

UDK 536.25/3:621.181.021

Uporaba postopka končnih elementov za določitev neustaljenih temperatur v ceveh parnih kotlov

A. ALUJEVIČ, Z. MUDRI, P. ŠKERGET, F. ZGAGA

1. UVOD

Za reševanje problemov določitve temperaturnega polja v ravninskih prerezi trdnih teles imamo na voljo postopke končnih razlik kakor tudi končne in robne elemente. Doslej smo pri nas izdelali programe za ustaljene temperaturne razmere s postopkoma MKE (metode končnih elementov) in MRE (metode robnih elementov), sedaj pa smo obdelali tudi nestacionarne razmere z MKE. Pri tem imamo trenutno v programu vdelane samo mejne pogoje prve in druge vrste (znana vrednost funkcije in njen normalni odvod), medtem ko bomo konvekcijske in sevalne pogoje upoštevali šele pri nadaljnjem razvoju programa. (Omenimo naj še, da smo celotni problem z vsakršnimi mejnimi pogoji po postopku MRE že razrešili in objavili v *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 76, No. 1, pp. 47—54, Amsterdam 1983.)

2. OSNOVE

Če ne upoštevamo notranjih virov toplote, je vodilna enačba prenosa toplote v neustaljenem stanju

$$\lambda \nabla^2 t = c \rho \dot{t} \quad (1)$$

kjer so t temperatura, λ toplotna prevodnost, c specifična toplota in ρ gostota snovi, medtem ko sta ∇^2 Laplaceov operator in $(\dot{})$ časovni odvod. H zgornji enačbi lahko priredimo ustrezen funkcional oblike

$$I = \frac{1}{2} \iint \{ \lambda [(t_x)^2 + (t_y)^2] + c \rho (t_t)^2 \} dx dy \quad (2)$$

ki mora imeti minimum, tj.

$$dI/dt = 0 \quad (3)$$

kjer je stolpec vozliščnih temperatur

$$\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_m\} \quad (4)$$

S postopkom končnih elementov izvedemo diskretizacijo področja prereza na trikotne končne elemente ter dobimo sistem enačb

$$\mathbf{K} \mathbf{t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{t}} = 0 \quad (5)$$

kjer sta matriki

$$\mathbf{K} = \sum \mathbf{D}^e \mathbf{K}^e \mathbf{D}^{e*} \quad (6)$$

in

$$\mathbf{C} = \sum \mathbf{D}^e \mathbf{C}^e \mathbf{D}^{e*} \quad (7)$$

konduktivna oz. kapacitivna matrika sistema, sestavljeni iz deležev posameznih elementov ($m, n = i, j, k$)

$$\mathbf{K}^e = \frac{\lambda^e A^e}{B_e} [E^e \delta_{mn} + (1 - \delta_{mn}) F^e] \quad (8)$$

kjer so

$$A^e = (\Delta x_{ij} \Delta y_{ik} - \Delta y_{ij} \Delta x_{ik})/2 \quad (9)$$

$$B_e = (\Delta x_{ij} \Delta y_{jk} - \Delta y_{ij} \Delta x_{jk})^2 \quad (10)$$

$$E^e = \Delta x_{m-1, n+1}^2 + \Delta y_{m-1, n+1}^2 \quad (11)$$

$$F^e = \Delta x_{m, m-1} \Delta x_{n+1, n} + \Delta y_{m, m-1} \Delta y_{n+1, n} \quad (12)$$

oziroma

$$\mathbf{C}^e = \frac{(\rho c)^e A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{(\rho c)^e A^e}{12} (1 + \delta_{mn}) \quad (13)$$

3. REŠEVANJE

Sistem enačb (5) prevedemo na sistem algebrajskih enačb v splošni obliki

$$\mathbf{M} \mathbf{t}^{k+1} = \mathbf{N} \mathbf{t}^k \quad (14)$$

na različne mogoče načine ekstrapolacije (reševanje navadnih diferencialnih enačb).

3.1 Eulerjev eksplisitni postopek

Uporabimo preprosto ekstrapolacijo

$$\mathbf{t}^{k+1} = \mathbf{t}^k + \Delta \tau \dot{\mathbf{t}}^k \quad (15)$$

in dobimo enačbo (14) v obliki

$$\mathbf{C} \mathbf{t}^{k+1} = (\mathbf{C} - \Delta \tau \mathbf{K}) \mathbf{t}^k \quad (16)$$

3.2 Crank-Nicolsonov srednji postopek

Uporabimo izboljšano ekstrapolacijo

$$\mathbf{t}^{k+1} = \mathbf{t}^k + \frac{1}{2} \Delta \tau (\dot{\mathbf{t}}^k + \dot{\mathbf{t}}^{k+1}) \quad (17)$$

in dobimo enačbo (14) v obliki

$$(\mathbf{C} + \frac{1}{2} \Delta \tau \mathbf{K}) \mathbf{t}^{k+1} = (\mathbf{C} - \frac{1}{2} \Delta \tau \mathbf{K}) \mathbf{t}^k \quad (18)$$

3.3 Povsem impliciten postopek

Uporabimo ekstrapolacijo v obliki

$$\mathbf{t}^{k+1} = \mathbf{t}^k + \Delta \tau \dot{\mathbf{t}}^{k+1} \quad (19)$$

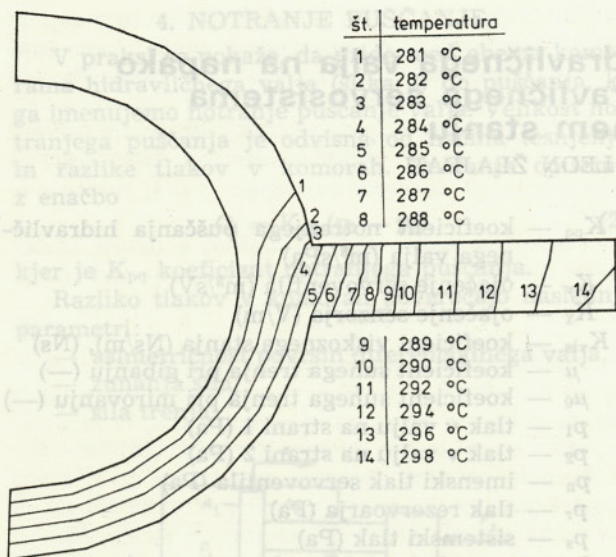
in dobimo enačbo (14) v obliki

$$(\mathbf{C} + \Delta \tau \mathbf{K}) \mathbf{t}^{k+1} = \mathbf{C} \mathbf{t}^k \quad (20)$$

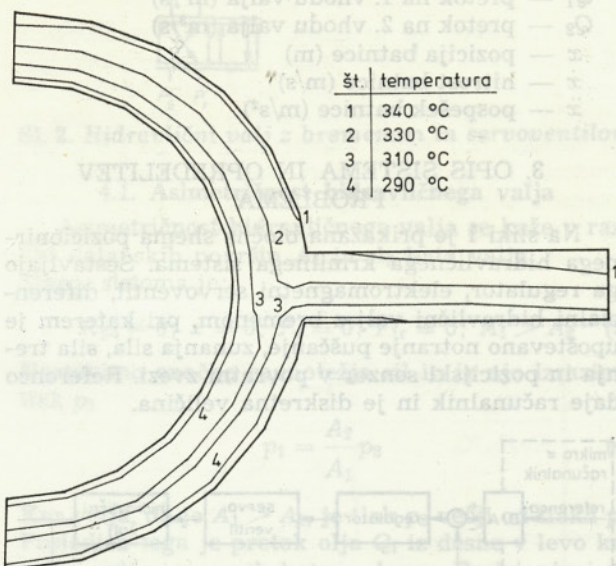
Vse omenjene različice lahko združimo v naslednjo obliko enačbe (14)

$$(\mathbf{C} + \Delta \tau \theta \mathbf{K}) \mathbf{t}^{k+1} = [\mathbf{C} - \Delta \tau (1 - \theta) \mathbf{K}] \mathbf{t}^k \quad (21)$$

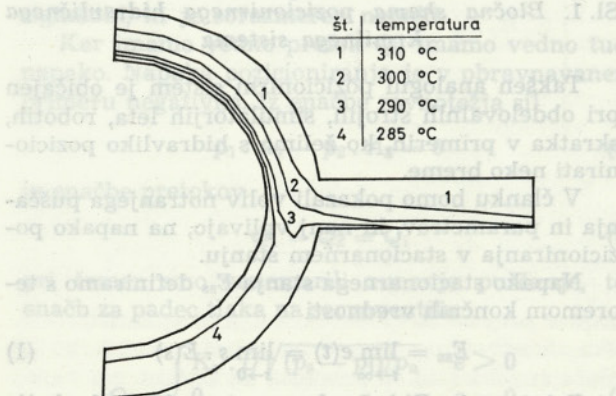
kjer je $\theta = 0$ pri Eulerju, $\theta = 0,5$ za Crank-Nicolsona ter $\theta = 1$ v implicitnem postopku. Dobljeno enačbo (21) rešujemo potem v korakih časa $\Delta \tau$ z Gaussovo eliminacijo. Upoštevamo pri tem mejne



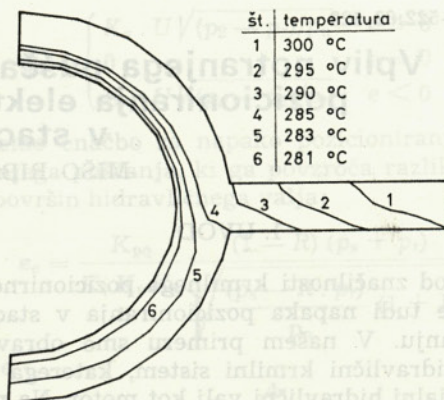
Sl. 7. Izoterme končnega stanja (po 7,2 s)



Sl. 8. Izoterme ohlajanja cevi (po 0,25 s)



Sl. 9. Izoterme ohlajanja cevi (po 0,75 s)



Sl. 10. Izoterme ohlajanja cevi (po 2,00 s)

stanja ohlajanja cevi so prikazana na slikah 8, 9 in 10, medtem ko je končno ustaljeno stanje enako kakor na sliki 7. Pri analizah smo upoštevali tudi izbiro reševalne metode ($0 \leq \theta \leq 1$), kakor tudi časovnega koraka ($0,2 \leq \Delta\tau \leq 0,5$ s), vendar vsega tega tukaj podrobno ne bomo podajali.

5. SKLEP

Z obravnavo neustaljenega prevajanja toplote po postopku končnih elementov smo analizirali uporabnost tega numeričnega orodja pri iskanju porazdelitve temperaturnega polja v prerezu stene cevi parnega kotla. Z dobljenimi rezultati smo lahko zadovoljni, saj smo s testiranjem programa potrdili, da daje dobre vrednosti. Ker pa program za zdaj dopušča samo uporabo temperaturnih in izolacijskih mejnih pogojev, bo dobro, če ga v prihodnje dopolnimo, tako da bo upošteval tudi konvektivne in sevalne mejne pogoje.

LITERATURA

- [1] G. E. Myers: Analytical Methods in Conduction Heat Transfer. McGraw-Hill, New York 1971.
- [2] A. Alujevič, B. Eysink, J. Head: TEMPEL program za izračunavanje temperaturnih polj. SV, 20, str. 161—164, Ljubljana 1974.
- [3] A. Alujevič, P. Škerget: Robni pogoji druge in tretje vrste v programu TEMPEL. SV, 24, str. 205—208, Ljubljana 1978.
- [4] A. Alujevič, P. Škerget, J. Head, B. Eysink: Finite element heat conduction in reactor solids. Atomkernenergie, 31, pp. 151—153, München 1978.
- [5] P. Škerget, A. Alujevič: Boundary element method in nonlinear transient heat transfer of reactor solids with convection and radiation on surfaces. Nuclear Engineering and Design, 76, pp. 47—54, Amsterdam 1983.
- [6] R. H. Page: Two-dimensional finite element solution of convective-dispersive equation and the groundwater flow-potential equation. Princeton University.
- [7] Z. Mudri: Diplomsko delo. VTS Maribor 1983.

Naslov avtorjev: red. prof. dr. Andro Alujevič, FINucE
Zdravko Mudri, dipl. ing.
viš. pred. mag. Polde Škerget, dipl. ing.
viš. pred. Franc Zgaga, dipl. ing.
Visoka tehniška šola
VTO strojništvo
Univerza v Mariboru