YU — ISSN 0039-2480

STROJNIŠKI VESTNIK

LETNIK 29 LJUBLJANA, OKTOBER—DECEMBER 1983 ŠTEVILKA 10—12

UDK 532.5

Robna integralska metoda za tokove viskoznih nestisljivih fluidov

POLDE ŠKERGET — ANDRO ALUJEVIČ

1. UVOD

Časovno odvisno gibanje viskoznega nestisljivega fluida popišemo z zakonom ohranitve mase in z Newtonovimi zakoni gibanja, izraženo v matematični obliki kontinuitetne in Navier-Stokesove enačbe

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{1.1}$$

$$\mathrm{D}\boldsymbol{v}/\mathrm{D}t = \partial \boldsymbol{v}/\partial t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla p/\varrho + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{1.2}$$

kjer so p — tlak, ϱ — gostota in ν — kinematična viskoznost. Z enačbama (1.1) in (1.2) določimo tlačno polje p in hitrostno polje $\boldsymbol{v}$ ob znanih začetnih in robnih pogojih vektorja hitrosti. Čeprav ti enačbi v celoti popisujeta gibanje fluida z osnovnimi spremenljivkami p in $\boldsymbol{v}$, bomo vpeljali vrtinčnost $\boldsymbol{\omega}$, določeno z

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v} \tag{1.3}$$

Konvektivni člen v (1.2) lahko zapišemo kot

$$\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = \tfrac{1}{2} \nabla (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\, \nabla \boldsymbol{v} \tag{1.4}$$

in enačba gibanja je

$$\partial \boldsymbol{v}/\partial t + \tfrac{1}{2} \nabla (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla p/\varrho + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{1.5}$$

Poiščemo rotor leve in desne strani enačbe (1.5) in dobimo transportno enačbo vrtinčnosti

$$\partial \boldsymbol{\omega}/\partial t = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \tag{1.6}$$

oziroma zaradi identitete

$$\nabla \times (\boldsymbol{v} \times \omega) = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{v} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{1.7}$$

kjer sta zadnja dva člena nič, ker je $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ in $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, tako da

$$\mathrm{D}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{D}t = \partial \boldsymbol{\omega}/\partial t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \tag{1.8}$$

Časovna sprememba vrtinčnosti, ki jo predstavlja totalni oziroma konvektivni člen na levi strani enačbe, je enaka viskozni difuziji in raztezanju vrtincev oziroma členoma na desni strani enačbe. Difuzivni člen je popolnoma analogen členu v Navier-Stokesovi enačbi, ki izraža difuzijo momenta. Za dvodimenzionalne tokove je člen $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = 0$ zaradi ortogonalnosti vrtinčnosti in gradienta hitrosti.

S konceptom vrtinčnosti razdelimo problem toka fluida na kinematski in kinetski del. Kinematski vidik je opisan z enačbama (1.1) in (1.3) ter izraža zvezo med poljem vrtinčnosti v določenem časovnem trenutku in poljem hitrosti v istem trenutku. Kinetski vidik pa je opisan z enačbo (1.6) oziroma (1.8) ter predstavlja spreminjanje vrtinčnosti v fluidu.

Z numeričnim postopkom reševanja sledimo razvoju vrtinčnega polja. Ker je problem časovno odvisen, lahko poiščemo rešitev le korakoma po času. Postopek reševanja sestoji iz naslednjih treh stopenj:

1. Iz znane prostorske porazdelitve $\boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{\omega}$ v območju Ω in času t izračunamo novo porazdelitev $\boldsymbol{\omega}$ v območju za čas $t + \Delta t$ z enačbo (1.6). Ker je časovna sprememba vrtinčnosti enaka nič povsod tam, kjer so vrtinčnost in njena prvi in drugi krajevni odvod nič, moramo poznati vrednosti hitrosti v časovnem trenutku t le v viskoznem delu fluida.
2. Nove robne vrednosti vrtinčnosti izračunamo s pogojem brez zdrsa.
3. Nove vrednosti hitrosti izračunamo iz enačb (1.1) in (1.3).

Korak 1 je kinetski del računske zanke. Ker je enačba (1.6) parabolična, pomeni korak 1 rešitev problema začetnih robnih vrednosti. Proces generacije vrtinčnosti na površini telesa ni popisan z difuzijo in konvekcijo. Robne vrednosti vrtinčnosti moramo poznati, če hočemo rešitev pomakniti v času. Korak 2 pomeni generacijo vrtincev in z njim končamo izračun vrednosti vrtinčnosti za novi čas $t + \Delta t$. Korak 3 je kinematski del zanke, kjer iz novih vrednosti vrtinčnosti izračunamo nove vrednosti hitrosti in je problem robnih vrednosti, ker enačbi (1.1) in (1.3) sestavljata eliptični sistem diferencialnih enačb.

2. INTEGRALSKA PREDSTAVITEV KINEMATSKEGA DELA

Diferencialno enačbo lahko preoblikujemo v integralsko z metodo utežnih ostankov in z Greenovimi identitetami. Rešitev problema temelji nato na numerični integraciji dobljenih integralov.

2.1. Skalarna eliptična enačba

Iščemo rešitev Poissonove enačbe za skalarno funkcijo $u(s)$

$$\nabla^2 u(s) = p \qquad \text{v } \Omega \tag{2.1}$$

Greenova druga identiteta

$$\int (u^* \nabla^2 u - u \nabla^2 u^*)\, \mathrm{d}\Omega = \int (u^* \partial u/\partial n - u\, \partial u^*/\partial n)\, \mathrm{d}\Gamma \tag{2.2}$$

kjer je Ω območje, ograjeno z robom Γ, n je enotni vektor, normalen na rob Γ, u in u^* sta zvezni in omejeni funkciji z zveznim prvim in drugim odvodom v območju Ω. Naj bo u^* osnovna rešitev eliptične diferencialne enačbe in definirana z

$$\nabla^2 u^*(\xi, s) + \delta(\xi, s) = 0 \tag{2.3}$$

Osnovna rešitev u^* zadošča Laplaceovi enačbi povsod, razen v točki $\xi = s$, kjer je singularna. Singularno točko izločimo iz območja Ω tako, da rob Γ sestavimo iz dveh delov (Γ in Γ_ε), kjer Γ_ε obkroža singularno točko in ograjuje območje Ω znotraj. V območju velja

$$\nabla^2 u^*(\xi, s) = 0 \tag{2.4}$$

Z vstavitvijo enačb (2.1) in (2.4) v (2.2) dobimo

$$\begin{aligned} \int p(s)\, u^*(\xi, s)\, \mathrm{d}\Omega(s) = \int \{q(S)\, u^*(\xi, S) - \\ - u(S)\, q^*(\xi, S)\}\, \mathrm{d}\Gamma(S) + \\ + \int \{q(S)\, u^*(\xi, S) - u(S)\, q^*(\xi, S)\}\, \mathrm{d}\Gamma_\varepsilon(S) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Za tridimenzionalne probleme je Γ_ε krogla s polmerom ε in središčem v ξ. Za rob Γ_ε sta osnovna rešitev in njen gradient $1/4\pi\,\varepsilon$, $-1/4\pi\,\varepsilon^2$. Ko gre $\varepsilon \to 0$, velja $\Gamma_\varepsilon \to 0$ z ε^2. Prvi integral po Γ_ε je tako nič, preostali pa da vrednost funkcije v točki singularnosti. Integralska enačba se glasi

$$\begin{aligned} u(\xi) + \int u(S)\, q^*(\xi, S)\, \mathrm{d}\Gamma(S) = \\ = \int q(S)\, u^*(\xi, S)\, \mathrm{d}\Gamma(S) - \\ - \int p(s)\, u^*(\xi, s)\, \mathrm{d}\Omega(s) \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2. Vektorska eliptična enačba

Enačbi (1.1) in (1.3) pomenita kinematsko zvezo med $\boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{\omega}$. Hitrostno polje $\boldsymbol{v}$ določimo iz znane porazdelitve za $\boldsymbol{\omega}$ z rešitvijo vektorske Poissonove enačbe. Enačbo izpeljemo tako, da poiščemo rotor enačbe (1.3) in upoštevamo (1.1)

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{v} - \nabla^2 \boldsymbol{v} \\ \nabla^2 \boldsymbol{v} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ker vsaka komponenta vektorja hitrosti zadošča Poissonovi enačbi, izpeljemo integralsko enačbo za $\boldsymbol{v}$ tako, da zamenjamo v enačbi (2.6) u z $\boldsymbol{v}$ in p z desno stranjo enačbe (2.7)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(\xi) + \int \boldsymbol{v}(S)\, \{\partial u^*(\xi, S)/\partial \boldsymbol{n}(S)\}\, \mathrm{d}\Gamma(S) = \\ = \int \{\partial \boldsymbol{v}(S)/\partial \boldsymbol{n}(S)\}\, u^*(\xi, S)\, \mathrm{d}\Gamma(S) + \\ + \int \{\nabla \times \boldsymbol{\omega}(s)\}\, u^*(\xi, s)\, \mathrm{d}\Omega(s) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Integralska enačba (2.8) vsebuje odvod vrtinčnosti v integrandu po Ω in odvod hitrosti v robnem integralu. Integralsko predstavitev $\boldsymbol{v}$, v kateri ne bo odvodov $\boldsymbol{\omega}$ in $\boldsymbol{v}$, dobimo z vpeljavo vektorskega potenciala in z Greenovim teoremom za vektorje v obliki

$$\begin{aligned} \int (\boldsymbol{E} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{E})\, \mathrm{d}\Omega = \int \{\boldsymbol{E} \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) + \\ + \boldsymbol{E}(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{F}(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\Gamma \end{aligned} \tag{2.9}$$

Naj bo vektor $\boldsymbol{F}$ osnovna rešitev vektorske Laplaceove enačbe $\nabla^2 \boldsymbol{F} = 0$, podane z

$$\boldsymbol{v}^*(\xi, s) = \nabla\{u^*(\xi, s)\} \times \boldsymbol{e} = \nabla \times \{u^*(\xi, s)\boldsymbol{e}\} \tag{2.10}$$

kjer je $\boldsymbol{e}$ konstantni enotni vektor. Veljajo zveze

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}^* = 0 \tag{2.11}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{v}^* = \nabla(\boldsymbol{e} \cdot \nabla u^*) \qquad \text{za } \xi \neq s \tag{2.12}$$

Ker je hitrostno polje solenoidno, lahko določimo vektorski potencial $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{B}\,, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.13}$$

Vstavimo (2.13) v (1.3)

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{B} - \nabla^2 \boldsymbol{B} \tag{2.14}$$

Upoštevamo, da je $\boldsymbol{F}$ osnovna rešitev $\boldsymbol{v}^*$ in $\boldsymbol{E}$ je vektorski potencial $\boldsymbol{B}$. Postavimo, kakor v poglavju 2.1, da majhna krogla polmera ε obkroža singularno točko ξ v območju, enačba (2.9) pa postane

$$\begin{aligned} \int (\nabla u^* \times \boldsymbol{e}) \cdot \boldsymbol{\omega}\, \mathrm{d}\Omega = \int \boldsymbol{B} \times \nabla(\boldsymbol{e} \cdot \nabla u^*) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}(\Gamma + \Gamma_\varepsilon) - \\ - \int (\nabla u^* \times \boldsymbol{e}) \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}(\Gamma + \Gamma_\varepsilon) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Enačbo (2.15) preoblikujemo v obliko

$$\begin{aligned} \int \boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \nabla u^*)\, \mathrm{d}\Omega = \int (\boldsymbol{e} \cdot \nabla u^*)\, (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\, \mathrm{d}(\Gamma + \Gamma_\varepsilon) - \\ - \int \boldsymbol{e} \cdot \{(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}) \times \nabla u^*\}\, \mathrm{d}(\Gamma + \Gamma_\varepsilon) \end{aligned} \tag{2.16}$$

V limitnem procesu, ko gre $\varepsilon \to 0$, postane območje Ω celotno območje, ograjeno z Γ, ker gre integral po območju znotraj Γ_ε proti nič za $\varepsilon \to 0$. Integrali po Γ_ε so

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \{\int (\boldsymbol{e} \cdot \nabla u^*)\, (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\, \mathrm{d}\Gamma_\varepsilon - \\ - \int \boldsymbol{e} \cdot \{(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}) \times \nabla u^*\}\, \mathrm{d}\Gamma_\varepsilon\} = \\ = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{4\pi\,\varepsilon^2} \int \{(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{n})\, (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) - \right. \\ \left. - \boldsymbol{e} \cdot \{(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n}\}\}\, \mathrm{d}\Gamma_\varepsilon \right\} = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{v}(\xi) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Rezultat (2.17) vstavimo v (2.16). Upoštevamo, da je smer vektorja $\boldsymbol{e}$ poljubna in dobimo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(\xi) + \int (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\, \nabla u^*\, \mathrm{d}\Gamma = \\ = \int (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}) \times \nabla u^*\, \mathrm{d}\Gamma + \int \boldsymbol{\omega} \times \nabla u^*\, \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ker se v enačbi (2.18) ne pojavljajo odvodi, je primernejša za numerično reševanje od enačbe (2.8). Končna oblika enačbe je naslednja

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(\xi) = \frac{1}{m}\{\int \{\boldsymbol{\omega}(s) \times \boldsymbol{r}(\xi, s)\}\, r^{-d}(\xi, s)\, \mathrm{d}\Omega(s) + \\ + \int \{\boldsymbol{v}(S) \times \boldsymbol{n}(S)\} \times \boldsymbol{r}(\xi, S)\, r^{-d}(\xi, S)\, d\Gamma(S) - \\ - \int \{\boldsymbol{v}(S) \cdot \boldsymbol{n}(S)\}\, \boldsymbol{r}(\xi, S)\, r^{-d}(\xi, S)\, \mathrm{d}\Gamma(S)\} \end{aligned} \tag{2.19}$$

kjer so $\boldsymbol{r}(\xi, s) = \{x_1(\xi) - \mathrm{x}_1(s), x_2(\xi) - x_2(s), \mathrm{x}_3(\xi) - x_3(s)\}$, $m = 4\pi$, $d = 3$ za tridimenzionalne probleme oziroma $\boldsymbol{r}(\xi, s) = \{x_1(\xi) - x_1(s),\ x_2(\xi) - x_2(s)\}$, $m = 2\pi$, $d = 2$ za dvodimenzionalne probleme.

Območni integral v (2.19) je prispevek polja vrtinčnosti k polju hitrosti, medtem ko robni integrali dajejo potencialni tok v območju Ω. Enačba (2.19) omogoča eksplicitno izračunavanje hitrosti v poljubni točki polja, če poznamo robne pogoje za $\boldsymbol{v}$ in vrtinčnost $\boldsymbol{\omega}$ v območju Ω. Ker je integrand v območnem integralu nič za $\boldsymbol{\omega} = 0$, je območje Ω vezano le z viskoznim območjem.

Zunanji tok: Proučujemo gibanje telesa v neskončnem fluidu. Površina Γ je sestavljena iz površine trdnega telesa Γ_s in površine v neskončnosti Γ_∞. Za rob Γ_s velja $\boldsymbol{v} = 0$, tako da je integral po Γ_s enak nič. Na površini Γ_∞ predpišemo $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\infty$. Naj bo Γ_∞ krogelna površina radija R, ki ograjuje Γ_s. Ko gre $R \to \infty$, integral po Γ_∞ da $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\infty$, enačba (2.19) pa postane

$$\boldsymbol{v}(\xi) = \frac{1}{m} \int \{\boldsymbol{\omega}(s) \times \boldsymbol{r}(\xi, s)\}\, r^{-d}(\xi, s)\, \mathrm{d}\Omega(s) + \boldsymbol{v}_\infty \quad (2.20)$$

kar pomeni Biot-Savartov zakon, ki popisuje hitrostno polje za dano porazdelitev vrtinčnosti v neskončnem območju. Enačba (2.19) je torej razširitev Biot-Savartovega zakona za območja, ograjena z robom Γ.

3. INTEGRALSKA PREDSTAVITEV KINETSKEGA DELA

3.1 Skalarna parabolična enačba

Iščemo rešitev nehomogene difuzijske enačbe za skalarno funkcijo u

$$\partial u(s, t)/\partial t - a\nabla^2 u(s, t) = b \quad \mathrm{v}\,\Omega \quad (3.1)$$

Zapišemo lahko naslednji stavek utežnega ostanka

$$\begin{aligned}&\int\int \{a\nabla^2 u(s, t) - \partial u(s, t)/\partial t + \\ &\quad + b\}\, u^*(\xi, \tau; s, t)\, \mathrm{d}\Omega(s)\, \mathrm{d}t = \\ &= \int\int a\{q(S, t) - \bar{q}(S, t)\}\, u^*(\xi, \tau; S, t)\, \mathrm{d}\Gamma_2(S)\, \mathrm{d}t - \\ &- \int\int a\{u(S, t) - \bar{u}(S, t)\}\, q^*(\xi, \tau; S, t)\, \mathrm{d}\Gamma_1(S)\, \mathrm{d}t \quad (3.2)\end{aligned}$$

kjer sta $q^*(\xi, \tau; S, t) = \partial u^*(\xi, \tau; S, t)/\partial n(S)$ in $0 < t < \tau$. Enkratna integracija Laplaciana po x_i da

$$\begin{aligned}&-\int\int a\{\partial u(s, t)/\partial x_i\}\, \{\partial u^*(\xi, \tau; s, t)/\partial x_i\}\, \mathrm{d}\Omega(s)\, \mathrm{d}t - \\ &- \int\int \{\partial u(s, t)/\partial t\}\, u^*(\xi, \tau; s, t)\, \mathrm{d}\Omega(s)\, \mathrm{d}t + \\ &+ \int\int b u^*(\xi, \tau; s, t)\, \mathrm{d}\Omega(s)\, \mathrm{d}t = -\int\int a\{u(S, t) - \\ &- \bar{u}(S, t)\}\, q^*(\xi, \tau; S, t)\, \mathrm{d}\Gamma_1(S)\, \mathrm{d}t - \\ &- \int\int a q(S, t)\, u^*(\xi, \tau; S, t) \mathrm{d}\Gamma_1(S)\, \mathrm{d}t - \\ &- \int\int a\bar{q}(S, t)\, u^*(\xi, \tau; S, t)\, \mathrm{d}\Gamma_2(S)\, \mathrm{d}t \quad (3.3)\end{aligned}$$

Ponovno integriramo prvi območni integral po x_i

$$\begin{aligned}&\int\int a\nabla^2 u^*(\xi, \tau; s, t)\, u(s, t)\, \mathrm{d}\Omega(s)\, \mathrm{d}t - \\ &- \int\int \{\partial u(s, t)/\partial t\}\, u^*(\xi, \tau; s, t)\, \mathrm{d}\Omega(s)\, \mathrm{d}t + \\ &+ \int\int b u^*(\xi, \tau; s, t)\, \mathrm{d}\Omega(s)\, \mathrm{d}t = \\ &= \int\int a u(S, t)\, q^*(\xi, \tau; S, t)\, \mathrm{d}\Gamma(S)\, \mathrm{d}t - \\ &- \int\int a q(S, t)\, u^*(\xi, \tau; S, t)\, \mathrm{d}\Gamma(S)\, \mathrm{d}t \quad (3.4)\end{aligned}$$

Integracija po delih časovnega odvoda da

$$\begin{aligned}&\int\int \{a\nabla^2 u^*(\xi, \tau; s, t) + \\ &+ \partial u^*(\xi, \tau; s, t)/\partial t\}\, u(s, t)\, \mathrm{d}\Omega(s)\, \mathrm{d}t + \\ &+ \int\int b u^*(\xi, \tau; s, t) \mathrm{d}\Omega(s)\, \mathrm{d}t - \\ &- \{\int u^*(\xi, \tau; s, t)\, u(s, t)\, \mathrm{d}\Omega(s)\}_0^\tau = \\ &= \int\int a u(S, t)\, q^*(\xi, \tau; S, t)\, \mathrm{d}\Gamma(S)\, \mathrm{d}t - \\ &- \int\int a q(S, t)\, u^*(\xi, \tau; S, t)\, \mathrm{d}\Gamma(S)\, \mathrm{d}t \quad (3.5)\end{aligned}$$

Naj bo u^* osnovna rešitev parabolične diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}&a\nabla^2 u^*(\xi, \tau; s, t) + \partial u^*(\xi, \tau; s, t)/\partial t + \\ &\quad + \delta(\xi, s)\, \delta(\tau, t) = 0 \quad (3.6)\\ &\lim_{t \to \tau} u^*(\xi, \tau; s, t) = \delta(\xi, s)\end{aligned}$$

in podana z

$$u^*(\xi, \tau; s, t) = \\ = \begin{cases} 0 \quad \text{za } t > \tau & (3.7) \\ \{4\pi\, a(\tau - t)\}^{-d/2} \exp\left(-\dfrac{r^2(\xi, s)}{4a(\tau - t)}\right) \text{ za } t < \tau \end{cases}$$

kjer je d prostorska dimenzija problema. Osnovna rešitev je učinek v referenčni točki s in času t enotnega točkovnega izvora v točki ξ in času τ v neskončnem mediju in ima lastnosti

$$\begin{aligned}&a\nabla^2 u^*(\xi, \tau; s, t) + \partial u^*(\xi, \tau; s, t)/\partial t = 0 \\ &\quad \mathrm{v}\ \Omega \text{ za } t < \tau \quad (3.8)\end{aligned}$$

$$\int u(s, t)\, u^*(\xi, \tau; s, t)\, \mathrm{d}\Omega(s) = u(\xi, \tau) \quad \text{za } t = \tau \quad (3.9)$$

Raziščimo singularnost integralov v (3.5) za čas $t = \tau$ v vrhu Diracove funkcije delta. Zgornji meji integralov lahko dodamo ali odvzamemo poljubno majhno količino ε. Prvi integral na levi strani enačbe (3.5) je enak nič za $0 \leq t \leq \tau - \varepsilon$ zaradi enačbe (3.8). V limitnem procesu za $\varepsilon \to 0$ in ob upoštevanju pogoja (3.9) dobimo

$$\begin{aligned}&u(\xi, \tau) + \int\int a u(S, t)\, q^*(\xi, \tau; S, t)\, \mathrm{d}\Gamma(S)\, \mathrm{d}t = \\ &= \int\int a q(S, t)\, u^*(\xi, \tau; S, t)\, \mathrm{d}\Gamma(S)\, \mathrm{d}t + \\ &+ \int u_0(s, t = 0)\, u^*(\xi, \tau; s, t = 0)\, \mathrm{d}\Omega(s) + \\ &+ \int\int b u^*(\xi, \tau; s, t)\, \mathrm{d}\Omega(s)\, \mathrm{d}t \quad (3.10)\end{aligned}$$

V stacionarnem stanju postane osnovna rešitev parabolične enačbe osnovna rešitev eliptične enačbe

$$\lim_{\tau \to \infty} \int u^*(\xi, \tau; s, t)\, \mathrm{d}t = u^*(\xi, s) \quad (3.11)$$

Prva dva integrala enačbe (3.10) pomenita vpliv robnih pogojev, tretji člen pa upošteva vpliv začetnih pogojev. Enačba (3.10) velja za poljubno točko območja. Robno integralsko enačbo izpeljemo tako, da z limitnim procesom točko ξ prenesemo na rob Γ. Pri tem moramo paziti na singularnost integrala za q^*. Robna integralska enačba se glasi

$$\begin{aligned}&c(\xi)\, u(\xi, \tau) + \int\int a u(S, t)\, q^*(\xi, \tau; S, t)\, \mathrm{d}\Gamma(S)\, \mathrm{d}t = \\ &= \int\int a q(S, t)\, u^*(\xi, \tau; S, t)\, \mathrm{d}\Gamma(S)\, \mathrm{d}t + \\ &+ \int u_0(s, t = 0)\, u^*(\xi, \tau; s, t = 0)\, \mathrm{d}\Omega(s) + \\ &+ \int\int b u^*(\xi, \tau; s, t)\, \mathrm{d}\Omega(s)\, \mathrm{d}t \quad (3.12)\end{aligned}$$

3.2. Vektorska parabolična enačba

Z upoštevanjem enačb (3.1), (3.10) in (1.6) zapišemo naslednjo integralsko enačbo

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\omega}(\xi, \tau) + \\
&+ \nu \int\int \boldsymbol{\omega}(S, t) \{\nabla u^*(\xi, \tau; S, t) \cdot \boldsymbol{n}(S)\} \, d\Gamma(S) \, dt = \\
&= \nu \int\int u^*(\xi, \tau; S, t) \{\{\nabla \times \\
&\times \boldsymbol{\omega}(S, t)\} \times \boldsymbol{n}(S)\} \, d\Gamma(S) \, dt + \\
&+ \int \boldsymbol{\omega}_0(s, t = 0) \, u^*(\xi, \tau; s, t = 0) \, d\Omega(s) + \\
&+ \int\int \{\nabla \times \{\boldsymbol{v}(s, t) \times \boldsymbol{\omega}(s, t)\}\} \, u^*(\xi, \tau; s, t) \, d\Omega(s) \, dt
\end{aligned} \tag{3.13}$$

kjer je $u^*(\xi, \tau; s, t)$ osnovna rešitev difuzijske enačbe. Enačba (3.13) izraža kinetiko viskoznega toka v integralni obliki za vrtinčnost. Prvi območni integral je prispevek začetne porazdelitve vrtinčnosti med procesom difuzije k porazdelitvi vrtinčnosti v naslednjem časovnem stanju. Drugi območni integral je vpliv konvekcije in raztezanja. Robni integrali pomenijo difuzijo z roba.

Prispevek potencialnega območja toka k izračunu $\boldsymbol{\omega}$ kjerkoli v toku je nič, zato moramo poznati vrednosti za $\boldsymbol{v}$ le na robu Γ in v viskoznem območju.

4. DVODIMENZIONALNI TOK

Ena komponenta vektorja hitrosti $\boldsymbol{v}$ je nič, npr. $v_3 = 0$, in $\boldsymbol{v}$ je neodvisen od x_3. Zato velja

$$\omega_3 = \partial v_2/\partial x_1 - \partial v_1/\partial x_2 \tag{4.1}$$

Vektor vrtinčnosti ima samo eno komponento, normalno na ravnino toka, in ga lahko obravnavamo kot skalar. Tok fluida popišemo z naslednjima skalarnima enačbama za kinematski vidik toka

$$\begin{aligned}
v_1(\xi) = &-\frac{1}{2\pi}\{\int \omega(s) \, r_2(\xi, s) \, r^{-2}(\xi, s) \, d\Omega(s) + \\
&+ \int \{K_1(S) \, r_1(\xi, S) + K_2(S) \, r_2(\xi, S)\} \, r^{-2}(\xi, S) \, d\Gamma(S)\}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
v_2(\xi) = &\frac{1}{2\pi}\{\int \omega(s) \, r_1(\xi, s) \, r^{-2}(\xi, s) \, d\Omega(s) - \\
&- \int \{K_1(S) \, r_2(\xi, S) - K_2(S) \, r_1(\xi, S)\} \, r^{-2}(\xi, S) \, d\Gamma(S)\}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

kjer je

$$r_i(\xi, s) = x_i(\xi) - x_i(s), \qquad i = 1, 2$$

ter

$$K_1(S) = v_1(S) \, n_1(S) + v_2(S) \, n_2(S)$$
$$K_2(S) = v_1(S) \, n_2(S) - v_2(S) \, n_1(S)$$

in kinetski del toka popišemo s skalarno enačbo

$$\begin{aligned}
&\omega(\xi, \tau) = \int \omega_0(s, t = 0) \, u^*(\xi, \tau; s, t) \, d\Omega(s) - \\
&- \int\int \{v_1(s, t) \, \partial\omega(s, t)/\partial x_1(s) + \\
&+ v_2(s, t) \, \partial\omega(s, t)/\partial x_2(s)\} \cdot u^*(\xi, \tau; s, t) \, d\Omega(s) \, dt + \\
&+ \nu \int\int \{u^*(\xi, \tau; S, t) \, \partial\omega(S, t)/\partial n(S) - \\
&- \omega(S, t) \, \partial u^*(\xi, \tau; S, t)/\partial n(S)\} \cdot d\Gamma(S) \, dt
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Drugi območni integral vsebuje odvod vrtinčnosti. Zato ga integriramo po delih in dobimo

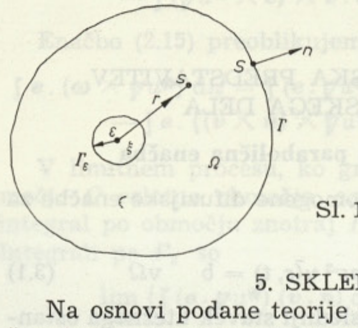
$$\begin{aligned}
&\int\int \{v_1(s, t) \, \partial\omega(s, t)/\partial x_1(s) + \\
&+ v_2(s, t) \, \partial\omega(s, t)/\partial x_2(s)\} \cdot u^*(\xi, \tau; s, t) \, d\Omega(s) \, dt = \\
&= \int\int u^*(\xi, \tau; S, t) \, \omega(S, t) \, \{v_1(S, t) \, n_1(S) + \\
&+ v_2(S, t) \, n_2(S)\} \, d\Gamma(S) \, dt - \\
&- \int\int \omega(s, t) \, \{v_1(s, t) \, \partial u^*(\xi, \tau; s, t)/\partial x_1(s) + \\
&+ v_2(s, t) \, \partial u^*(\xi, \tau; s, t)/\partial x_2(s)\} \, d\Omega(s) \, dt
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Vstavimo (4.5) v (4.4) in dobimo naslednjo integralsko enačbo

$$\begin{aligned}
&\omega(\xi, \tau) = \int \omega_0(s, t = 0) \, u^*(\xi, \tau; s, t) \, d\Omega(s) + \\
&+ \int\int \omega(s, t) \, \{v_1(s, t) \, \partial u^*(\xi, \tau; s, t)/\partial x_1(s) + \\
&+ v_2(s, t) \, \partial u^*(\xi, \tau; s, t)/\partial x_2(s)\} \, d\Omega(s) \, dt - \\
&- \int\int u^*(\xi, \tau; S, t) \, \omega(S, t) \, \{v_1(S, t) \, n_1(S) + \\
&+ v_2(S, t) \, n_2(S)\} \, d\Gamma(S) \, dt + \\
&+ \nu \int\int \{u^*(\xi, \tau; S, t) \, \partial\omega(S, t)/\partial n(S) - \\
&- \omega(S, t) \, \partial u^*(\xi, \tau; S, t)/\partial n(S)\} \cdot d\Gamma(S) \, dt
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Enačba (4.6) je ugodnejša za numerično reševanje v primerjavi z enačbo (4.4).

Za zunanje tokove velja, da je $\boldsymbol{v} = 0$ na Γ_s in $\boldsymbol{\omega} = 0$ na Γ_∞, tako da prvi robni integral v (4.6) odpade.



Sl. 1. *Območje Ω in rob Γ z ograjo $\varepsilon \to 0$*

5. SKLEP

Na osnovi podane teorije pripravljamo svoj računalniški program po postopku robnih elementov za preračun viskoznih nestisljivih tokov. Delo poteka v okviru znanstvenega izpopolnjevanja P. Škergeta v CML Southampton s štipendijama RSS (81/82) in MAAE (82/83).

LITERATURA

[1] J. C. Wu, U. Gulcat: Separate treatment of attached and detached flow regions in general viscous flows. AIAA Journal, Vol. 19, No. 1 (1981).

[2] J. C. Wu: Theory for aerodynamic force and moment in viscous flows. AIAA Journal, Vol. 19, No. 4 (1981).

[3] J. C. Wu, A. Sugavanam: Method for the numerical solution of turbulent flow problems. AIAA Journal, Vol. 16 (1978).

[4] J. C. Wu: Numerical boundary conditions for viscous flow problems. AIAA Journal, Vol. 14, No. 8 (1976).

[5] J. C. Wu, A. H. Spring, N. L. Sankar: A flow field segmentation method for the numerical solution of viscous flow problems. Lecture Notes in Physics, Vol. 35, Springer-Verlag, New York (1974).

[6] L. C. Wrobel: Potential and viscous flow problems using the boundary element method. PhD thesis, University of Southampton (1981).

Naslov avtorjev: viš. pred. P. Škerget, mag., dipl. ing. str.,
red. prof. A. Alujevič, dr., mag., dipl. ing.
Visoka tehniška šola,
VTO strojništvo, MARIBOR