

UDK 532.542.2

Določevanje pretočnih razmer v kanalih s postopkom robnih elementov

POLDE ŠKERGET — ANDRO ALUJEVIČ

1. UVOD

V lanskem razpravi (SV 1983/10-12) smo podali osnove izračuna pretočnih razmer v kanalih po metodi robnih elementov. Medtem nam je uspelo v okviru raziskovalne naloge (usmerjeni program jedrske energetike) izdelati in iztestirati računalniški program, ki vrednoti hitrostno in vrtnično polje v ravninskih prerezihi notranjih kanalov z laminarnim viskozno nestisljivim fluidom. Neodvisno pa smo z robnimi elementi rešili tudi energijsko enačbo za konvekcijo toplote v laminarnem toku, o čemer smo prav tako že poročali (SV 1984/1-3). Tako smo zaokrožili celotno rešitev raziskovalne naloge, kar pomeni jedro doktorske disertacije P. Škergeta na Univerzi v Mariboru. V pričujočem prispevku dajemo nekatere konkretne rezultate.

2. VODILNA ENAČBA

Časovno neodvisen tok viskozne nestisljive tekočine opišemo z Navier-Stokesovimi enačbami in zakonom ohranitve snovi

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (1)$$

ozir.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

kjer pomenijo p — tlak, ρ — gostoto, ν — kinematično viskoznost in $\mathbf{v}$ — vektor hitrosti. Z vrtničnostjo

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (3)$$

razdelimo problem toka na kinematični del, ki podaja zvezo med vrtničnim in hitrostnim poljem, ter kinetični del, ki je opisan z linearno transportno enačbo vrtničnosti

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (4)$$

Diskretna oblika integralske enačbe vrtničnosti

S postopkom robnih elementov dobimo za vsa mejna vozlišča sistem enačb

$$\mathbf{c}(\xi) \mathbf{W}(\xi) + \bar{\mathbf{H}}_n \mathbf{W} = \mathbf{G} \mathbf{Q} - \frac{1}{\nu} (\mathbf{C}_x \mathbf{W} \mathbf{V}_x + \mathbf{C}_y \mathbf{W} \mathbf{V}_y - \mathbf{D}_x \mathbf{W} \mathbf{V}_x - \mathbf{D}_y \mathbf{W} \mathbf{V}_y) \quad (5)$$

ozioroma za neznane normalne odvode vrtničnosti na robu kanala

$$\mathbf{G} \mathbf{Q} = \mathbf{H}_n \mathbf{W} + \frac{1}{\nu} (\mathbf{C}_x \mathbf{W} \mathbf{V}_x + \mathbf{C}_y \mathbf{W} \mathbf{V}_y - \mathbf{D}_x \mathbf{W} \mathbf{V}_x - \mathbf{D}_y \mathbf{W} \mathbf{V}_y) \quad (6)$$

medtem ko vrtničnost v območju izračunamo eksplicitno

$$\mathbf{W}(\xi) = -\bar{\mathbf{H}}_n \mathbf{W} + \mathbf{G} \mathbf{Q} - \frac{1}{\nu} (\mathbf{C}_x \mathbf{W} \mathbf{V}_x + \mathbf{C}_y \mathbf{W} \mathbf{V}_y - \mathbf{D}_x \mathbf{W} \mathbf{V}_x - \mathbf{D}_y \mathbf{W} \mathbf{V}_y) \quad (7)$$

kjer je c — konstanta, $\mathbf{H}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ pa pomenijo ustrezne matrične zveze ozir. njihove odvode v smereh x in y ter n (normala).

Diskretna oblika integralske enačbe hitrosti

V postopku z robnimi elementi za vsa mejna vozlišča dobimo sistem enačb

$$\mathbf{c}(\xi) \mathbf{V}_x(\xi) + \bar{\mathbf{H}}_n \mathbf{V}_x = \mathbf{H}_t \mathbf{V}_y - \mathbf{D}_y \mathbf{W} \\ \mathbf{c}(\xi) \mathbf{V}_y(\xi) + \bar{\mathbf{H}}_n \mathbf{V}_y = -\mathbf{H}_t \mathbf{V}_x + \mathbf{D}_x \mathbf{W} \quad (8)$$

kjer so robne hitrosti v normalni in v tangencialni smeri

$$\mathbf{V}_n(S) = \mathbf{V}_x(S) n_x(S) + \mathbf{V}_y(S) n_y(S) \\ \mathbf{V}_t(S) = \mathbf{V}_x(S) t_x(S) + \mathbf{V}_y(S) t_y(S) \quad (9)$$

Iz pogoja, da je tangencialna hitrost, izračunana iz enačb (8), enaka predpisani tangencialni hitrosti v robnih vozliščih, izpeljemo sistem enačb za neznane robne vrednosti vrtničnosti. Hitrost v območju izračunamo eksplicitno

$$\mathbf{V}_x(\xi) = -\bar{\mathbf{H}}_n \mathbf{V}_x + \mathbf{H}_t \mathbf{V}_y - \mathbf{D}_y \mathbf{W} \\ \mathbf{V}_y(\xi) = -\bar{\mathbf{H}}_n \mathbf{V}_y - \mathbf{H}_t \mathbf{V}_x + \mathbf{D}_x \mathbf{W} \quad (10)$$

3. ROBNi ELEMENTI

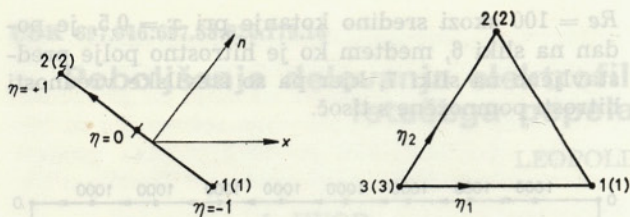
Linearni robni elementi in notranje celice

Daljični elementi s krajnimi ter trikotne celice z vogalnimi vozli uporabljajo naslednje interpolacijske funkcije

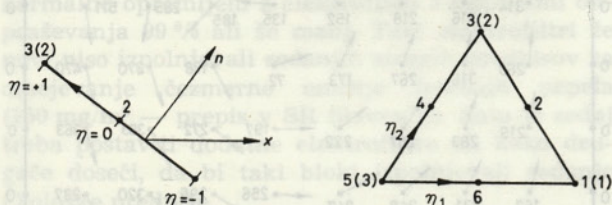
$$\Phi = \left\{ \frac{1}{2}(1 - \eta), \frac{1}{2}(1 + \eta) \right\} \quad (11)$$

$$\Psi = \{ \eta_1, \eta_2, 1 - \eta_1 - \eta_2 \} \quad (12)$$

kjer so η — daljične, η_i — pa površinske koordinate.



Sl. 1. Linearni element in celica



Sl. 2. Kvadratni element in celica

Kvadratni robni elementi in notranje celice

Daljšni (ravni) elementi in trikotne celice s po tremi ozir. šestimi vozlišči uporabljajo naslednje interpolacijske funkcije

$$\Phi = \left\{ \frac{1}{2}\eta(\eta-1), 1-\eta^2, \frac{1}{2}\eta(\eta+1) \right\} \quad (13)$$

$$\Psi = \left\{ \eta_1(2\eta_1-1), 4\eta_1\eta_2, \eta_2(2\eta_2-1), 4\eta_2\eta_3, \right. \\ \left. \eta_3(2\eta_3-1), 4\eta_3\eta_1 \right\} \quad (14)$$

4. POTEK REŠEVANJA

Enačbi (8) in (9) zapišemo v obliki sistema neznanih robnih vrednosti vrtničnosti ob predpostavljene začetni porazdelitvi vrtničnosti v območju. Sledi eksplicitni izračun komponent hitrosti v območju z enačbo (10). Nato razrešimo sistem (6) za odvode in nazadnje še eksplicitno določimo vrtničnost v območju z enačbo (7). Zaradi nelinearnosti moramo reševanje izvajati iterativno z relaksacijo

$$W^{k+1} = K W^{k+1} + (1-K) W^k \quad (15)$$

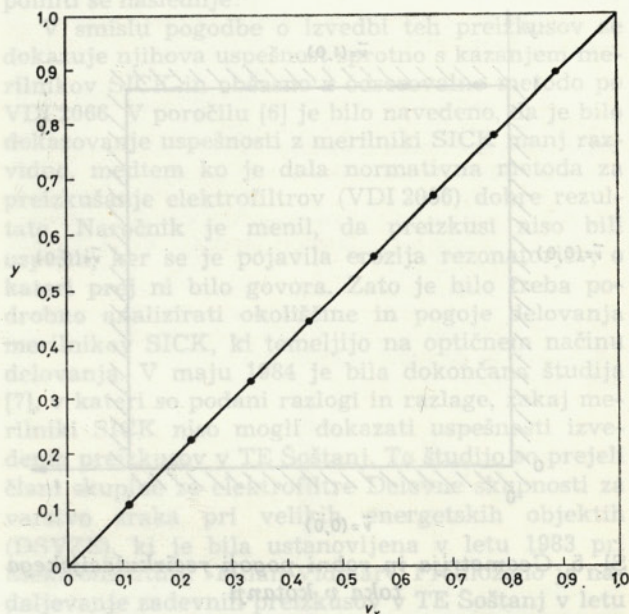
kjer je količnik K odvisen od Reynoldsovega števila. Večja vrednost števila Re zahteva manjši relaksacijski količnik. Velja splošna ugotovitev, da moramo zmanjšati vrednost K , če rešitev ne konvergira. Konvergenca je dosežena, ko je izpolnjen kriterij

$$\max |W^{k+1} - W^k| / \max |W^{k+1}| < \varepsilon \quad (16)$$

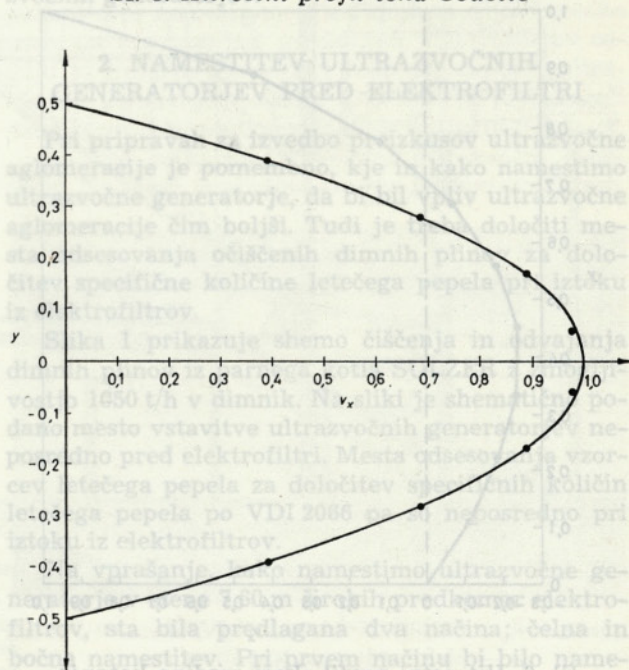
kjer je ε poljubno majhno število (npr. med 10^{-5} in 10^{-6}). Število iteracij je prav tako močno odvisno od Reynoldsovega števila.

5. REŠENI PRIMERI

Tok Couette: Obdelali smo preprost primer toka med dvema vzporednima stenama, od katerih se zgornja giblje s hitrostjo $v_x = 1$, medtem ko spodnja miruje. Problem je enoizmeren in ima znano natančno rešitev. Numerični rezultati (slika 3) se dobro ujemajo z analitično rešitvijo v celotnem razponu Reynoldsovih števil ($Re = 1/\nu = 1, 10, 100, 1000, 2000$), saj so praktično enaki natančni rešitvi.



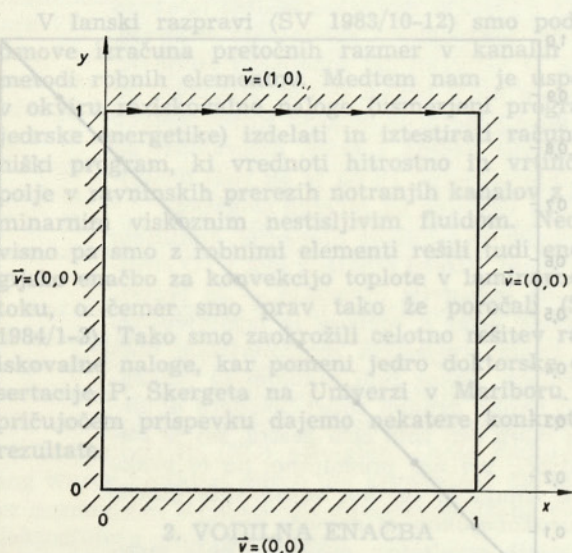
Sl. 3. Hitrostni profil toka Couette



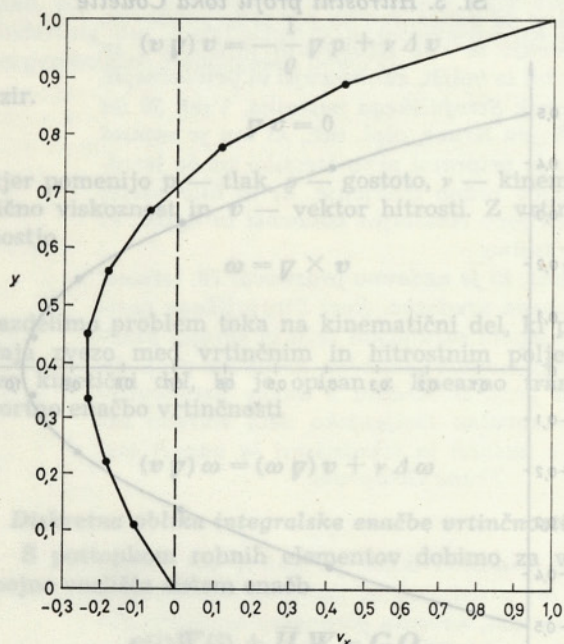
Sl. 4. Hitrostni profil toka Poiseuille

Tok Poiseuille: Primer je podoben prejšnjemu, vendar mirujeta obe steni. Znana je natančna rešitev, tj. parabolični hitrostni profil. Numerična rešitev (slika 4) za celoten obseg Reynoldsovih števil se tudi tu zelo dobro ujema z analitično rešitvijo.

Recirkulacijski tok: Ovrednotili smo kroženje toka v kotanji, ki je povzročeno z gibanjem zgornje stene s stalno hitrostjo $v_x = 1$, na vseh preostalih stenah pa je predpisana hitrost $v_x = v_y = 0$ (slika 5). Numerični rezultati, tj. hitrostni profil za

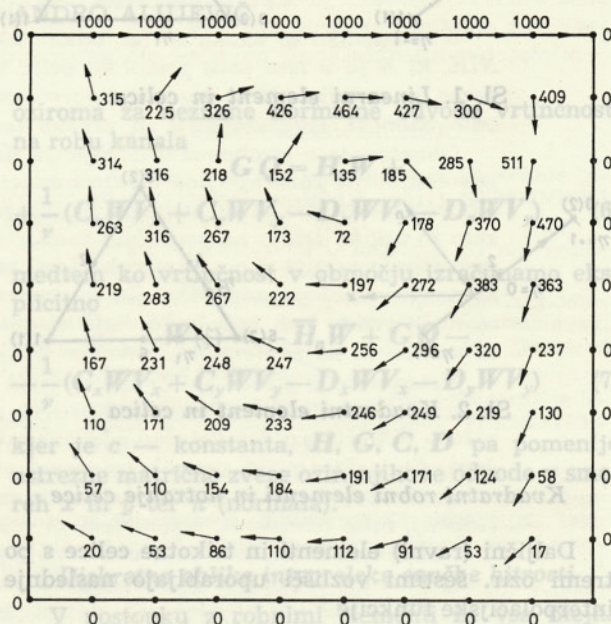


Sl. 5. Geometrija in robni pogoji recirkulacijskega toka v kotanji



Sl. 6. Hitrostni profil skozi sredino kotanje ($Re = 100$)

$Re = 100$ skozi sredino kotanje pri $x = 0,5$, je podan na sliki 6, medtem ko je hitrostno polje predstavljeno na sliki 7, kjer pa so številске vrednosti hitrosti pomnožene s tisoč.



Sl. 7. Hitrostno polje v kotanji

6. SKLEP

V prispevku smo podali pregled zmožnosti svojega računalniškega programa za ovrednotenje prečnih razmer v laminarnem viskoznom, nestisljivem toku fluida. Delo je bilo zasnovano med izpopolnjevanjem P. Škergeta v Southamptonu, končano pa z delom v Računalniškem centru Univerze v Mariboru na novoinstaliranem stroju VAX. Avtorja se zahvalujeta prof. dr. C. A. Brebbii za vzpodbudo in pomoč.

7. VIRI

- [1] P. Škerget, A. Alujevič: Robna integralska metoda za tokove viskoznih nestisljivih fluidov. *Strojniški Vestnik*, 29, 199—203, Ljubljana 1983
- [2] P. Škerget, A. Alujevič: Robni elementi za konvekcijo toplote v ustaljenem laminarnem toku. *Strojniški Vestnik*, 30, 7—9, Ljubljana 1984
- [3] P. Škerget: Robni elementi za laminaren tok viskozne nestisljive tekočine. Poročilo, sestavni del raziskovalne naloge C2-0165/795, VTŠ Maribor 1983
- [4] P. Škerget: Doktorska disertacija. VTŠ Maribor 1984

Naslov avtorjev: Viš. pred. dr. Polde Škerget, dipl. ing.
Red. prof. dr. Andro Alujevič, FINuCE
Visoka tehniška šola
VTO strojništvo
Univerza v Mariboru