UDK 536.21

Anizotropen prevod toplote v trdninah z robnimi elementi

ANDRO ALUJEVIČ — POLDE ŠKERGET — IVAN ŽAGAR

1. Teorija

Ker je toplotna prevodnost λ trdnih teles dostikrat različna v posameznih pravokotnih smereh x_i, moramo kartezično diferencialno enačbo ustaljenega prevajanja toplote z izviri f v območju Ω(s) z mejo Γ(S) zapisati v obliki

$$\sum \lambda_i\, \partial^2 T/\partial x_i^2 + f = 0$$

vendar jo lahko s substitucijo $z_i = x_i/\sqrt{\lambda_i}$ prevedemo v

$$\sum \partial^2 T/\partial z_i^2 + f = 0$$

ki ji ustreza integralska enačba, rešljiva s postopkom robnih elementov

$$c(\xi)\, T(\xi) + \int T(\mathrm{S})\, q^*(\xi, S)\, \mathrm{d}\Gamma(S) = \\ = \int q(\mathrm{S})\, T^*(\xi, S)\, \mathrm{d}\Gamma(\mathrm{S}) + \int f(\mathrm{s})\, T^*(\xi, \mathrm{s})\, \mathrm{d}\Omega(\mathrm{s})$$

kjer so c značilna konstanta (1/2 na gladki meji), T temperatura, $q = \partial T/\partial n$ toplotni tok v smeri zunanje normale, medtem ko je T^* fundamentalna rešitev singularne diferencialne enačbe

$$\sum \lambda_i\, \partial^2 T^*/\partial x_i^2 + \delta = 0$$

in je δ Diracova impulzna funkcija. Iz literature [1], [2] dobimo v izotropnem primeru ($m = 2{,}3$ za ravninski oziroma prostorski primer)

$$T^* = 1/(2(m-1)\,\pi) \cdot ((m-2)/r + (3-m)\ln(1/r))$$

kjer je $r = \left(\sum_{1}^{m} x_i^2\right)^{0{,}5}$

razdalja med izvorno ξ in referenčno točko S. Zaradi substitucije pa velja tudi ustrezna fundamentalna rešitev neizotropnega prevajanja toplote

$$T^* = 1 \Big/ \left(2(m-1)\,\pi \left(\prod_{1}^{m} \lambda_i\right)^{0{,}5}\right) . ((m-2)/R + \\ + (3-m)\ln(1/R))$$

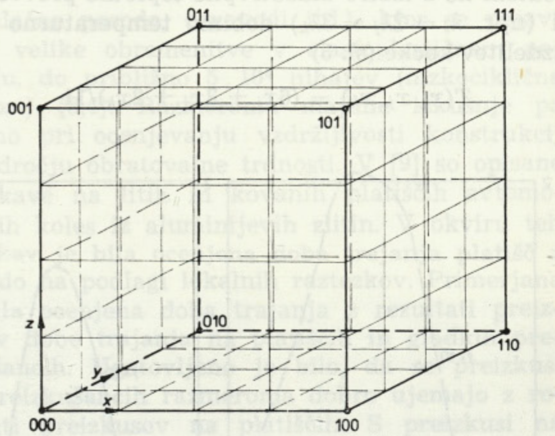
kjer pa je $R = \left(\sum_{1}^{m} (x_i^2/\lambda_i)\right)^{0{,}5}$

modificirana razdalja, medtem ko normalni odvod fundamentalne rešitve dobimo z uporabo definicijskega obrazca

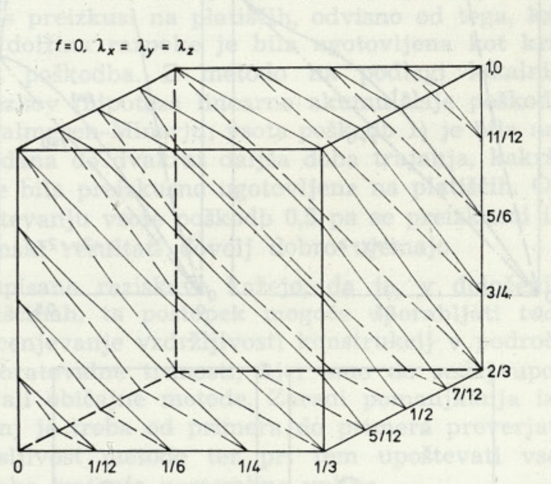
$$q^* = \partial T^*/\partial n$$

2. Primer

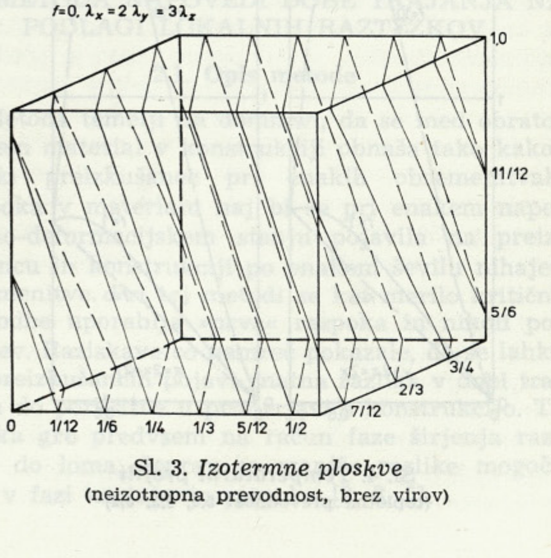
Kot dokaz pravilnega delovanja našega računalniškega programa po postopku robnih elementov v prostorskem primeru prevajanja toplote z anizotropijo smo najprej ovrednotili preprost zgled kocke (sl. 1) brez notranjih virov toplote ob ustreznih Dirichletovih mejnih pogojih (normirane relativne temperature).



Sl. 1. *Mreža ploskovnih elementov*
(96 elementov, 98 vozlov, 64 celic)



Sl. 2. *Izotermne ploskve*
(izotropna prevodnost, brez virov)



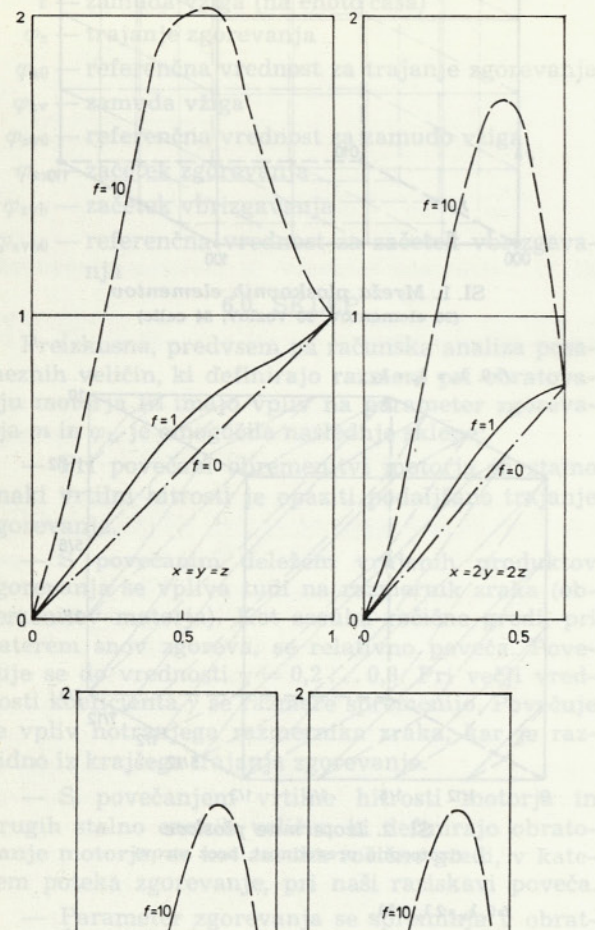
Sl. 3. *Izotermne ploskve*
(neizotropna prevodnost, brez virov)

Kadar je toplotna prevodnost izotropna ($\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k$), so temperature kocke (sl. 2)

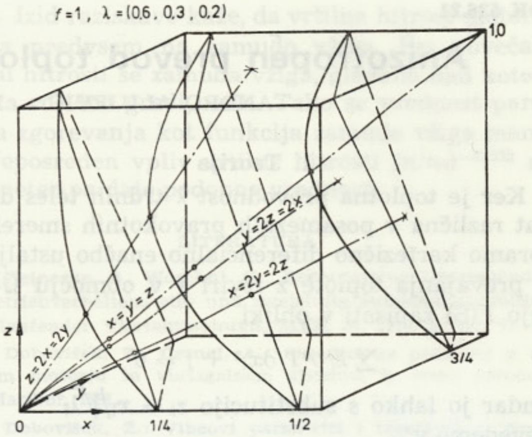
$$T(x_i, x_j, x_k) = (x_i + x_j + x_k)/3$$

medtem ko z izbiro anizotropne toplotne prevodnosti (npr. $\lambda_i = 2\lambda_j = 3\lambda_k$) dobimo temperaturno porazdelitev kocke (sl. 3)

$$T(x_i, x_j, x_k) = (6x_i + 3x_j + 2x_k)/11$$



Sl. 4. *Temperaturni profili*
(toplotna prevodnost 0,6, 0,3, 0,2)



Sl. 5. *Izotermne ploskve*
(neizotropna prevodnost, notranji viri toplote)

Nato smo isti neizotropni primer izpostavili še homogenemu viru toplote v snovi (f = konst) ter določili ustrezne temperature v notranjosti telesa, predvsem na glavni telesni diagonali $x_i = x_j = x_k$ (sl. 4 in 5).

3. Sklep

Prikazali smo uporabo postopka robnih elementov pri prevajanju toplote v telesih z upoštevanjem vpliva anizotropije toplotne prevodnosti gradiva. V okviru usmerjenega raziskovalnega programa »Jedrska energetika« smo razvili svoj lasten prostorski računalniški program, ki je tudi prvi del rezultatov usposabljanja mladega raziskovalca (Ivana Žagarja) na Tehniški fakulteti Univerze v Mariboru (akcija »2000 novih raziskovalcev« v SR Sloveniji). V prihodnjem obdobju bomo izračune razširili tudi na neustaljene prostorske probleme prevoda toplote poljubno oblikovanih teles, tako da bomo zaokrožili eno od področij svojih raziskav, o katerih smo sproti že nekajkrat poročali [3], [4], [5].

LITERATURA

[1] Brebbia C. A.: The boundary element method for engineers. Pentech Press, London-Plymouth, 1978.

[2] Brebbia C. A., Walker S.: Boundary element techniques in engineering. Newnes Butterworths, London-Boston, 1980.

[3] Škerget P., Čuješ F., Alujevič A.: Uporaba postopka elementov pri prevajanju toplote v ravninskih telesih. Strojniški vestnik 27, 26—28, Ljubljana 1981.

[4] Škerget P., Alujevič A.: Boundary element method in nonlinear transient heat transfer of reactor solids with convection and radiation on surfaces. Nuclear Engineering and Design, 76, 47—54, Amsterdam 1983.

[5] Škerget P., Alujevič A., Kogler R.: Spremenljivo temperaturno polje pri struženju litoželeznih valjev s plazemskim predgrevanjem. Strojniški vestnik, 32, 53—55, Ljubljana 1986.

Naslov avtorjev: Prof. dr. Andro Alujevič, dipl. inž.
Docent dr. Polde Škerget, dipl. inž. str.
Ivan Žagar, dipl. inž. str.
TEHNIŠKA FAKULTETA, VTO strojništvo
Univerza v Mariboru, Smetanova 17