

UDK 534.014.5:531.53

Kaotično nihanje Froudovega nihala

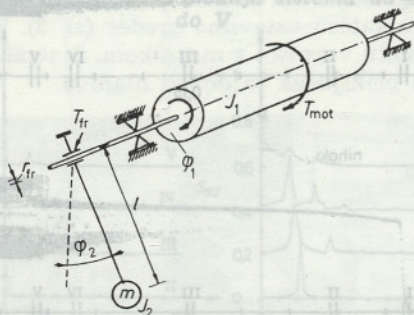
KORNELIJA ZGONC — IGOR GRABEC

UVOD

V zadnjih dveh desetletjih so raziskave pokazale, da se lahko zelo preprosti sistemi obnašajo kaotično. V prejšnjem članku o determinističnem kaosu [1] smo že opisali razloge za takšno obnašanje in omenili, da ga lahko pričakujemo tudi v disipativnih sistemih, med katere splošno sodi tudi večina delovnih strojev. Namen tega članka je pokazati primer zelo preprostega stroja, ki kaže kaotično obnašanje, ter opozoriti na podobnost s tehniškimi sistemi. Pri tem obravnavamo delovni stroj kot splošno dinamsko strukturo, ki prejema energijo in jo porablja z delom. Dinamiko takega sistema lahko splošno predstavimo z gibalnimi enačbami

$$dx/dt = F(x, t, p) \quad (1),$$

kjer pomeni x časovno odvisen vektor stanja in p skupek značilnih strojnih parametrov. Stroje, ki delajo stacionarno, lahko opišemo s funkcijo F , ki ni odvisna od časa. V tem primeru pravimo da je mehanski sistem avtonomen. V uvodnem članku [1] smo omenili, da se avtonomni sistemi lahko obnašajo kaotično, če je vektor stanja več kot dvodimenzionalen [1—5]. Za predstavitev kaotičnega obnašanja smo izbrali sistem s samo dvema bistvenima deloma: rotorjem in nihalom (sl. 1). Energija,



Sl. 1. Skica mehanske naprave

ki jo dobiva električno gnan rotor, se porablja pri trenju med rotorjem in nihalom. Dinamiko izbranega mehanskega sistema lahko opišemo s fizikalnim zakonom (1), ki se nanaša na tridimenzionalni fazni prostor. Razvoj kaotičnega nihanja pričakujemo zaradi spodrsavanja [6] pri torni sklopitvi, ki pomeni hkrati nestabilnost in izrazito nelinearnost sistema. Zaradi nelinearnosti rešujemo ustrezne diferencialne gibalne enačbe numerično. Tako dobljeni časovni poteki gibanja, v skladu s pričakovanji, kažejo kaotično obnašanje, ki se odvija v omejenem delu faznega prostora — čudnem atraktorju. V članku so lastnosti čudnega atraktorja kakovostno predstavljene z njegovimi projekcijami na značilne fazne ravnine, količinsko pa s korelacijsko dimenzijo. Dinamske lastnosti gibanja so okarakterizirane s spektralno gostoto. Le-ta je odvisna od jakosti sklopitve med rotorjem in

nihalom, ki je osnovni kontrolni parameter sistema. Vpliv tega parametra je viden iz bifurkacijskega diagrama, ki kaže odvisnost amplitude fluktuacij od sklopitve.

FORMULACIJA MODELA

Gibanje izbranega sistema preprosto opišemo s časovno odvisnima kotoma zasuka iz ravnovesne lege za rotor in nihalo: φ_1 , φ_2 . Njuno časovno spreminjanje je določeno z dinamskima enačbama,

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = -T_{fr} + T_{mot} \quad (2),$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = -mgl \sin(\varphi_2) + T_{fr} \quad (3),$$

kjer pomeni J vztrajnostni moment, indeks 1 pa se nanaša na rotor. Za maso m , gravitacijski pospešek g , dolžino nihala l in moment sil T_{fr} je uporabljen standardni zapis.

O dinamiki sistema nadalje odločata funkcijski odvisnosti momenta motorja in momenta trenja od dinamskih spremenljivk. Za mnogo elektromotorjev je značilno, da se vrtilni moment pri povečevanju hitrosti vrtenja $\dot{\varphi}_1$ zmanjšuje proti določeni vrednosti ω_m . Najpreprosteje to lastnost popišemo z linearnim nastavkom

$$T_{mot}(\dot{\varphi}_1) = D(\omega_m - \dot{\varphi}_1) = B - D\dot{\varphi}_1 \quad (4).$$

Tu pomenita $B = D\omega_m$ zvrtilni moment in D naklon karakteristike (sl. 2). Pri opisu torne sklopitve med rotorjem in nihalom moramo upoštevati,



Sl. 2. Empirične karakteristike sistema

da je moment trenja odvisen od relativne hitrosti gibanja ω med obema deloma. S povečevanjem te hitrosti se moment najprej zmanjšuje, dokler hitrost ne doseže neke značilne vrednosti ω_0 , nakar se začne zopet povečevati. Takšno odvisnost kakovostno prikazuje skica na sliki 2 in jo je mogoče najpreprosteje opisati z nastavkom

$$T_{fr}(\omega) = T_0 \left(C \left(\left| \frac{\omega}{\omega_0} \right| - 1 \right)^2 + 1 \right) \operatorname{sgn}(\omega) \quad (5).$$

Pri tem pomenijo $\omega = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2$ drsno hitrost, M_0 , C in ω_0 pa eksperimentalno ocenjene konstante. Z normaliziranim časom $T = t/\omega_0$ in generaliziranimi koordinatami

$$x_0 = \varphi_1 \quad x_1 = \dot{\varphi}_1 \quad x_2 = \varphi_2 \quad x_3 = \dot{\varphi}_2 \quad (6)$$

dobi sistem diferencialnih enačb oblike (1):

$$\dot{x}_0 = x_1 \quad (7),$$

$$\dot{x}_1 = -C_1 f + C_3 + C_4 x_1 \quad (8),$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (9),$$

$$\dot{x}_3 = -C_5 \sin(x_2) + C_6 f \quad (10),$$

$$f = (C_2(x_1 - x_3 - 1)^2 + 1) \operatorname{sgn}(x_1 - x_3) \quad (11).$$

Kotni pomik rotorja x_0 ni bistven za opis dinamičnega stanja, saj s hitrostjo stalno narašča, zato bomo opazovali le sistem s tremi povezanimi nelinearnimi enačbami, potrebnimi za popis dinamike. Parametri stroja so podani s konstantami $C_1 = M_0/(J_1 \omega_0^2)$, $C_2 = C$, $C_3 = B/(J_1 \omega_0^2)$, $C_4 = D/(J_1 \omega_0)$, $C_5 = m g l/(J_2 \omega_0^2)$, $C_6 = M_0/(J_2 \omega_0^2)$, pri čemer sta C_3 in C_4 povezana z vhodno energijo, C_1 in C_6 pa z njeno porabo pri premagovanju trenja.

Brez zunanjega vrtilnega momenta je sistem v osnovnem stabilnem stanju in sta vektorja $\mathbf{x}$ in $\dot{\mathbf{x}}$ enaka $\mathbf{O}$. Z vključitvijo gonilnega vrtilnega momenta se nihalo pomakne iz začetnega stanja in začne nihati okrog nove ravnovesne lege. Pri šibki sklopitvi nihalo niha okrog konstantnega odmika x_{20} , ki ga je razmeroma lahko določiti z iteracijo enačb (8, 9, 10). Odmik x_{20} posredno pomeni jakost sklopitve med rotorjem in nihalom in zato v nadaljnji analizi uporabljamo $p = \sin(x_{20})$ kot kontrolni parameter sistema. Poleg parametra sklopitve p je smiselno določiti še naslednje parametre sistema, od katerih je tudi odvisen prehod v kaos.

$$k = J_1/J_2 = 1$$

$$n = \omega_m/\omega_0 = 0,5$$

$$M = B/M_0 = 10$$

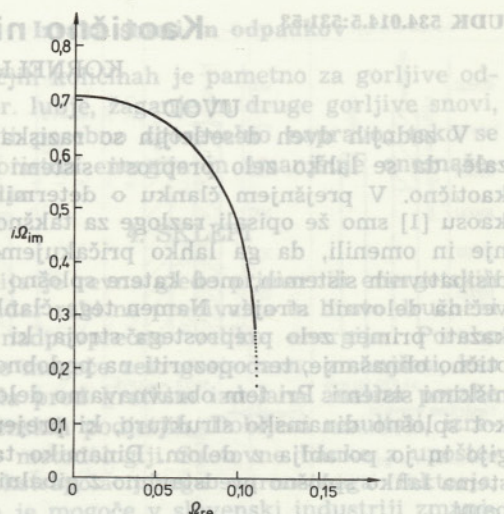
$$\Omega^2 = (\omega_1/\omega_0)^2 = 0,5$$

$$C = 3$$

S temi konstantnimi parametri stroja lahko zapišemo: $C_1 = 0,5 p$, $C_2 = 3$, $C_3 = 5 p$, $C_4 = 10 p$, $C_5 = 0,5$, $C_6 = 0,5 p$. Pri tem sta uporabljeni še zvezi $M_0 = p m g l$ in $\omega_1^2 = g/l$.

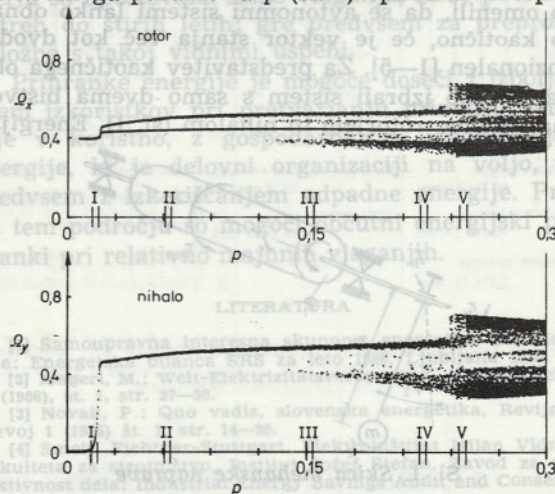
Sistem, ki smo ga določili, je nelinearen, zato ne moremo analitično obravnavati njegovega časovnega poteka. Majhne odmikne od metastabilne lege in stabilnost gibanja je mogoče analitično približno obravnavati z lineariziranimi enačbami (8, 9, 10). Stabilnost majhnih odmikov je analizirana z opazovanjem lege korenov karakterističnega polinoma v kompleksni ravnini „ Ω “ [7, 8]. Na sliki 3 je prikazano potovanje teh korenov v odvisnosti od naraščanja kontrolnega parametra. Krivulja kaže, da je sistem nestabilen za vse možne vrednosti kontrolnega parametra. Amplituda, v začetku majhnih odmikov, s časom zaradi nestabilnosti narašča, zato morajo nelinearni učinki naraščanje ustaviti, če naj bo gibanje omejeno. V primeru, ko opazujemo dve rešitvi, ki izvirata iz sosednjih majhnih začetnih odmikov, se razlika med njima s časom veča. To je poleg nelinearnosti glavni vzrok za možnost razvoja kaosa. [1, 2, 3, 4]

Pri numeričnem iskanju rešitev gibalnih enačb smo uporabili metodo Runge-Kutta četrtega reda [9] z normaliziranim časom vzorčenja $dT = 0,1$, ki



Sl. 3. Krivulja lege korenov v kompleksni ravnini Ω

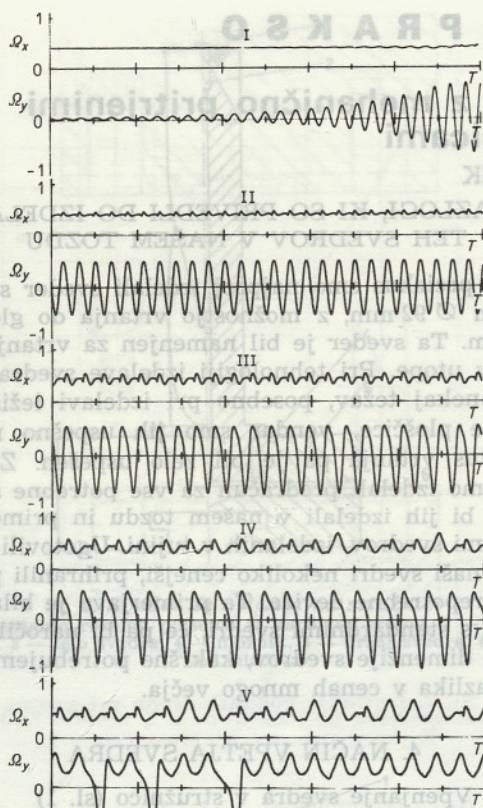
je za red velikosti manjši od nihajnega časa ustreznega prostega nihala. Z rešitvami smo določili časovni potek nihanja kotnih hitrosti nihala in rotorja. V diagramu odvisnosti največjih pozitivnih amplitud kotnih hitrosti od počasi naraščajočega kontrolnega parametra p (sl. 4) opazimo razcepitve



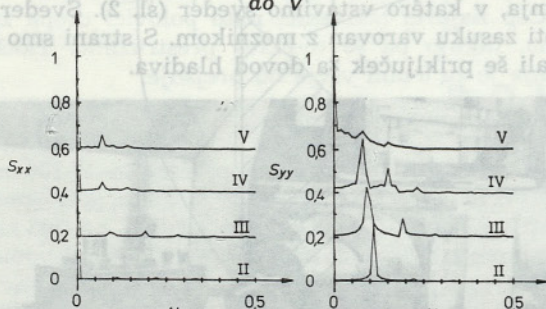
Sl. 4. Največja pozitivna kotna hitrost v odvisnosti od kontrolnega parametra p , ki opisuje močnost sklopitve. Stevilke I do V označujejo značilne odseke, Ω_x in Ω_y pa kotno hitrost rotorja in nihala

(bifurkacije), ki privedejo sistem iz harmoničnega v navidežno periodično in kaotično gibanje. V diagramu na sliki 4 so označeni značilni odseki razvoja gibanja od I do V. Znotraj teh odsekov se parameter p spremeni le za 0,006 in ga lahko obravnavamo kot konstantnega. Na sliki 5 so posnetki izračunanih časovnih potekov obeh kotnih hitrosti znotraj izbranih odsekov.

Časovne poteke hitrosti znotraj izbranih odsekov smo analizirali s hitro Fourierjevo transformacijo. Izračunane spektralne porazdelitve prikazuje slika 6. Iz spektrov vidimo, da je gibanje na začetku skoraj harmonično (II), nakar se zaradi nelinearnih učinkov pojavijo najprej spektralni vrhovi pri višjih harmonskih frekvencah (III), nato pa

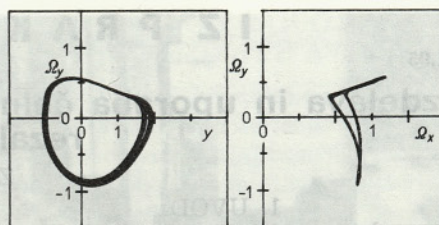


Sl. 5. Časovna odvisnost gibanja sistema na odsekih I do V



Sl. 6. Spektralna gostota za odseke II do V v odvisnosti od brezdimenzijske frekvence N

tudi v subharmskem intervalu (IV). Ta proces končno povzroči razvoj širokopasovne spektralne porazdelitve (V). Takšne porazdelitve ustrezajo kaotičnemu obnašanju sistema. Posnetek V tudi pove, da je to obnašanje posledica neperiodičnega pojavljanja zasukov nihala okoli rotorja, ki se kaže v izrazitih navidezno naključno porazdeljenih impulzih. Indikacija za razvoj takšnega gibanja so izrazitejši impulzi v posnetku hitrosti rotorja na odseku IV. Ta razvoj smo opazovali tudi s projiciranjem atraktorja gibanja na različne ravnine faznega prostora. Slika 7 prikazuje posnetke, ki ustrezajo odseku IV. Osnovna značilnost, ki jo opazimo s projekcijo v ravnino $Q_y - y$, je, da atraktorju ne ustreza ena sama zaključena krivulja, temveč širše atraktorsko področje. Znotraj tega območja se pojavljajo tavaajoče trajektorije, ki pomenijo



Sl. 7. Fazni portret: projekcija čudnega atraktorja v fazni ravnini hitrost — pomik nihala in hitrost rotorja — hitrost nihala

čudni atraktor. Dimenzionalnost tega atraktorja smo ocenili s korelacijskim eksponentom, določenim v uvodnem članku in pomeni korelacijsko dimenzijo D_2 . V preglednici 1 so podane odvisnosti korelacijskega eksponenta od kontrolnega parametra p :

Preglednica 1

	I	II	III	IV	V
p	0,0027	0,0177	0,2277	0,2330	0,2470
n	2	2,06	2,14	2,26	2,91

Ti podatki kažejo, da se število neodvisnih dinamskih spremenljivk, potrebnih za popis dinamike izbranega sistema, giblje v intervalu od 2 do približno 3. Na začetku zato atraktor gibanja ustreza dvodimenzionalnemu anuloidu (torusu), ki predstavlja navidezno harmonično gibanje. Ta anuloid (torus) se nato zaradi kaotičnega gibanja razširi na tridimenzionalni prostor.

SKLEP

S tem primerom smo pokazali, da lahko sila trenja povzroči zaradi svoje nelinearnosti kaotično gibanje celo v najbolj preprostih sistemih, kjer je izpolnjen pogoj za pojav kaosa. S podobnimi konstrukcijskimi značilnostmi kakor v izbranem sistemu, se v strojništvu srečujemo vselej kadar se energija iz rotorja motorja toro prenaša na druge dele sistema. Splošno lahko zato pričakujemo, da se v primerih, ko je izpolnjen kriterij nestabilnosti, zaradi lastnosti sile trenja lahko razvije kaos. Njegove značilnosti je mogoče intuitivno razumeti, če upoštevamo značilnosti zelo pogosto opaženega pojava spodrsavanja. Značilni primeri so različni odrezovalni stroji, ekstruderji in podobno.

LITERATURA

- [1] I. Grabec: Deterministični kaos. SV 1987/10—12, str. 165.
- [2] H. Schuster: Deterministic Chaos, An Introduction. Physik Verlag, Weinheim, 1984.
- [3] J. P. Eckmann, D. Ruelle: Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors. Reviews of Modern Physics, 57, 617—656, 1985.
- [4] M. J. Feigenbaum: Low-Dimensional Dynamics and the Period Doubling Scenario. Dynamical Systems and Chaos. Editor L. Garrido. Springer-Verlag, Berlin 1983, p. 131—147.
- [5] G. Nicolis: Dissipative Systems. Rep. Prog. Phys., 49, 873—949, 1986.
- [6] K. Zgonc: Diplomsko naloga. UEK, Fakulteta za strojništvo v Ljubljani, št. 3512, 1987.
- [7] R. Saucedo, E. E. Schiring: Root Locus Method for Continuous and Digital Systems. The Macmillan Company, Collier-Macmillan Limited, London, 1970.
- [8] F. H. Raven: Automatic Control Engineering. Mc-Graw Hill, 1968.
- [9] G. A. Korn, T. M. Korn: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Mc-Graw Hill, N. Y., 1968.

Naslova avtorjev: Kornelija Zgonc, dipl. inž.,
prof. dr. Igor Grabec, dipl. inž.,
oba Fakulteta za strojništvo,
Ljubljana