress in BEM, Vol. 1 (1981), Vol. 2 (1983).

[5] P. K. Banerjee, R. Butterfield: Boundary Element Methods in Engineering Science. McGraw Hill, London-New York, 1981.

[6] M. Mayr: Ein Integralgleichungsverfahren zur Lösung rotationssymmetrischer Elastizitätsprobleme. Dissertation, TU München, 1975.

[7] W. Drexler: Ein Beitrag zur Lösung rotationssymmetrischer thermoelastischer Kerbprobleme mittels der Randintegralgleichungsmethode. Dissertation, TU München, 1981.

[8] W. Neureiter: Boundary-Element-Programmrealisierung zur Lösung von zwei- und dreidimensionalen thermoelastischen Problemen mit Volumenkräften. Dissertation, TU München, 1982.

[9] I. Potrč, A. Alujevič: Postopek robnih elementov v ravninski elastomehaniki. Strojniški Vestnik, *28*, 107 do 109, Ljubljana, 1982.

[10] A. Alujevič, I. Potrč, P. Škerget: Termoelastičnost vrtenin s postopkom robnih elementov. 4. skup PPPR, Stubičke toplice, 1982.

Naslov avtorjev: red. prof. dr. ing. A. Alujevič, FINucE
asistent I. Potrč, dipl. ing.
viš. pred. mag. P. Škerget, dipl. ing.
VDO Visoka tehniška šola
VTO strojništvo
Univerza v Mariboru
62000 MARIBOR, Smetanova 17

UDK 697.444

Analiza pretočne porazdelitve v omrežju daljinskega ogrevanja (sistem zank)

JURIJ KROPE

1. UVOD

Zmanjšanje energijskih rezerv in s tem v zvezi varčevanje z energijo terja na področju toplotne tehnike iskanje novih tehniško znanstvenih spoznanj z uporabo različnih matematičnih metod pri optimizaciji cevnih omrežij daljinskega ogrevanja.

V svetu sta bili do pred kratkim (v večini primerov še danes) zelo razširjeni Hardy-Crossova in Newton-Raphsonova teorija, izhajajoči iz velikega števila ponavljanj in potrebne izbire domnevnih začetnih tokov, katerih nepravilna izbira vodi k počasni konvergenci ali rešitve sploh ne daje.

Da bi sistem reševanja pospešili in prišli z vso zanesljivostjo do popolnejših rezultatov, je v tem poročilu podan pristop k reševanju problema z znano metodo linearne mrežne teorije, ki daje zavidljive rezultate, katerih značilnost sta hitra konvergenca in nepotrebna predpostavka začetnih domnevnih tokov.

Za osnovno izhodišče rabita Kirchoffova zakona, po katerih mora biti zagotovljen nepretrgan tok skozi vsako vozlišče in ohranjena energija vsake zaprte zanke obstoječega ali načrtovanega omrežja. Nepretrgan tok opisuje linearna algebrska enačba, ohranitev energije okoli zaprte zanke pa pogosto nelinearna algebrska enačba.