UDK 539.384:539.413:624.073

Stevensov model upogiba ravne homogene plošče in njegove posplošitve

BOGDAN KRUŠIČ

1. UVOD

Prvotna teorija upogiba plošče je dobila svojo dokončno obliko in utemeljitev sredi prejšnjega stoletja in je znana pod imenom Kirchhoffova teorija upogiba, ki sloni na znanih fizikalnih predpostavkah, zato velja v matematičnem pomenu le aproksimativno. Poleg splošne zapletene teorije upogiba, ki je nastala v prvi polovici dvajsetega stoletja, spada v štirideseta leta manj znana teorija, izvirajoča od Stevensona [1], ki izhaja iz Hookovega zakona in ravnotežnih enačb in le ene predpostavke, ki je povsem matematične narave. Ta zadeva zahtevano zakonitost za porazdelitev napetosti, normalne na površino plošče, po debelini te plošče. S to predpostavko je Stevenson našel eksaktno rešitev vseh enačb, ki jim moramo zadostiti. Pokaže se, da izhaja odtod Kirchhoffova teorija kot mejni primer, če vzamemo debelino plošče nič. Pač pa da Stevensonova teorija mnogo bogatejši pregled v dogajanje v sami plošči, kar Kirchhoffova ne zmore [2]. V naslednjih razdelkih si bomo ogledali nekaj najpomembnejših rezultatov Stevensonovega izvajanja in dopolnitve, ki jih je izdelala skupina matematikov, fizikov in mehanikov obeh slovenskih univerz.

Do leta 1975 še ni bil znan iz svetovne literature noben izrek o enoličnosti rešitve ali o eksistenci rešitve ali izdelana splošna eksaktna metodologija reševanja robnih problemov v zvezi z upogibom. Izkazalo se je, da je mogoče robne probleme pri Stevensonovem modelu zastavljati mnogo širše kot v prvotni teoriji. Obenem z upogibom se pojavi v splošnem simultano tudi premik v ravnini plošče same. Pokazano je, da je mogoče v polni meri uporabljati pri reševanju teh problemov vse metode, ki so znane v svetu pod imenom Mushelišvilijeve metode.

2. NEKAJ NAJPOMEMBNEJŠIH REZULTATOV STEVENSONOVEGA MODELA

Koordinatni sistem (x, y, Z) bomo vseskozi imeli postavljen tako, da je srednja ravnina plošče v ravnini xy, debelina plošče pa naj bo $2h$. Če na ploščo ne delujejo prostorninske sile, kar bomo zahtevali vseskozi, in deluje na zgornjo ploskev plošče $(Z = h)$ obremenitev $\sigma_Z = -q(x, y)$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ na spodnji $(Z = -h)$ pa še $q = 0$, tedaj iz ene od ravnotežnih enačb dobimo še $\frac{\partial \sigma_Z}{\partial Z}(Z = \pm h) = 0$.

Za σ_Z pa iščemo v okviru polinomov spremenljivke Z možnost zadostitve tem zahtevam. Pri Stevensonovem modelu je izbrana najpreprostejša možnost, to je polinom tretje stopnje

$$\sigma_Z = \frac{q(x,y)}{4h^3}(Z^3 - 3h^2 Z - 2h^3) \tag{1}$$

kar je mogoče le, če je

$$\Delta_1 q(x, y) = 0 \tag{2}$$

Funkcija $q(x, y)$ mora biti torej harmonična. Če funkcijo $q(x, y)$ generiramo iz analitične funkcije $P(z)$ na način

$$q(x, y) = \mathrm{Re}\,[P''(z)] \tag{3}$$

tedaj moremo dokazati, da se izrazi za elemente napetostnega tenzorja (p_{ki}) izražajo takole

$$p_{ki} = \sum_{\rho=0}^{\rho=5} a_{k\rho} Z^\rho \tag{4}$$

kjer so koeficienti a_{ki} linearne funkcije $P(z)$ in še štirih analitičnih funkcij $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\Omega(z)$ in $\omega(z)$, ki so še povsem poljubne. Za zgled navedimo

$$p_{23} = \tau_{yZ} = \varepsilon_0 + \varepsilon_2 Z^2 + \varepsilon_4 Z^4$$

$$\varepsilon_0 = \frac{h^2}{4} i\,[\Omega''(z) - \overline{\Omega''(z)}] + \frac{3}{32h} i\,[P'(z) - \overline{P'(z)} + \bar{z}\,P''(z) - Z\,\overline{P''(z)}] + \frac{h}{8} i\,[P'''(z) - \overline{P'''(z)}]$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{i}{4}[\Omega''(z) - \overline{\Omega''(z)}] - \frac{3}{32h^3} i\,[\overline{P'(z)} - P(z) + \bar{z}\,P''(z) - z\,\overline{P''(z)}] - \frac{3}{16h} i\,[P'''(z) - \overline{P'''(z)}]$$

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{16h^3} i\,[P'''(z) - \overline{P'''(z)}]$$

Odtod moremo po nekoliko dolgotrajnejšem računanju dobiti še vse tri izraze za pomike

$$D = u + i\,v = \sum_{\rho=0}^{\rho=5} D_\rho Z^\rho \tag{5}$$

$$w = \sum_{\rho=0}^{\rho=4} \omega_\rho Z^\rho \tag{6}$$

kjer so zopet izrazi D_k in w_k linearne funkcije analitičnih funkcij $P(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\Omega(z)$ in $\omega(z)$.

Izraz za D ima razen D_4 vse druge člene v splošnem različne od nič, medtem ko je v Kirchhoffovi teoriji $D = 0$. Izraz za w pa ima razen w_3 tudi vse člene različne od nič, kar v Kirchhoffovi teoriji velja le za w_0, ki se po Stevensonu glasi

$$2\,\mu\,w_0 = \left\{\frac{1-\nu}{8}[\bar{z}\,\Omega(z) + z\,\overline{\Omega(z)} + \omega(z) + \overline{\omega(z)}] + \frac{h^2}{2}[\Omega'(z) + \overline{\Omega'(z)}]\right\} + \frac{3}{32\,h}[\bar{z}\,P'(z) + z\,\overline{P'(z)}] + \frac{h}{4}[P''(z) + \overline{P''(z)}] - \frac{3(1-\nu)}{128\,h^3}[z^2\,\overline{P(z)} + \bar{z}^2\,P(z)] \tag{7}$$

Izraz v prvem oglatem oklepaju je značilen za Kirchhoffovo teorijo, drugi člen v zavitem oklepaju pa je Stevensonov dodatek skupaj s členi $w_1 Z$, $w_2 Z^2$ in $w_4 Z^4$. Podrobnosti teh izvajanj in posledice so podane v delih [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] in še različnih drugih domačih in tujih objavah istih avtorjev.

Če preskočimo študij oblike razpoložljivih štirih analitičnih funkcij, ki jih ob predpostavki o enoličnosti funkcije $P(z)$ omejuje le vedenje okrog lukenj plošče, ki je v bistvu podobno prvotnemu problemu stene oziroma plošče, tedaj moremo definirati dve skupini robnih problemov; v vsaki skupini sta po dve možnosti.

I. Določiti je treba analitični funkciji $\varphi(z)$ in $\psi(z)$ tako, da velja:

$$\varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + \alpha_1\,\overline{\varphi''(z)} = f_1(z) + \beta_k,\ z \in C_k \tag{8}$$

kjer je s $C = \bigcup C_k$ označena celotna ograja plošče. C_0 je zunanja ograja, C_k pa so ograje lukenj, ali

$$-\varkappa_1\,\varphi(z) + z\,\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + \alpha_2\,\overline{\varphi''(z)} = g_1(z),\ z \in C_k \tag{9}$$

II. Določiti je treba analitični funkciji $\Omega(z)$ in $\omega(z)$ tako, da velja

$$\Omega(z) + z\,\overline{\Omega'(z)} + \overline{\omega'(z)} + \alpha_3\,\overline{\Omega''(z)} = f_2(z),\ z \in C_k \tag{10}$$

ali

$$-\varkappa_2\,\Omega(z) + z\,\overline{\Omega(z)} + \overline{\omega'(z)} + \alpha_4\,\overline{\Omega''(z)} = g_2(z) + i\,\gamma_k\,z + \delta_k\,z \in C_k \tag{11}$$

kjer je $\gamma_k \in \mathbb{R}$ (realno število).

Tu so α_1, α_2, α_3 in α_4 znane konstante.

Pri tem morajo biti vse štiri iskane funkcije regularne v območju plošče. Prva možnost v prvi skupini problemov pomeni na ograji bočno obremenjeno ploščo kakor pri običajni steni, druga možnost pa predpisuje na ograji podana pomika u in v v srednji ravnini plošče. V drugi skupini pomeni prva možnost predpisan poves srednje ravnine in njegov odvod po normali ograje, na ograji plošče, druga možnost pa je na ograji obremenjena plošča s silo in momentom tako kakor je pri upogibu plošče v Kirchhoffovi teoriji. Določanje konstant β_k, γ_k in δ_k spada k reševanju ustreznega problema, ker ne morejo biti poljubne. Dokazati moremo, da obstaja pri poljubnih podatkih na desnih straneh zgornjih enačb rešitev problema, če vzamemo po eno možnost iz prve skupine in po eno iz druge. Tako dobimo štiri posplošene robne probleme upogiba plošče. Izkaže se, da so vsi štirje enolično rešljivi, če zanemarimo morebitni mali togi pomik vse plošče. Za izpričanje te trditve je treba dokazati najprej izreke o enoličnosti rešitve robnih problemov, nato pa še eksistenco. Zadnja je bila v že citirani literaturi izpričana za neskončno ploščo, če je le-ta nekajkrat prerezana vzdolž ravne črte.

Problem je bilo moč prevesti na znani Riemann-Hilbertov robni problem pri analitičnih funkcijah. Zato naj bo tokrat posvečeno nekaj besed problemu upogiba plošče z luknjami, katerih ploščina ni nična, torej luknje naj ne bodo zareze. V tem primeru je mogoče z majhno prilagoditvijo znane Šermanove poti [9] na preprost način pokazati eksistenco rešitve, po drugi strani pa ponuja ta način, ki je po mnenju avtorja daleč najlepši in najpreprostejši, izjemno možnost za numerično reševanje teh problemov. Celoten robni problem razpade vselej, kakor je razvidno iz definicije, na dva dela, ki ju rešujemo ločeno.

Za razrešitev prvega dela robnega problema izberemo za prvo možnost

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} + \sum_{k=1}^{k=n} A_k \ln(z-z_k) + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{b_k}{z-z_k} \tag{12}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{\mu(t)}\,dt + \mu(t)\,\overline{dt}}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\bar{t}\,\mu(t)\,dt}{(t-z)^2} - \sum_{k=1}^{k=n} \varkappa\,\bar{A}_k \ln(z-z_k) + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\bar{b}_k}{z-z_k} - \alpha_1\,\varphi''(z) \tag{13}$$

kjer je z_k poljubno izbrana točka znotraj luknje, ki jo omejuje krivulja C_k, konstante A_k so znane iz dane robne obremenitve, za b_k in β_k je treba vzeti

$$b_k = i\int_{C_k} [\mu(t)\,\overline{dt} - \overline{\mu(t)}\,dt] \tag{14}$$

$$\beta_k = \int_{C_k} \mu(t)\,ds \tag{15}$$

in $\mu(t)$, $t \in C = \bigcup_{k=0}^{k=n} C_k$ pa je iskana funkcija na ograji plošče. Celotna ograja C pa mora biti dovolj gladka.

Pri drugi možnosti pa vzamemo

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} + \sum_{k=1}^{k=n} A_k \ln(z-z_k) \tag{16}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{-\varkappa\,\overline{\mu(t)}\,dt + \mu(t)\,\overline{dt}}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\bar{t}\,\mu(t)\,dt}{(t-z)^2} - \sum_{k=1}^{k=n} \varkappa\,\bar{A}_k \ln(z-z_k) - \alpha_2\,\varphi''(z) \tag{17}$$

Tu pa konstant A_k ne poznamo in jih iščemo v obliki

$$A_k = \int_{C_k} \mu(t)\,ds \tag{18}$$

Pri drugem delu robnega problema pa so nastavki za funkciji $\Omega(z)$ in $\omega(z)$ pri prvi možnosti:

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\nu(t)\,\mathrm{d}t}{t-z} + \sum_{k=1}^{k=n}(A_k z + B_k)\ln(z-z_k) + \sum_{k=1}^{k=n}\frac{b_k}{z-z_k} \tag{19}$$

$$\omega'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{\nu(t)}\,\mathrm{d}t + \nu(t)\,\overline{\mathrm{d}t}}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{t}\,\nu(t)\,\mathrm{d}t}{(t-z)^2} + \sum_{k=1}^{k=n}\overline{B_k}\ln(z-z_k) + \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\overline{b_k}}{z-z_k} - \alpha_3\,\Omega''(z) \tag{20}$$

kjer moramo še pisati

$$A_k = \int_{C_k} Re[\nu(t)]\,\mathrm{d}s \tag{21}$$

$$b_k = \int_{C_k} Im[\nu(t)]\,\mathrm{d}s \tag{22}$$

$$B_k\,\overline{z_k} = \frac{1}{\pi i}\int_{C_k}\nu(t)\,\overline{\mathrm{d}t} \tag{23}$$

Druga možnost pa terja izbor

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\nu(t)\,\mathrm{d}t}{t-z} + \sum_{k=1}^{k=n}(A_k z + B_k)\ln(z-z_k) \tag{24}$$

$$\omega'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{-\varkappa\,\overline{\nu(t)}\,\mathrm{d}t + \nu(t)\,\overline{\mathrm{d}t}}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{t}\,\nu(t)\,\mathrm{d}t}{(t-z)^2} + \sum_{k=1}^{k=n}\overline{B_k}\ln(z-z_k) - \alpha_4\,\Omega''(z) \tag{25}$$

Tu so konstante A_k in B_k zaradi znanih robnih obremenitev znane, postavimo pa še

$$Re\left[-\frac{\varkappa+1}{2\pi i}\int_{C_k}\mathrm{d}\bar{z}\left(\lim_{\zeta\to z}\int_C\frac{\nu(t)\,\mathrm{d}t}{t-\zeta}\right) - \int_{C_k} g_0(z)\,\mathrm{d}z\right] = i\,\gamma_k\int_{C_k} z\,\mathrm{d}\bar{z} + 2\pi i(\overline{B_k}\,z_k - B_k\,\overline{z_k}) \tag{26}$$

$$\delta_k = \int_{C_k}\nu(t)\,\mathrm{d}s \tag{27}$$

V enačbah (26) je

$$g_0(z) = g(z) \quad g(A_k, B_k, z)$$

kjer pomeni $G(A_k, B_k, z)$ izraz na levi strani enačbe (11), narejen za tisti del napetostnih funkcij $\Omega(z)$ in $\omega(z)$, kjer se pojavljajo le logaritmi.

Enačba za določitev neznane funkcije, bodisi $\nu(t)$, bodisi $\mu(t)$, je vselej Fredholmove oblike druggega reda oziroma Šermanova, za katero se po znani metodologiji pokaže, da je enolično rešljiva za vsak podatek. Dokaz opuščamo. Za zgled zapišimo enačbo za $\nu(t)$ v prvem primeru. Označimo v ta namen

$$F(z) = F[\Omega(z), \omega(z)] = \Omega(z) + z\,\overline{\Omega'(z)} + \overline{\omega'(z)} - \alpha_3\,\overline{\Omega''(z)} \tag{28}$$

tedaj so v izrazih

$$F_1(z) = F[\Omega_1(z), \omega_1(z)] = F\left[\sum_{k=1}^{k=n}(A_k z + B_k)\ln(z-z_k),\ \sum_{k=1}^{k=n}\overline{B_k}\ln(z-z_k) - \alpha_3\,\Omega_1''(z)\right] \tag{29}$$

in

$$F_2(z) = F[\Omega_2(z), \omega_2(z)] = F\left[\sum_{k=1}^{k=n}\frac{b_k}{z-z_k},\ \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\overline{b_k}}{z-z_k} - \alpha_3\,\Omega_2''(z)\right] \tag{30}$$

neznani le koeficienti A_k, B_k in b_k, ki jih izrazimo z enačbami (21), (22) in (23). Če označimo z $\Omega_0(z)$ in $\omega'_0(z)$ tisti del izrazov $\Omega(z)$ in $\omega'(z)$ iz (24) in (25), kjer se pojavljajo integrali, tedaj velja z uporabo Plemljevih formul pri $\lim z = z_0 \in C$

$$S[\nu(z_0)] = \lim_{z\to z_0} F[\Omega_0(z), \omega_0(z)] = \nu(z_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_C \nu(t)\,\mathrm{d}\ln\frac{t-z_0}{\overline{t-z_0}} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \overline{\nu(t)}\,\mathrm{d}\frac{\overline{t-z_0}}{t-z_0} \tag{31}$$

Šermanova enačba za določitev funkcije $\nu(t)$ se tako glasi

$$S[\nu(z_0)] + F_1(z_0) + F_2(z_0) + i\,z_0\,\Phi[\nu(z_0)] = f_2(z_0) \tag{32}$$

V zgornji enačbi imamo korekcijski člen $\Phi[\nu(z_0)]$, ki pri problemu upogiba plošče odpade. Pomeni pa

za $z_0 \in C_0$: $\Phi[\nu(z_0)] = \mathrm{Re}\left[\int \frac{\nu(t)\,\mathrm{d}t}{t^2}\right]$

za $z_0 \in C_k$, $k > 0$: $\Phi[\nu(z_0)] = \{[w_0(\nu(\tau_k)) - w_0(\tau_k)] - [w_0(\nu(\tau_0)) - w_0(\tau_0)]\}$

kjer je $w_0(\nu(\tau_k))$ izraz, izračunan po formuli (7), v poljubno izbrani točki $\tau_k \in C_k$, $w_0(\tau_k)$ pa predpisana vrednost v isti točki.

Podobne enačbe dobimo pri drugačnih robnih zahtevah. Enačbe (32) so, kakor je že omenjeno, izredno ugodne za numerično vrednotenje, saj, kakor vidimo iz (29), (30) in (31), so njihova jedra elementarna. Pokazati moremo tudi naslednjo trditev: če konvergira po kaki numerični metodi dobljena rešitev $\nu(t)$ na nekem notranjem delu plošče k eksaktni rešitvi, tedaj konvergirata tudi $\Omega(z)$ in $\omega(z)$, dobljena po formulah (19) in (20) ali

(24) in (25), kjer za $\nu(t)$ vstavimo numerično dobljene približke, proti eksaktnim rešitvam enakomerno na istem delu plošče. Analogna trditev velja za odvode teh funkcij, seveda pa tudi za funkcije $\mu(t)$ ter $\varphi(z)$ in $\psi(z)$.

Zgornje izvajanje velja, če je plošča končna. Pri neskončnih ploščah se razmere nekoliko spremenijo, vendar ne bistveno.

3. POSPLOŠITVE STEVENSONOVEGA MODELA

Ker je Stevensonova teorija utemeljena na enem samem privzetku (1), si kaže ogledati mogoče posplošitve te zahteve in posledice, ki izhajajo odtod. Prvi korak v tej smeri je bil narejen v [10]. Tu imamo namesto enačbe (1) za izhodišče

$$\sigma_Z = \sum_{\rho=0}^{\rho=5} \sigma_\rho Z^\rho \qquad (33)$$

pri istih obremenitvenih pogojih, upoštevana pa je tudi prostorninska sila teže. Izkaže se, da je enačbi (33) mogoče eksaktno zadostiti, če je

$$\Delta_1{}^2\, q(x, y) = 0 \qquad (34)$$

Po povsem enaki poti kakor pri Stevensonu je mogoče eksaktno izraziti elemente napetostnega tenzorja in vse pomike s štirimi analitičnimi funkcijami $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\Omega(z)$, $\omega(z)$ in še z dvema $P_1(z)$ in $P_2(z)$, s katerima je mogoče popisati obremenitev $q(x, y)$. Odtod izhaja, da z zahtevo (33) moremo rešiti mnogo več problemov eksaktno kakor pa s Stevensonovo zahtevo (1). Robni problemi, ki se izražajo z enačbami (8 . . . 11), pa ostanejo povsem enaki. Leto kasneje se je isti avtor lotil problema posplošitve Stevensonovega modela s polinomskim nastavkom za σ_Z povsem splošno in problem dokončno razrešil. Rezultati so zaradi obširnosti objavljeni za zdaj v domači publikaciji [11]. Pokazano je, da je smiselno za σ_Z suponirati polinom lihe stopnje $n = 2N + 1$ glede na Z:

$$\sigma_Z = \sum_{\rho=0}^{\rho=n} \sigma_\rho(x, y) \, . \, Z^\rho \qquad (35)$$

Izrazi $\sigma_\rho(z)$ se izražajo z obremenitveno funkcijo $q(x, y)$, za katero velja

$$\Delta_1{}^N\, q(x, y) = 0 \qquad (36)$$

Funkcijo $q(x, y)$ je mogoče izraziti z analitičnimi funkcijami. Pri $n = 2N + 1$ jih rabimo N.

Čim obremenitev $q(x, y)$ ustreza enačbi tipa (36), je mogoče torej eksaktno izraziti elemente napetostnega tenzorja in vse pomike. Robni problemi pa ostanejo tudi tu takšni, kakor smo jih formulirali pri Stevensonovem modelu.

Ostane na koncu vprašanje praktične vrednosti posplošitve Stevensonovega modela. V strogem teoretičnem pomenu je napredek nesporen. Gre pa za kolikostno presojo rezultatov, dobljenih po kakšni posplošeni teoriji glede na prvotno Kirchhoffovo. V [11] je obravnavan primer

$$q(x, y) = q_0 \cdot \left(1 - \frac{z\bar{z}}{R^2}\right), \; q_0 = \text{const}$$

kjer je R polmer krožne plošče, položene s središčem v koordinatnem začetku. Kirchoffova teorija velja tu kakor vedno aproksimativno, za Stevensonov model zgornja zahteva ni dostopna, pač pa je eksaktno dostopna za posplošen model (33) oziroma (34). Po daljšem računanju je dobljena zanimiva formula:

$$\left| \frac{w_0(r = 0) - w_k(r = 0)}{w_k(r = 0)} \right| = \frac{18(8 - 38)}{35(1 - \nu)} \left(\frac{h}{R}\right)^2$$

Tu je w_k upogib srednje ravnine po Kirchhoffu. Če vzamemo $\nu = 0{,}3$ in $h = 0{,}1 \, . \, R$, tedaj je Kirchhoffov upogib za 5,2 % premajhen, pri $h = 0{,}15\, R$ pa že za 11,7 %. Z večanjem debeline plošče postaja Kirchhoffova teorija hitro nenatančna.

4. SKLEP

Z delom [11] je vsaj po mnenju pisca posploševanje Stevensonovega modela upogiba homogene izotropne ravne plošče končano v duhu posploševanja obremenitvene funkcije $q(x, y)$ s polinomskim nastavkom za σ_Z. Teoretična vrednost teh izvajanj je v tem, da moremo eksaktno zapisati elemente napetostnega tenzorja in vse pomike vselej, če je $q(x, y)$ poljuben polinom. Ta namreč vselej ustreza enačbi (36) pri dovolj visokem N. Robni problemi, ki jih moremo razrešiti, pa so že pri Stevensonovem modelu definirani v najširši mogoči obliki. Seveda je ostalo še nekaj nerešenih vprašanj pri prosto položeni plošči, o čemer v tem sestavku nismo govorili. V prihodnosti pa se obeta posploševanje v povsem drugi smeri, in sicer za plošče iz visoelastičnega materiala.

LITERATURA

[1] A. C. Stevenson: On the Equilibrium of Plates, Philos. Mag. 1942, London, pp 639—661.

[2] M. Muršič: Koncentracija napetosti na robovih lukenj v zmerno debelih elastičnih ploščah (disertacija) FNT, Ljubljana 1965.

[3] F. Brešar: Študij upogiba neskončne elastične plošče z ravnimi zarezami na eni premici (disertacija), Maribor 1978.

[4] B. Krušič: About some Properties of the Solving of the boundary-value problems of the bending of a plate by the improved theory, TAM 6, 1980.

[5] B. Krušič: Solving a mixed boundary value problem for the bending of a plate TAM 4, 1978.

[6] B. Štok: Reševanje robnih problemov upogiba neskončne plošče z metodo preslikave (disertacija) FS Ljubljana 1982.

[7] B. Krušič: Improved theory of bending of a simply supported plate, TPM 5, 1979.

[8] J. Lep: Tretji robni problem upogiba zmerno debele plošče, (disertacija), Maribor 1982.

[9] I. Babuška, K. Rektorys, F. Vyčichlo: Mattematische Elastizitaetstheorie der ebenen Probleme, Akademic Verlag — Berlin 1960.

[10] V. Kumperščak: Posplošitev Stevensonovega modela upogiba ravne homogene plošče z aplikacijami (disertacija), Maribor 1981.

[11] V. Kumperščak: Splošna rešitev osnovnih elastostatičnih enačb teorije plošč z analitičnimi funkcijami, Univerza v Mariboru 1982 (103 strani).

Avtorjev naslov: prof. dr. Bogdan Krušič, dipl. mat.
Fakulteta za strojništvo