

UDK 539.4.019:539.374:539.38

Povezava med deformacijami, deformacijskimi hitrostmi in napetostmi v plastičnem področju za izotropne in nestisljive materiale

PETER LEŠ

Preoblikovanje kovin s plastično deformacijo spada med tisto obdelovalno tehniko, pri kateri si s tehnološkimi postopki prizadevamo doseči izdelovanje brez odpadkov. Plastično preoblikovane izdelke najdemo povsod tam, kjer je potrebna velika zanesljivost ob majhni teži, hkrati pa izdelke izdelujemo v izredno kratkem tehnološkem času z zadostno natančnostjo. Žal pa so investicije za nabavo strojev in orodij velike. Prav zaradi tega je nujno potrebno natančno poznavanje mehanizma preoblikovanja in vnaprejšnje natančno določanje prepotrebnih konstrukcijskih in tehnoloških podatkov. Napetostne razmere so posebno pri hladnem preoblikovanju jekla na skrajnem robu vzdržljivosti orodnih jekel in karbidnih trdin. Določitev resničnih deformacijskih, hitrostnih, napetostnih in temperaturnih razmer med preoblikovanjem je zelo pomembno za razlago nastajanja in preprečevanja notranjih poškodb v orodju kakor tudi v preoblikovancu ter ne nazadnje za vnaprejšnje določanje kakovosti in lastnosti izdelka.

Za izotropne nestisljive materiale lahko z Misesovo teorijo [1] o plastičnem tečenju zadovoljivo opišemo fizikalna stanja. Preoblikovanje je mogoče le, če je material v plastičnem stanju, to je, ko na trdno telo delujejo tako velike zunanje sile, da povzročajo s svojimi deformacijami večje notranje napetosti od meje plastičnosti materiala.

Plastični potencial kot funkcija napetosti

$$F = f(\sigma_{ij}) \quad (1)$$

terja, da morata biti izpolnjena dva pogoja za pojav trajne deformacije:

$$f(\sigma_{ij}) = \text{const} \quad (2)$$

in enačbo plastičnosti, ki povezuje deformacijske hitrosti z napetostmi

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3)$$

Iz splošne formulacije (2) lahko izvedemo tudi druge pogoje za pojav plastičnega stanja kot posebne primere, zato lahko formulacijo (2) napišemo v naslednji obliki:

$$f(J_1, J_2, J_3) = \text{const} \quad (4)$$

pri čemer pomenijo J_1 , J_2 in J_3 prvo, drugo in tretjo invarianto napetostnega tenzorja v naslednjih oblikah:

$$J_1 = \sigma_{ij} \cdot \delta_{ij} \quad (5)$$

$$J_2 = 1/2 (\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \sigma_{ii} \cdot \sigma_{ii}) \quad (6)$$

$$J_3 = \det(\sigma_{ij}) \quad (7)$$

ali pisano v koordinatnem sistemu z glavnimi osmi σ_1 , σ_2 in σ_3 lahko napetostni tenzor zapišemo v obliki

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (8)$$

$$J_2 = -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \quad (9)$$

$$J_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \quad (10)$$

Samo posebni primer enačbe (4) je Misesov pogoj o plastičnem tečenju, zato je tedaj druga invarianta napetostnega deviatorja enaka

$$J_2 - k^2 = 0 \text{ ali tudi } 3J_2 - k_1^2 = 0 \quad (11)$$

kjer pomeni k_1 deformacijsko napetost, ki je $k_1 = \sqrt{3} \cdot k$, k pa pomeni mejo strižne napetosti.

Drugo invarianto napetostnega deviatorja lahko izrazimo z

$$J_2 = J_2 + 1/3 J_1^2 \quad (12)$$

ali tudi v skrajšani pisavi

$$J_2 = 1/2 \sigma'_{ij} \cdot \sigma'_{ij} \quad (12a)$$

zapisano tudi v koordinatnem sistemu σ_1 , σ_2 , σ_3

$$J_2 = \frac{1}{6} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) \quad (13)$$

Iz enačbe (11), ki je Misesov pogoj o pojavu plastičnega stanja, vidimo, da hidrostatični del napetostnega stanja, tj. srednja normalna napetost

$$\sigma_m = 1/3 J_1 \quad (14)$$

nima vpliva na začetek plastičnega tečenja.

Misesov pogoj o plastičnem tečenju lahko dobimo iz enačb (3) in (11) v naslednji obliki

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \sigma'_{ij} \quad (15)$$

ali zapisano v glavnem koordinatnem sistemu

$$\begin{aligned} d\varepsilon_1 &= d\lambda (\sigma_1 - \sigma_m) \\ d\varepsilon_2 &= d\lambda (\sigma_2 - \sigma_m) \\ d\varepsilon_3 &= d\lambda (\sigma_3 - \sigma_m) \end{aligned} \quad (16)$$

Sorazmerni faktor $d\lambda$ je pozitivna skalarna veličina, ki se ne spreminja pri zavrtitvi koordinatnega sistema. Pomeni pa spremenljivko, ki je odvisna od vrste materiala, temperature, stopnje in hitrosti deformacije.

Če v enačbah (16) dopustimo, da gredo deformacijske hitrosti proti nič, torej $\dot{\epsilon} \rightarrow 0$, tedaj bi to pri konstantnem sorazmernem faktorju λ pomenilo, da so tudi komponente napetostnega deviatorja zelo majhne vrednosti, to pa je lahko samo v primeru tekočega stanja. S tem prihajamo v kontradikcijo s prejšnjo izjavo, da se deformacijske hitrosti, različne od nič, lahko pojavljajo le, če napetosti izpolnijo pogoje tečenja, prav zato so tedaj napetostne komponente določene končne vrednosti.

Če eliminiramo napetosti, lahko iz enačb (11) in (15) izračunamo sorazmerni faktor $d\lambda$ v obliki

$$d\lambda = 1/k \sqrt{E_2} \quad \text{oz.} \quad d\lambda = \frac{1}{k_f} \sqrt{3E_2} \quad (17a \text{ in } b)$$

pri čemer je E_2 druga invarianta hitrosti deformacijskega tenzorja

$$E_2 = 1/2 (\dot{\epsilon}_{ij} \cdot \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ii} \cdot \dot{\epsilon}_{jj}) \quad (18)$$

ali pisano za glavni koordinatni sistem

$$E_2 = -(\dot{\epsilon}_1 \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_2 \dot{\epsilon}_3 + \dot{\epsilon}_3 \dot{\epsilon}_1) \quad (19)$$

Za popolnejši opis plastičnega tečenja nestisljivega materiala sta potrebni še ravnovesna enačba

$$\frac{\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (20)$$

in enačba kontinuitete (pogoj o konstantnosti prostornine)

$$d\epsilon_{ii} = 0 \quad (21)$$

Povezavo med napetostmi in deformacijskimi hitrostmi za nekompresibilne snovi lahko po Misesu zapišemo v koordinatnem sistemu x, y, z v obliki

$$V = \frac{1}{k} \sqrt{E_2} \cdot T' \quad (22)$$

pri čemer je V tenzor deformacijske hitrosti

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_y & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{xz} & \dot{\epsilon}_{yz} & \dot{\epsilon}_z \end{pmatrix} \quad (23)$$

T' pa je napetostni deviator

$$T'_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_y & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_z \end{pmatrix} \quad (24)$$

pri čemer je σ_m srednja aritmetična napetost

$$\sigma_m = 1/3 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (25)$$

Druga invarianta tenzorja deformacijske hitrosti dobi sedaj novo obliko, in sicer

$$E_2 = -(\dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_y \dot{\epsilon}_z + \dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_z) + \dot{\epsilon}_{xy}^2 + \dot{\epsilon}_{yz}^2 + \dot{\epsilon}_{xz}^2 \quad (26)$$

Komponente deformacijske in strižne hitrosti lahko izračunamo iz lokalnih hitrosti posameznih materialnih delcev po naslednjih enačbah

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (27)$$

oziroma

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xy} &= 1/2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \dot{\epsilon}_{xz} &= 1/2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \dot{\epsilon}_{yz} &= 1/2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Enačba kontinuitete (21) dobi tako novo obliko

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

Drugo invarianto napetostnega deviatorja $\mathcal{J}_2$ lahko sedaj zapišemo iz enačbe (24) v obliki

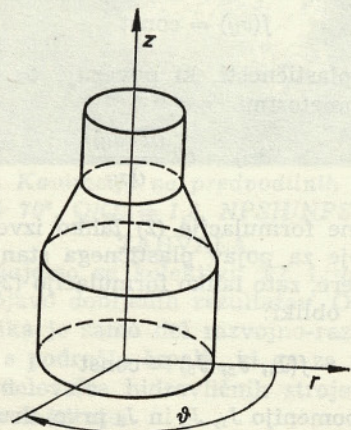
$$\mathcal{J}_2 = -(S_x S_y + S_y S_z + S_z S_x) + S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \quad (30)$$

Napetost v vsaki točki plastičnega prostora mora zadovoljevati naslednje enačbe ravnovesja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

V ravnovesnih enačbah (31) so masne sile izpuščene, ker imajo pri plastičnem preoblikovanju ponavadi zelo majhne vrednosti.

Za rotacijsko simetrično obliko izdelka je ugodnejše, če računamo v cilindričnih koordinatah (sl. 1)



Sl. 1. Rotacijsko simetrični iztisnjenec

Če vzamemo za primer, da plastično preoblikovanje poteka aksialno simetrično, so napetostna stanja in deformacije neodvisne od kota zavrtitve ϑ ter so po konstantnem obodu stalna, tedaj velja

$$\frac{\partial v_i}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \vartheta} = 0 \quad v_\vartheta = 0 \quad \tau_{r\vartheta} = \tau_{\vartheta z} = 0 \quad (32)$$

oziroma

$$\frac{\partial v_i}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (33)$$

pri čemer sta v_r in v_z hitrostni komponenti v radialni oz. v aksialni smeri. Za napetosti v plastičnem področju dobimo iz enačb (31) v tem primeru obliko

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

pri čemer so σ_r , σ_ϑ in σ_z komponente normalnih napetosti v radialni, obodni in aksialni smeri, τ_{rz} pa je še edina preostala komponenta strižne napetosti.

Druga invarianta napetostnega deviatorja $\mathcal{J}_2$ dobi tako novo obliko

$$\mathcal{J}_2 = 1/2 (S_r^2 + S_\vartheta^2 + S_z^2) + S_{rz}^2 \quad (35)$$

s svojimi komponentami

$$S_r = \sigma_r - \sigma_m \quad S_\vartheta = \sigma_\vartheta - \sigma_m \quad S_z = \sigma_z - \sigma_m \quad (36)$$

ter srednje aritmetične napetosti

$$\sigma_m = 1/3 (\sigma_r + \sigma_\vartheta + \sigma_z) \quad (37)$$

kakor tudi za strižno napetost

$$S_{rz} = \tau_{rz} \quad (38)$$

Druga invarianta napetostnega deviatorja ima zato v cilindričnih koordinatah obliko

$$\mathcal{J}_2 = -((\sigma_r - \sigma_m)(\sigma_\vartheta - \sigma_m) + (\sigma_\vartheta - \sigma_m)(\sigma_z - \sigma_m) + (\sigma_z - \sigma_m)(\sigma_r - \sigma_m)) + \tau_{rz}^2 + \tau_{rz}^2 + \tau_{rz}^2 \quad (39)$$

ker je pri obravnavanju rotacijsko simetrične oblike telesa $\tau_{\vartheta z} = \tau_{r\vartheta} = 0$. Iz enačbe (27) dobimo za rotacijsko-simetrično obliko telesa komponente deformacijskih hitrosti iz naslednjih enačb

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad \dot{\epsilon} = \frac{v_r}{r} \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (40)$$

iz enačbe (28) pa dobimo še

$$\dot{\epsilon}_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \quad (41)$$

pri čemer upoštevamo, da sta komponenta deformacijskih hitrosti enaki nič: $\dot{\epsilon}_{\vartheta z} = \dot{\epsilon}_{r\vartheta} = 0$.

Komponente deformacijskih hitrosti $\dot{\epsilon}_i$ so sorazmerne komponentam napetostnega deviatorja, zato lahko za rotacijsko simetrično obliko telesa zapišemo

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \lambda S_r = \lambda (\sigma_r - \sigma_m) \\ \dot{\epsilon}_\vartheta &= \lambda S_\vartheta = \lambda (\sigma_\vartheta - \sigma_m) \\ \dot{\epsilon}_z &= \lambda S_z = \lambda (\sigma_z - \sigma_m) \\ \dot{\epsilon}_{rz} &= \lambda S_{rz} = \lambda \tau_{rz} \end{aligned} \quad (42)$$

Druga invarianta hitrosti deformacijskega tenzorja dobi obliko

$$E_2 = 1/2 (\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_\vartheta^2 + \dot{\epsilon}_z^2) + \dot{\epsilon}_{rz}^2 \quad (43)$$

Za primerjalno deformacijsko hitrost lahko zapišemo sedaj obliko

$$\dot{\epsilon}_v = \sqrt{2/3 (\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_\vartheta^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + 2\dot{\epsilon}_{rz}^2)} \quad (44)$$

Če enačbi (43 in 44) vstavimo v enačbo (17), dobimo za sorazmerni faktor λ obliko

$$\lambda = \frac{\sqrt{3} \cdot \dot{\epsilon}_v}{2k} \quad (45)$$

Komponente deformacijskih in strižnih hitrosti (27, 28, 40, 41) lahko prav tako izračunamo, če poznamo enačbo tokovnice ψ , npr.: za neko tokovno funkcijo $\psi(r, z)$ iz naslednjega zapisa

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad \text{oz.} \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (46)$$

zaradi česar so komponente tenzorja deformacijske hitrosti E_2 :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \dot{\epsilon}_\vartheta &= \frac{v_r}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \\ \dot{\epsilon}_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right) \end{aligned}$$

Ravnovesni enačbi (31, 34) lahko vedno zadovoljimo, če napetostne komponente določamo iz dveh napetostnih funkcij $\Phi(z, r)$ in $\chi(z, r)$ po zapisu

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\chi}{r} \\ \sigma_\vartheta &= \frac{\partial \chi}{\partial r} \\ \sigma_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \tau_{rz} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \end{aligned} \quad (48)$$

Za tokovno funkcijo ψ in napetostni funkciji Φ in χ je treba izraziti takšne linearne člene, ki lahko hkrati izpolnjujejo pri plastičnem preoblikovanju robne kakor tudi simetrijske pogoje, zato za te funkcije v splošnem veljajo naslednje oblike

$$\begin{aligned}\psi &= \psi(A_{ij}, z, r) \\ \Phi &= \Phi(B_{ij}, z, r) \\ \chi &= \chi(C_{ij}, z, r)\end{aligned}\quad (49)$$

Poiskati je torej treba takšne kombinacije parametrov A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , ki izpolnjujejo Misesov pogoj za pojav plastičnega tečenja kakor tudi druge robne pogoje s čim manjšim odstopanjem. Če v kateri koli točki N preoblikovalnega prostora napravimo pogrešek (npr. v enačbi 42 za $\dot{\epsilon}_\phi = \lambda \cdot S_\phi$), ki ga dobimo, če izračunavamo napetosti kakor tudi deformacijske hitrosti po enačbah (47, 48), dobimo odstopke

$$\begin{aligned}O_{1n} &= \sigma_\phi(r_n, z_n, B_{kl}, C_{pq}) - m(r_n, z_n, B_{kl}, C_{pq}) = \\ &= -\frac{k}{\sqrt{E_2}} \epsilon_\phi(A_{ij})\end{aligned}\quad (50)$$

Takšne odstopke moramo preračunati za vse točke preoblikovalnega prostora. Iz vsote vseh teh posameznih odstopkov dobimo funkcijo odstopkov:

$$O_1(A_{ij}, B_{kl}, C_{pq}) = \sum_{i=1}^n (O_{1n})^2 \geq 0 \quad (51)$$

s prostimi parametri A_{ij} , B_{kl} in C_{pq} .

Podobne enačbe odstopkov O_2 , O_3 dobimo iz preostalih zadnjih dveh enačb (42). Prvo enačbo za τ_r v enačbah (42) ne moremo uporabiti za enačbo odstopanja, ker je zaradi kontinuitetnega pogoja že obsežena v obeh enačbah za $\dot{\epsilon}_\phi$ in $\dot{\epsilon}_z$.

Druge enačbe odstopanj zapišemo iz robnih pogojev, ki še niso obsežene v funkcijah (49). Tako dobimo iz robnega pogoja $\tau_{rz} = \tau_{rz}^*$, tj. tokovnica $\psi(r, z)$ je na površini izdelka enaka notranji obliki orodja (matrice), naslednjo enačbo odstopanja

$$\begin{aligned}O_4(B_{kl}, C_{pq}) &= \sum_{rp} (O_{4rp})^2 = \\ &= \sum_{r,p} (\tau_{rz}(r_{rp}, z_{rp}, B_{kl}, C_{pq}) - \tau_{rz}^*)^2 \geq 0\end{aligned}\quad (53)$$

Da bi lahko zadovoljili linearni sistem enačb s parametri A_{ij} , B_{kl} , C_{pq} , morajo biti robni pogoji linearno odvisni od teh veličin. Po metodi najmanjših kvadratnih odstopanj določimo sedaj tiste parametrske kombinacije, ki dajejo najmanjšo vsoto posameznih funkcij odstopanj (morebiti pomnožene še z nekim utežnim faktorjem g)

$$O_{\text{cel}}(A_{ij}, B_{kl}, C_{pq}) = \sum_{i=1}^n g_i O_i \quad (54)$$

S parcialnim odvajanjem po neznankah A_{ij} , B_{kl} in C_{pq} in z izenačevanjem z nič dobimo sistem

enačb, iz katerih lahko izračunamo iskane vrednosti A_{ij} , B_{kl} in C_{pq} . Misesov pogoj o pojavu plastičnega tečenja (22) lahko zapišemo tudi v obliki

$$T'_{ij} = \frac{k}{\sqrt{E_2}} V_{ij} \quad (55)$$

ki pa ni linearna funkcija deformacijskih hitrosti in moramo minimalno vrednost enačbe odstopanja izračunati z iterativnim postopkom, tj. s postopnim približevanjem.

V prvem iteracijskem koraku zamenjamo enačbo plastičnosti (55) z enačbo

$$T'_{ij}^{(1)} = k \cdot V_{ij}^{(1)} \quad (56)$$

kar pomeni, da se najprej za dane robne pogoje izračuna napetostno in hitrostno stanje za viskozno snov z žilavostjo $\mu = k/2$ oziroma $\lambda = 1$.

Tako dobimo grob opis hitrostnega polja pri plastičnem tečenju. Napetostno polje pa še vedno zelo močno odstopa od pogoja plastičnega tečenja (11), $\mathcal{J}_2 - k^2 = 0$. V drugem iteracijskem koraku določimo napetostno stanje pri plastičnem tečenju (z znanim hitrostnim stanjem iz prvega iteracijskega koraka) po naslednji zvezi

$$T'_{ij}^{(2)} = \frac{k}{\sqrt{E_2^{(1)}}} V_{ij}^{(1)} \quad (57)$$

pri čemer se $E_2^{(1)}$ izračuna iz prvega iteracijskega koraka viskoznega hitrostnega polja. Tako izračunano napetostno polje že kar dobro zadovoljuje pogoje plastičnega tečenja. V tretjem iteracijskem koraku obdržimo konstantno napetostno stanje in izračunamo natančnejše hitrostno polje po zvezi

$$T'_{ij}^{(2)} = \frac{k}{\sqrt{E_2^{(1)}}} V_{ij}^{(2)} \quad (58)$$

Takšen iteracijski postopek se konča tedaj, ko je odstopke v pogoju za plastično tečenje zadovoljivo majhen, ko je

$$3 \mathcal{J}_2 - k^2 = 0 \text{ oz. } \mathcal{J}_2 - k^2 = 0$$

LITERATURA

- [1] R. von Mises.: Mechanik der festen Körper im plastischdeformablen Zustand; Göttinger Nachr. math. phys. Klasse (str. 582—592), Strassburg, 4. okt. 1913.
- [2] Steck E.: Numerische Behandlung von Verfahren der Umformtechnik; Girardet, Essen 1971.
- [3] Lange K.: Lehrbuch der Umformtechnik, Band 1; Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [4] M. Geiger: Näherungsrechnung zur Ermittlung des Spannungs- und Bewegungszustandes beim Fließen eines starrplastischen Werkstoffes; Ind. Anz. 89 (1967) Nr. 81 (str. 1778—1781).