

UDK 539.374:539.22

Nekatere zakonitosti plastičnega tečenja anizotropnih stisljivih kovin

PETER LEŠ

V novejšem času, še posebej med drugo svetovno vojno in po njej, so izdelovalci začeli izdelovati izdelke iz kovinskega prahu, s čimer je metalurgija dozorela v novo tehnično in ekonomsko zelo pomembno tehnologijo [1].

Dandanes lahko pridobivamo skoraj vse kovine v obliki prahu, tj. v drobnih delcih, katerih velikost redko presega nekaj desetink milimetra. Kovinski prah uporabljamo povsod tam, kjer gre za izdelke ali materiale [2], ki jih drugače sploh ne moremo izdelati, kakor tudi tam, kjer je običajna metalurška pot (npr. z litjem) sicer mogoča, daje pa slabše pričakovane rezultate, in nazadnje povsod tam, kjer je uparaba prahu zaradi prihranka materiala ali delovnega časa gospodarsko upravičena v primerjavi z drugimi tehnološkimi postopki.

S prašno tehnologijo lahko tudi kovine in druge materiale z visokimi tališči gospodarno predelujemo v izdelke z določeno obliko in lastnostmi, zato je včasih ugodna razdelitev prašne tehnologije v trdo in mehko. V mehko tehnologijo spada predvsem predelava železnih in neželeznih kovin, ki jih lahko po sintranju še nadalje preoblikujemo, medtem ko spadajo v trdo tehnologijo izdelki, s katerimi mehansko obdelujemo druge materiale; to pa so karbidne trdine. Železne in neželezne kovine je mogoče preoblikovati s prašno tehnologijo v oblikovno zapletene izdelke, in to z veliko mersko in površinsko natančnostjo.

V zadnjem desetletju so polizdelki, izdelani iz kovinskega prahu, postali ponovno zelo zanimivi, ne samo zaradi gospodarnejšega pridobivanja zapletenih oblik, ki se kažejo v prihrankih pri energiji, materialu in času izdelave, temveč predvsem zaradi možnosti nadaljnje predelave v končne izdelke z velikimi trdotami, trdnostnimi in drugimi mehanskimi lastnostmi. Mnogi avtorji so zato poskušali tudi teoretično obravnavati zakonitosti pri plastičnem tečenju stisljivih, tj. poroznih (sintranih) snoveh.

Porozne snovi se pri plastičnem preoblikovanju nekoliko stisnejo, pri čemer nastanejo trajne spremembe prostornine. Iz tega izhaja, da mora pogoj o plastičnem tečenju obsegati še dodatni matematični izraz, ki poleg napetostnega deviatorja $\mathcal{J}_2$ in hidrostatskega tlaka vpliva na začetek plastičnega tečenja, to pa tudi pomeni, da mora že prva invarianta napetostnega tenzorja J_1 obsegati pogoje za plastično stanje. Novejše teoretične razlage o plastičnem tečenju za porozne snovi [1, 2, 3, 5, 6] so to tudi upoštevale. Avtorji izhajajo iz plastičnega potenciala

$$F = f(J_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3) \quad (1)$$

in dobijo z enačbo plastičnosti

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2)$$

novo obliko

$$d\varepsilon'_{ij} = d\lambda \left(\frac{\partial F}{\partial \mathcal{J}_2} \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \mathcal{J}_3} \frac{\partial \mathcal{J}_3}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (3)$$

ter srednjo parcialno deformacijo

$$d\varepsilon_m = d\lambda \left(\frac{\partial F}{\partial J_1} \right) + \frac{df}{dJ_1} dJ_1 \quad (4)$$

oziroma

$$d\varepsilon_m = \frac{df}{dJ_1} dJ_1 \quad (5)$$

pri čemer je srednja deformacija $\varepsilon_m = f(J_1)$ enaka

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (6)$$

Teoretično obravnavanje enačbe (4) in s preizkusi določene deformacije kažejo, da Misesov pogoj o pojavu plastičnega tečenja ($\mathcal{J}_2 - k^2 = 0$ oz. $3\mathcal{J}_2 - k_t^2 = 0$) velja le približno, in to tem bolj natančno, čim bolj gre poroznost proti nič.

Avtorji [1, 2, 3, 5], ki so teoretično obravnavali pogoje za pojav plastičnega tečenja, so razvili svoje zakone o plastičnem tečenju.

Tako je Kuhn [2] s svojimi sodelavci predlagal, naj velja naslednji pogoj o pojavu plastičnega tečenja

$$3\mathcal{J}_2 - (1 - 2\nu) J_2 = k_t^2, \quad (7)$$

kjer pomenijo $\mathcal{J}_2$ drugo invarianto napetostnega deviatorja, J_2 drugo invarianto napetostnega tenzorja, k_t — deformacijsko napetost porozne snovi, ν je Poissonovo število, ki se pri enoosnem tlačnem preizkusu določi iz enačbe

$$\nu = - \frac{d\varphi_d}{d\varphi_h} \quad (8)$$

pri čemer sta $\varphi_d = \ln \frac{d}{d_0}$ in $\varphi_h = \ln \frac{h}{h_0}$. Ker pa je

Poissonovo število pri nestisljivih snoveh $\nu = 0,5$, dobi enačba (7) ponovno obliko Misesove enačbe.

Kuhn je tudi predlagal, da se Poissonovo število za sintrane kovine dobi z enoosnim tlačnim preizkusom po enačbi

$$\nu = 0,5 \varrho^a_{rel} \quad \text{oz.} \quad \nu = 0,5(1 - p)^a \quad (9a, b)$$

pri čemer je relativna gostota porozne snovi

$$\varrho_{\text{rel}} = (1 - p) = \left(1 - \frac{V_p}{V}\right) = \frac{\varrho_p}{\varrho_0} \quad (10)$$

Poroznost dobimo iz prostorninskih delov $p = \frac{V_p}{V}$, ϱ_p je gostota porozne kovine, ϱ_0 pa gostota osnovne kovine.

V enačbi (9a, b) pomeni eksponent a določeno številčno vrednost (od 1 do 5), ki je odvisen od vrste in toplotnega stanja poroznega materiala.

Z enačbama $\mathcal{J}_2 = J_2 + \frac{1}{3} J_1^2$ in $\mathcal{J}_2 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \cdot \sigma'_{ij}$ lahko pogoj o plastičnem tečenju (7) zapišemo v naslednji obliki

$$2(1 + \nu) \mathcal{J}_2 + \frac{1}{3}(1 - 2\nu) J_1^2 = k_f^2 \quad (11)$$

Če v tej enačbi pišemo za $\frac{1}{3}(1 - 2\nu) = \alpha$ (12) dobimo z enačbo (9a, b) za α

$$\alpha = \frac{1}{3}(1 - 2(0,5(1 - (1 - p)^2))) = \frac{1}{3}(1 - (1 - p)^2) \quad (13)$$

zato je tedaj pogoj o plastičnem tečenju

$$3(1 - \alpha) \mathcal{J}_2 + \alpha J_1^2 = k_f^2 \quad (14)$$

oziroma

$$F(\sigma_{ij}) = \mathcal{J}_2 + \frac{\alpha}{3(1 - \alpha)} J_1^2 = \frac{k_f^2}{3(1 - \alpha)} \quad (15)$$

Enačbe plastičnosti, ki povezujejo deformacijske hitrosti in napetosti za porozne snovi, lahko za glavni koordinatni sistem zapišemo v naslednji obliki

$$d\varepsilon_i = d\lambda \left(\sigma_i - \sigma_m + \frac{2\alpha}{1 - \alpha} \sigma_m \right) \quad i = 1, 2, 3 \quad (16)$$

Proporcionalni faktor $d\lambda$ lahko določimo z izločenjem napetosti iz (15) in (16)

$$d\lambda = \frac{1 - \alpha}{k_f} \left(\frac{3E'_2}{1 - \alpha} + \frac{E_1^2}{4} \right)^{1/2} \quad (17)$$

pri čemer pomeni E'_2 drugo invarianto hitrosti deformacijskega deviatorja

$$E'_2 = \frac{1}{6}((d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2) \quad (18)$$

E_1 je prva invarianta hitrosti deformacijskega tenzorja:

$$E_1 = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 \quad (19)$$

Za nestisljive snovi je $\nu = 0,5$, zato izhaja iz enačbe (12) $\alpha = 0$ in tako dobimo iz enačb (16) ponovno Misesov zakon o plastičnem tečenju, pri čemer gre koeficient $d\lambda \rightarrow \sqrt{3E_2}/k_f$, upoštevati pa moramo še, da gre pri nestisljivih snoveh $E'_2 \rightarrow E_2$ in $E_1 \rightarrow 0$.

V svojem izvajanju zakonitosti plastičnega tečenja izhaja Green [3] iz togega idealno plastičnega telesa, ki je po obliki votla krogla, in postavlja, da sta za stisljive snovi dve ekstremni napetosti, tj. čisti strig ($\sigma_1 = -\sigma_3$, $\sigma_2 = 0$ zato je $J_1 = 0$) in čisti hidrostatski tlak ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, zato je $\mathcal{J}_2 = 0$) zelo pomembni.

Pogoj za pojav trajne deformacije pri strižni obremenitvi je podal v naslednjem zapisu

$$k_{f0} = 3\mathcal{J}_2 \left(\frac{3 - 2\nu^{1/4}}{3(1 - \nu^{1/4})} \right)^2 \quad (20)$$

pri čemer je k_{f0} deformacijska napetost osnovnega materiala. Pogoj za pojav trajne deformacije v primeru čistega hidrostatskega tlaka pa je

$$-k_{f0} = -\sqrt{3} \quad k_0 = \frac{J_1}{2 \ln p} \quad (21)$$

Za poljubna vmesna napetostna stanja velja kombinacija enačb (20 in 21), iz česar izhaja pogoj za pojav trajne deformacije

$$k_{f0}^2 = 3\mathcal{J}_2 \left(\frac{3 - 2\nu^{1/4}}{3(1 - \nu^{1/4})} \right)^2 + \frac{1}{4(\ln p)^2} J_1^2 \quad (22)$$

Za enoosno napetostno stanje, ko sta $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ in $\sigma_1 = k_f$, dobimo (z upoštevanjem, da je $J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = k_f$) pogoj za pojav trajne deformacije v naslednji obliki

$$k_{f0}^2 = k_f^2 \left(\left(\frac{3 - 2\nu^{1/4}}{3(1 - \nu^{1/4})} \right)^2 + \frac{1}{4(\ln p)^2} \right) \quad (23)$$

Če zadnji izraz vstavimo v enačbo (22), dobimo ponovno pogoj za pojav plastičnega stanja enačbo (15), pri čemer upoštevamo, da je koeficient α sedaj

$$\alpha = \frac{9(1 - \nu^{1/4})^2}{4(\ln p)^2 (3 - 2\nu^{1/4})^2 + 9(1 - \nu^{1/4})^2} \quad (24)$$

Enačbo plastičnosti za porozne snovi lahko zapišemo tudi v naslednji obliki:

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \left(\sigma'_{ij} + \frac{2\alpha}{3(1 - \alpha)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (25)$$

kjer za $d\lambda$ vstavimo enačbo (17).

Za popolnejši opis plastičnega tečenja stisljivih snovi potrebujemo še tri ravnovesne enačbe ($\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$) ter kontinuitetno enačbo (ki jo lahko izvedemo iz konstantnosti mase $m = \rho V = \text{const}$) po naslednjem zapisu

$$d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = -\frac{d\rho}{\rho} \quad (26)$$

Če Poissonovo število izračunamo iz (25) in pri tem upoštevamo, da je $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, dobimo

$$\nu = -\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{1}{2}(1-3\alpha) \text{ zato je } \alpha = \frac{1}{3}(1-2\nu)$$

Iz mejnih vrednosti za Poissonovo število (ν mora biti med vrednostjo 0 — nobenih prečnih deformacij in med vrednostjo 0,5 — prečne deformacije so tako velike, kakor pri nestisljivih kapljevinah) dobimo za koeficient α vrednost med

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3} \quad (27)$$

Če v enačbi (15) upoštevamo, da je $k_t = \sqrt{3}k$, tedaj jo lahko zapišemo v obliki

$$k^2 = 3(1-\alpha) \mathcal{J}_2 + \alpha J_1, \quad (28)$$

ki je pogoj za pojav plastičnega tečenja za porozne snovi.

Teorije o plastičnem tečenju stisljivih snovi se razlikujejo samo v faktorju α , ki je odvisen od poroznosti oziroma od relativne gostote, $\alpha = f(\rho_{rel})$.

Faktor $\alpha = 0$ je za $\rho_{rel} = 1$, za $\rho_{rel} = 0,5$ pa doseže po različnih teorijah vrednosti od 0,1 do 0,25.

Pogoj za plastičnost (28) obsega prvo invarianto napetostnega tenzorja J_1 , ki ustreza hidrostaticnemu deležu, kar pomeni, da velja enačba tudi v primeru čistega hidrostaticnega napetostnega stanja. Samo v posebnem primeru, ko je $\alpha = 0$ (za $\rho_{rel} = 1$) se enačba spremeni v znano Missesovo enačbo za nestisljive snovi.

Enačbo (16) lahko za cilindrični koordinatni sistem ($i = r, z, \vartheta$) zapišemo v obliki:

$$\dot{\varepsilon}_i = \lambda^* \left(\sigma_i - \sigma_m + \frac{2\alpha}{1-\alpha} \sigma_m \right), \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda^* \cdot \tau_{ij} \quad (29)$$

pri čemer je proporcionalni faktor za porozne snovi

$$\lambda^* = \frac{1}{k_t} \left(3(1-\alpha) \cdot E'_2 + \frac{1-\alpha}{4\alpha} E_1^2 \right)^{1/2} \quad (30)$$

Prva in druga invarianta hitrosti deformacijskega tenzorja dobiva novo obliko

$$E_1 = \dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\vartheta + \dot{\varepsilon}_z \\ E_2 = \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_r^2 + \dot{\varepsilon}_\vartheta^2 + \dot{\varepsilon}_z^2) + \dot{\varepsilon}_{rz}^2 \quad (31)$$

medtem ko je druga invarianta hitrostnega deviatorja

$$E'_2 = E_2 + \frac{1}{3} E_1^2 \quad (32)$$

Enačba kontinuitete dobi za porozne snovi novo obliko:

$$\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\vartheta + \dot{\varepsilon}_z + \frac{\dot{\rho}}{\rho} = 0 \quad (33)$$

oziroma:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} = 0$$

ali tudi:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = 0 \quad (34)$$

V tej enačbi pomeni zadnji sumand delež spremembe gostote.

Če izračunavamo komponente hitrosti v_r in v_z iz podane tokovne funkcije $\psi(r, z)$, dobimo ponovno enačbe za posamezne hitrosti v obliki

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \dot{\varepsilon}_\vartheta = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \\ \dot{\varepsilon}_{rz} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (35)$$

Enačbe (35) so bile razvite v prejšnjem članku.*

Če pa so deformacijske hitrosti podane kot funkcije časa, lahko primerjalne deformacije izračunamo iz deformacijskih hitrosti po naslednji zvezi

$$\varepsilon_{prim} = \int_{t_0}^t \dot{\varepsilon}_{prim} dt \quad (36)$$

* Leš, P.: Povezava med deformacijami, deformacijskimi hitrostmi in napetostmi v plastičnem področju za anizotropne in nestisljive materiale. SV 1983/7—9.

LITERATURA

- [1] Shima S., Oyane M.: Plasticity theory for porous metals. Int. J. Mechanical Science, 1976, Vol. 18. (Str. 285—291).
- [2] Kuhn H. A., Downey C. L.: Deformation Characteristics and plasticity theory of sintered powder materials. Int. J. of powder met. 7 (1971) 1, (str. 15—25).
- [3] Green R. J.: A plasticity theory for porous solids. Int. J. mech. Sci., 1972, Vol. 14. (Str. 215—224).
- [4] Leš P.: Hladno preoblikovanje sintranih materialov. XI. Savetovanje za proizvodstveno mašinstvo, Ohrid, 1977.
- [5] Shima S., Kawakami T.: Upper bound theory for deformation of porous materials, The Osaka Institute of Technology, Omiya, Asahiku, Osaka, Mem. Fac. ENG. Kyoto (Univ.) 38 (3). (Str. 117—137), 1976.
- [6] Leš P., Alujevič A.: Povezanost između naprezanja i deformacija u plastičnom području za izotropne nekompresibilne materije, Obrada deformisanjem u mašinstvu br. 6, (str. 26—34), Novi Sad 1980.

Avtorjev naslov: izr. prof. dr. Peter Leš, mag. dipl. ing.
Visoka tehniška šola v Mariboru