

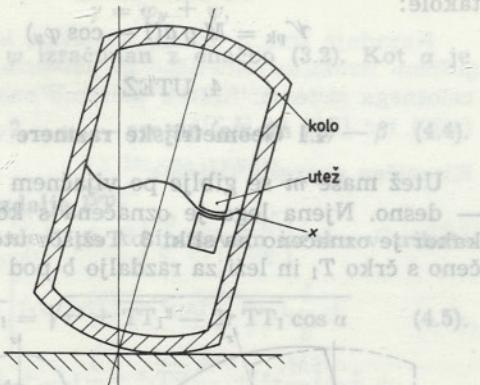
UDK 62-23

Analiza gibanja kolesa — igrače

IGOR EMRI — PETER METLIKOVIC — VOJKO PAVŠEK — JOZE DUHOVNIK

1. UVOD

V prispevku sta podani kinematična in kinetična analiza gibanja kolesa — igrače s komercialnim imenom »CRAZY WHEEL«, ki je shematično prikazano na sliki 1.



Sl. 1. Shematski prikaz kolesa

V osi kolesa x je nameščeno vijačno vodilo. Na njem je utež, ki se med kotaljenjem kolesa giblje po vodilu levo — desno. Kolo se pri tem nagiba in zato zavija.

Trajektorija, ki jo kolo z dano geometrično obliko opisuje po tleh, je odvisna od hitrosti, s katero igralec zakotali kolo, in od začetne lege uteži.

Gibalne lastnosti kolesa so odvisne od geometrične oblike in vztrajnostnih mas ter momentov. Vplivnih parametrov je zelo veliko. Če bi hoteli optimirati lastnosti kolesa, bi morali izdelati izredno veliko število prototipov, kar je zamudno in drag. Zato smo poskušali določiti zakon gibanja kolesa. Z njim bo mogoče na računalniku hitro spremenjati vstopne parametre in določiti odziv ter tako optimirati sistema.

V tem prispevku podajamo izpeljavo zakona gibanja, v naslednjem pa bo podana numerična analiza dobljenih enačb in izvedena analiza vpliva geometrične oblike kolesa na njegovo gibanje.

2. LAGRANGEOVE ENAČBE GIBANJA

Za vse nadaljnje delo so izrednega pomena predpostavke, ki jih privzamemo na začetku. V prvem približku zanemarimo naslednje vplive:

- upor zraka,
- kotalno trenje,
- trenje med vijakom in utežjo.

Obravnavani sistem je tako ohranjevalen (konzervativni). Zakon gibanja lahko zapišemo v obliki Lagrangeove diferencialne enačbe drugega reda:

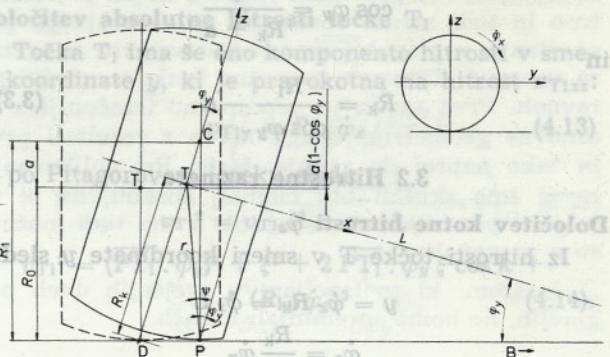
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad (2.1),$$

kjer je \mathcal{L} Lagrangeova funkcija:

$$\mathcal{L} = T - \mathcal{V}_p \quad (2.2)$$

razlika kinetične in potencialne energije sistema, q_j pa je pospoljena Langrangeova koordinata (indeks j teče od 1 do števila prostostnih stopenj sistema n).

Geometrijske razmere pri kotaljenju kolesa si oglejmo na sliki 2. Kolo je narisano v izklonjeni legi. Če predpostavimo, da se:



Sl. 2. Geometrijske razmere pri kotaljenju kolesa

v dotikalni točki P ne pojavi nobeni zdrsi, kolo giblje v vsakem trenutku tako, kakor da bi bilo del stožca višine L in polmera osnovne ploskve R_k , ki se kotali z vrhom v točki B okrog dotikalnika BP, potem se da lego sistema enčično popisati z dvema koordinatama:

φ_x — kot zasuka okoli osi x ,

φ_y — kot zasuka okoli osi y .

Sistem enačb (2.1) se z upoštevanjem (2.2) glasi:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_x} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_x} + \frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial \varphi_x} = 0 \quad (2.3a),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_y} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_y} + \frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial \varphi_y} = 0 \quad (2.3b).$$

Da bi rešili sistem enačb (2.3) na φ_x in φ_y , moramo določiti kinetično in potencialno energijo ter izračunati potrebne odvode. V naslednjih dveh poglavjih bomo določili energije kolesa in uteži.

3. KOLO

3.1 Geometrijske razmere

Izboklost kolesa je del krožnice s polmerom R_1 . Polmer kolesa je R_0 . Pri tem mora biti $R_1 \geq R_0$, oziroma $R_1 = R_0 + a$ (sl. 2). Neznanki sta kota φ_x in φ_y .

Določitev razdalje r

Iz trikotnika CTP na sliki 2 dobimo po kosinovem izreku:

$$r = \sqrt{R_1^2 + a^2 - 2R_1 a \cos \varphi_y} \quad (3.1).$$

Določitev kota ψ

Iz istega trikotnika sledi po sinusovem izreku

$$\frac{r}{\sin \varphi_y} = \frac{a}{\sin \psi}$$

in od tod

$$\psi = \arcsin \left(\frac{a}{r} \sin \varphi_y \right) \quad (3.2)$$

Določitev kotalnega polmera R_k

Iz trikotnika CDP na sliki 2 sledi

$$\cos \varphi_y = \frac{R_1}{R_k + a}$$

in

$$R_k = \frac{R_1}{\cos \varphi_y} - a \quad (3.3).$$

3.2 Hitrostne razmere

Določitev kotne hitrosti $\dot{\varphi}_z$

Iz hitrosti točke T v smeri koordinate y sledi:

$$y = \dot{\varphi}_x R_k = \dot{\varphi}_z L$$

$$\dot{\varphi}_z = \frac{R_k}{L} \dot{\varphi}_x$$

in ker je

$$\tan \varphi_y = \frac{R_k}{L}$$

sledi

$$\dot{\varphi}_z = \dot{\varphi}_x \tan \varphi_y \quad (3.4).$$

Določitev absolutne hitrosti težišča v_t

Ker je pol hitrosti za ravnino x-z v točki P, je hitrost težišča T enaka

$$|v_{tzx}| = \dot{\varphi}_y r \quad (3.5).$$

Vektorja $v_{ty} = y$ in v_{tzx} sta pravokotna in zato dobimo

$$v_t^2 = |v_t|^2 = \dot{\varphi}_x^2 R_k^2 + \dot{\varphi}_y^2 r^2 \quad (3.6).$$

3.3 Energijeske razmere

Kinetična energija kolesa

Kinetična energija totega telesa je vsota kinetične energije premočrtnega gibanja težišča in kinetičnih energij vrtenj okrog težišča.

$$T = \frac{M v_t}{2} + \frac{J_x \dot{\varphi}_x^2}{2} + \frac{J_y \dot{\varphi}_y^2}{2} + \frac{J_z \dot{\varphi}_z^2}{2} \quad (3.7).$$

Z M smo označili maso kolesa, z J_x , J_y in J_z pa težiščne vztrajnostne momente. Z upoštevanjem (3.6) in (3.4) ter z izpostavitvijo hitrosti $\dot{\varphi}_x$ in $\dot{\varphi}_y$ dobimo

$$T = \dot{\varphi}_x^2 \left[\frac{M}{2} R_k^2 + \frac{1}{2} (J_x + J_z \tan^2 \varphi_y) \right] +$$

$$+ \dot{\varphi}_y^2 \left[\frac{M}{2} r^2 + \frac{J_y}{2} \right] \quad (3.8).$$

Potencialna energija

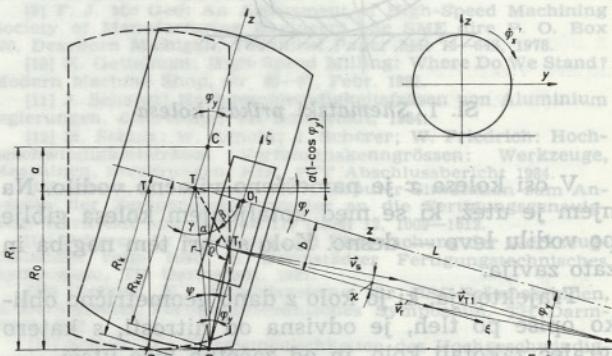
je odvisna le od kota zasuka φ_y in jo izračunamo takole:

$$\mathcal{V}_{pk} = M g a (1 - \cos \varphi_y) \quad (3.9).$$

4. UTEŽ

4.1 Geometrijske razmere

Utež mase m se giblje po vijačnem vodilu levo — desno. Njena lega je označena s koordinato ξ , kakor je označeno na sliki 3. Težišče uteži je označeno s črko T_1 in leži za razdaljo b pod osjo vodila.



Sl. 3. Geometrijske in hitrostne razmere pri gibanju uteži

Zakon gibanja uteži je podan v obliki:

$$\xi = \xi(\varphi_x) \quad (4.1).$$

Določitev razdalje TT_1

Po Pitagorovem izreku sledi iz trikotnika TT₁O

$$TT_1 = \sqrt{\xi^2 + b^2} \quad (4.2).$$

Določitev kota β

Iz istega trikotnika (sl. 3) sledi

$$\tan \beta = \frac{b}{\xi}$$

Pri funkciji \arctan je treba biti pazljiv, ker ima zalogo vrednosti od $-\pi/2$ do $\pi/2$, kot β pa se giblje nekako od $\pi/4$ do $3\pi/4$. Zato se naspratna funkcija glasi:

$$\beta = \begin{cases} \arctan \frac{b}{\xi}; \xi > 0 \\ \pi/2; \xi = 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{\xi}; \xi < 0 \end{cases} \quad (4.3).$$

Določitev kota α

S slike 3 je razvidno, da je kot α enak

$$\alpha = \pi/2 - \gamma - \beta, \quad (4.6)$$

kot γ dobimo iz vsote

$$\gamma = \varphi_y + \psi,$$

kjer je kot ψ izračunan z enačbo (3.2). Kot α je tako enak

$$\alpha = \pi/2 - \varphi_y - \arcsin(a/r \sin \varphi_y) - \beta \quad (4.4).$$

Določitev razdalje \overline{PT}_1

S slike 3 sledi po kosinusovem izreku v trikotniku PT_1T

$$\overline{PT}_1 = \sqrt{r^2 + \overline{TT}_1^2 - 2r \overline{TT}_1 \cos \alpha} \quad (4.5).$$

Določitev kota \varkappa

Utež s težiščem v točki T_1 izvaja sestavljeni gibanje, ki je vektorska vsota sistemskega in relativnega gibanja, kakor je prikazano na sliki 3

$$\overline{v}_{T1xz} = \overline{v}_s + \overline{v}_r \quad (4.6).$$

Vektor \overline{v}_s je pravokoten na zveznico PT_1 , vektor \overline{v}_r pa se ujema z osjo ξ . Kot med njima smo označili s \varkappa .

Najprej moramo določiti kot ϱ . Po sinusovem izreku v trikotniku PT_1T dobimo

$$\frac{r}{\sin \varrho} = \frac{\overline{PT}_1}{\sin \alpha}.$$

Sledi

$$\varrho = \arcsin \left(\frac{r}{\overline{PT}_1} \sin \alpha \right), \quad (4.7),$$

Kot \varkappa lahko sedaj izračunamo iz enakosti

$$\beta + \frac{\pi}{2} = \varrho - \varkappa, \quad (4.16)$$

$$\varkappa = \arcsin \left(\frac{r}{\overline{PT}_1} \sin \alpha \right) - \beta - \frac{\pi}{2} \quad (4.8).$$

Določitev kotalnega polmera R_{ku}

Pri kotaljenju stožca z vrhom v točki B se težišče uteži T_1 giblje v smeri y s hitrostjo točke O_1 . Kotna hitrost kotaljenja je $\dot{\varphi}_x$, kotalni polmer uteži pa dobimo iz razmerja

$$\frac{R_{ku}}{R_k} = \frac{L - \xi}{L}.$$

Če upoštevamo, da je

$$L = \frac{R_k}{\tan \varphi_y},$$

sledi

$$R_{ku} = R_k - \xi \tan \varphi_y \quad (4.9).$$

4.2 Hitrostne razmere**Določitev hitrosti uteži v ravnini xz : \overline{v}_{T1xz}**

Vektorska enačba je iz (4.6)

$$\overline{v}_{T1xz} = \overline{v}_s + \overline{v}_r.$$

Komponenti sta

$$\overline{v}_s = \overline{PT}_1 \cdot \dot{\varphi}_y \quad (4.10),$$

$$\overline{v}_r = \dot{\varepsilon} \quad (4.11).$$

Absolutna vrednost hitrosti je

$$|\overline{v}_{T1xz}|^2 = (\overline{PT}_1 \cdot \dot{\varphi}_y)^2 + \xi^2 + 2 \cdot \overline{PT}_1 \cdot \dot{\varphi}_y \xi \cos k \quad (4.12).$$

Določitev absolutne hitrosti točke T_1

Točka T_1 ima še eno komponento hitrosti v smeri koordinate y , ki je pravokotna na hitrost \overline{v}_{T1xz} :

$$\overline{v}_{T1y} = R_{ku} \dot{\varphi}_x \quad (4.13)$$

in po Pitagorovem izreku sledi:

$$|\overline{v}_{T1}|^2 = |\overline{v}_{T1xz}|^2 + |\overline{v}_{T1y}|^2, \quad (4.14).$$

$$\overline{v}_{T1}^2 = (\overline{PT}_1 \cdot \dot{\varphi}_y)^2 + \dot{\varepsilon}^2 + 2 \overline{PT}_1 \cdot \dot{\varphi}_y \xi \cos k + (R_{ku} \dot{\varphi}_x)^2 \quad (4.14).$$

4.3 Energijske razmere**Kinetična energija uteži**

Kinetična energija točega telesa je vsota kinetične energije premočrtnega gibanja težišča in kinetičnih energij vrtenj okrog težišča.

$$T_u = \frac{m \overline{v}_{T1}^2}{2} + \frac{J_\xi \dot{\varphi}_y \xi^2}{2} + \frac{J_\eta \varphi_y \eta^2}{2} + \frac{J_\zeta \varphi_z \zeta^2}{2} \quad (4.15).$$

Koordinate ξ , η in ζ so parovno vzporedne z osmi x , y in z in imajo izhodišče v točki T_1 . Z m smo označili maso uteži.

$$\text{Nihanja okoli osi } \xi \text{ ne upoštevamo, zato je} \quad \dot{\varphi}_\xi = 0 \quad (4.16).$$

Ker je relativno gibanje premočrtno, sledi:

$$\dot{\varphi}_\eta = \dot{\varphi}_y \quad (4.17)$$

in

$$\dot{\varphi}_\zeta = \dot{\varphi}_y = \tan \varphi_y \dot{\varphi}_x \quad (4.18).$$

Upoštevamo še, da iz zakona (4.1) sledi

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \dot{\varphi}_x \quad (4.19).$$

Z upoštevanjem (4.14) in z izpostavitevijo obeh hitrosti dobimo:

$$T_u = \dot{\varphi}_x \left[\frac{m}{2} \left(R_{ku}^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \tan^2 \varphi_y \cdot J_\xi \right] + \dot{\varphi}_y \left[\frac{m}{2} \overline{PT_1}^2 + \frac{1}{2} J_\eta \right] + \dot{\varphi}_x \dot{\varphi}_y m \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \overline{PT_1} \cos \kappa \quad (4.20).$$

Potencialna energija uteži

Potencialna energija uteži je odvisna le od zasuka φ_y

$$\mathcal{V}_{pu} = m g [a(1 - \cos \varphi_y) - \overline{TT_1} \sin(\Phi_y + \beta)] \quad (4.21).$$

5. SISTEM ENAČB ZA KINETIČNO IN POTENCIJALNO ENERGIJO SISTEMA

V dotedanjih izpeljavah smo videli, da moramo uporabljati več pomožnih funkcij, ki jih je nesmoteno in tudi zaradi obsežnosti in večkratnega ponavljanja nemogoče neposredno vstaviti v izraze za energije. Zato smo pomožne funkcije uredili po ravneh. Prva raven je neposredno izračunljiva iz osnovne geometrije, druga raven z rezultati prve in tako naprej do zadnje, šeste. Pri oblikovanju ravni smo skušali biti čim bolj spretni, da bi se izognili prevelikemu pisanju in s tem tudi možnostim za napake.

Izrazom, ki so izpeljani v prejšnjih dveh poglavjih, ne bomo spremenjali označb.

5.1 Prva raven

$$r = \sqrt{R_1^2 + a^2 - 2R_1 a \cos \varphi_y} \quad (3.1),$$

$$R_k = \frac{R_1}{\cos \varphi_y} - a \quad (3.3)$$

$$\xi = \xi(\varphi_x) \quad (4.1).$$

5.2 Druga raven

$$\overline{TT_1} = \sqrt{\xi^2 + b^2} \quad (4.2),$$

$$\beta = \begin{cases} \arctan \frac{b}{\xi} & ; \xi > 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \xi = 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{\xi} & ; \xi < 0 \end{cases} \quad (4.3),$$

$$R_{ku} = R_k - \xi \tan \varphi_y \quad (4.9).$$

5.3 Tretja raven

$$a = \frac{\pi}{2} - \Phi_y - \arcsin \left(\frac{a}{r} \sin \varphi_y \right) - \beta \quad (4.4).$$

5.4 Četrta raven

$$\overline{PT_1} = \sqrt{r^2 + \overline{TT_1}^2 - 2r \overline{TT_1} \cos \alpha} \quad (4.5).$$

5.5 Peta raven

$$k = \arcsin \left(\frac{r}{\overline{PT_1}} \sin \alpha \right) - \beta - \frac{\pi}{2} \quad (4.8).$$

5.6 Šesta raven

Nazadnje smo prišli do trenutka, ko lahko napišemo izraza za kinetično in potencialno energijo celotnega sistema. Seštevi moramo enačbe (3.8) in (4.20) ter (3.9) in (4.21).

Kinetična energija sistema

$$T = \dot{\varphi}_x^2 \left[\frac{M}{2} R_k^2 + \frac{m}{2} \left(R_{ku}^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} J_x + \frac{1}{2} \tan^2 \varphi_y (J_z + J_\xi) \right] + \dot{\varphi}_y^2 \left[\frac{M}{2} r^2 + \frac{m}{2} \overline{PT_1}^2 + \frac{1}{2} (J_y + J_\eta) \right] + \dot{\varphi}_x \dot{\varphi}_y m \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \overline{PT_1} \cos \kappa \quad (5.1).$$

Potencialna energija sistema

$$\mathcal{V}_p = (M + m) g a (1 - \cos \varphi_y) - m g \overline{TT_1} \sin(\varphi_y + \beta) \quad (5.2).$$

6. PREGLEDNICA ODVODOV POMOŽNIH FUNKCIJ

Pri izračunavanju odvodov obeh energij, potrebnih za vstavitev v enačbo (2.3), potrebujemo tudi parcialne odvode pomožnih funkcij po koordinatah φ_x in φ_y , po hitrostih $\dot{\varphi}_x$ in $\dot{\varphi}_y$ ter odvod po času. Tukaj pregledno podajamo odvode po ravneh. Vsi nenavedeni odvodi so enaki 0.

6.1 Prva raven

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi_y} = \frac{R_1 a \sin \varphi_y}{r} \quad (6.1),$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial \varphi_y} \dot{\varphi}_y \quad (6.2),$$

$$\frac{\partial R_k}{\partial \varphi_y} = \frac{R_1 \sin \varphi_y}{\cos^2 \varphi_y} \quad (6.3),$$

$$\frac{dR_k}{dt} = \frac{dR_k}{\partial \varphi_y} \dot{\varphi}_y \quad (6.4).$$

Za izračun odvoda funkcije ξ moramo samo odvisnost seveda poznati. Da ne bi izgubili pri splošnosti, pustimo to vprašanje sedaj odprto. Odvod bo izračunljiv po definiciji odvisnosti $\xi(\varphi_x)$.

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \dot{\varphi}_x = \dot{\xi} \quad (6.5),$$

$$\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \varphi_x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi_x^2} \dot{\varphi}_x^2 \quad (6.6),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \dot{\varphi}_x} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \quad (6.7),$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi_x^2} \dot{\varphi}_x^2 + \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \ddot{\varphi}_x \quad (6.8).$$

6.2 Druga raven

$$\frac{\partial \overline{TT_1}}{\partial \varphi_x} = \frac{\xi}{\overline{PT_1}} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \quad (6.9),$$

$$\frac{d\overline{TT_1}}{dt} = \frac{\partial \overline{TT_1}}{\partial \varphi_x} \dot{\varphi}_x \quad (6.10),$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \varphi_x} = -\frac{b}{\xi^2 + b^2} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \quad (6.11),$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_x} \dot{\varphi}_x \quad (6.12).$$

$$\frac{\partial R_{ku}}{\partial \varphi_x} = -\frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \tan \varphi_y \quad (6.13),$$

$$\frac{\partial R_{ku}}{\partial \varphi_y} = \frac{\partial R_k}{\partial \varphi_y} - \frac{\xi}{\cos^2 \varphi_y} \quad (6.14),$$

$$\frac{dR_{ku}}{dt} = \frac{\partial R_{ku}}{\partial \varphi_x} \dot{\varphi}_x + \frac{\partial R_{ku}}{\partial \varphi_y} \dot{\varphi}_y \quad (6.15).$$

6.3 Tretja raven

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_x} = -\frac{\partial \beta}{\partial \varphi_x} \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_y} = \frac{a}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \varphi_y} \sin \varphi_y - \frac{a}{r} \cos \varphi_y \quad (6.17),$$

$$\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} \sin^2 \varphi_y} - 1$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_x} \dot{\varphi}_x + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_y} \dot{\varphi}_y \quad (6.18).$$

6.4 Četrta raven

$$\frac{\partial \overline{PT_1}}{\partial \varphi_x} = \frac{\overline{TT_1}}{\overline{PT_1}} \left[\frac{\partial \overline{TT_1}}{\partial \varphi_x} \left(1 - \frac{r}{\overline{TT_1}} \cos \alpha \right) + r \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_x} \sin \alpha \right] \quad (6.19),$$

$$\frac{\partial \overline{PT_1}}{\partial \varphi_y} = \frac{r}{\overline{PT_1}} \left[\frac{\partial r}{\partial \varphi_y} \left(1 - \frac{\overline{TT_1}}{r} \cos \alpha \right) + \frac{\overline{TT_1}}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_y} \sin \alpha \right] \quad (6.20),$$

$$\frac{d\overline{PT_1}}{dt} = \frac{\partial \overline{PT_1}}{\partial \varphi_x} \dot{\varphi}_x + \frac{\partial \overline{PT_1}}{\partial \varphi_y} \dot{\varphi}_y \quad (6.21).$$

6.5 Peta raven

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_x} = \frac{r}{\overline{PT_1}} \times \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\overline{PT_1}} \right)^2 \sin^2 \alpha} \times \left[\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_x} \cos \alpha - \frac{\partial \overline{PT_1}}{\partial \varphi_x} \sin \alpha \right] - \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_x} \quad (6.22),$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_y} = \frac{r}{\overline{PT_1}} \times \sqrt{1 - \left(\frac{r}{\overline{PT_1}} \right)^2 \sin^2 \alpha} \times \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi_y} \frac{\sin \alpha}{r} - \frac{\partial \overline{PT_1}}{\partial \varphi_y} \frac{\sin \alpha}{\overline{PT_1}} + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_y} \cos \alpha \right) \quad (6.23),$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_x} \dot{\varphi}_x + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_y} \dot{\varphi}_y \quad (6.24).$$

7. DOLOČITEV GIBALNIH ENAČB

Sistem dveh diferencialnih enačb smo navedli že v poglavju 2.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_x} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_x} + \frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial \varphi_x} = 0 \quad (2.3a),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_y} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_y} + \frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial \varphi_y} = 0 \quad (2.3b).$$

Sedaj moramo izračunati zgornje odvode. Izraza za kinetično potencialno energijo sistema, ki ju odvajamo, sta označena s (5.1) in (5.2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_x} &= 2\dot{\varphi}_x \left[\frac{M}{2} R_k^2 + \frac{m}{2} \left(R_{ku}^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \right)^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} J_x + \frac{1}{2} \tan^2 \varphi_y (J_z + J_\xi) \right] + \dot{\varphi}_y m \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \overline{PT_1} \cos \alpha \end{aligned} \quad (7.1).$$

Za odvod po času sledi:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_x} = B \ddot{\varphi}_x + C \ddot{\varphi}_y + D \quad (7.2a),$$

kjer so

$$B = M R_k^2 + m \left(R_{ku}^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \right)^2 \right) + J_x + \tan^2 \varphi_y (J_z + J_\xi) \quad (7.2b),$$

$$C = m \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \overline{PT_1} \cos \alpha \quad (7.2c),$$

Potencialna

$$D = \dot{\varphi}_x^2 2m \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \frac{\partial \xi^2}{\partial \varphi_x^2} + \dot{\varphi}_x \dot{\varphi}_y \times \\ \times \left[2 \frac{\sin \varphi_y}{\cos^3 \varphi_y} (J_z + J_\xi) + m \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi_x^2} \overline{PT_1} \cos \alpha \right] + \\ + 2 \dot{\varphi}_x \left[M R_k \frac{dR_k}{dt} + m R_{ku} \frac{dR_{ku}}{dt} \right] + \\ + \dot{\varphi}_y m \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \left[\frac{d\overline{PT_1}}{dt} \cos \alpha - \overline{PT_1} \frac{dk}{dt} \sin \alpha \right] \quad (7.2d).$$

Ovod po hitrosti $\dot{\varphi}_y$ je

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_y} = 2 \dot{\varphi}_y \left[\frac{M}{2} r^2 + \frac{m}{2} \overline{PT_1}^2 + \frac{1}{2} (J_y + J_n) \right] + \\ + \dot{\varphi}_x m \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \overline{PT_1} \cos \alpha \quad (7.3).$$

Ovod zgornjega izraza po času je:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_y} = E \ddot{\varphi}_x + F \ddot{\varphi}_y + G \quad (7.4a),$$

kjer so

$$E = m \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \overline{PT_1} \cos \alpha \quad (7.4b),$$

$$F = M r^2 + m \overline{PT_1}^2 + J_y + J_n \quad (7.4c),$$

$$G = \dot{\varphi}_x^2 m \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi_x^2} \overline{PT_1} \cos \alpha + \dot{\varphi}_x m \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \times \\ \times \left[\frac{d\overline{PT_1}}{dt} \cos \alpha - \overline{PT_1} \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} \right] + \\ + 2 \dot{\varphi}_y \left[M r \frac{dr}{dt} + m \overline{PT_1} \frac{d\overline{PT_1}}{dt} \right] \quad (7.4d).$$

Ovod kinetične energije po prvi koordinati φ_x je:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_x} = \dot{\varphi}_x^2 m \left[R_{ku} \frac{\partial R_{ku}}{\partial \varphi_x} + \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi_x^2} \right] + \\ + \dot{\varphi}_y^2 m \overline{PT_1} \frac{\partial \overline{PT_1}}{\partial \varphi_x} + \dot{\varphi}_x \dot{\varphi}_y m \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi_x^2} \overline{PT_1} \cos \alpha + \right. \\ \left. + \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \frac{\partial \overline{PT_1}}{\partial \varphi_x} \cos \alpha - \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \overline{PT_1} \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_x} \right] \quad (7.5).$$

Ovod kinetične energije po koordinati φ_y je:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_y} = \dot{\varphi}_x^2 \left[M R_k \frac{\partial R_k}{\partial \varphi_y} + m R_{ku} \frac{\partial R_{ku}}{\partial \varphi_y} + \frac{\sin \varphi_y}{\cos^3 \varphi_y} \times \right. \\ \times (J_z + J_\xi) \left. \right] + \dot{\varphi}_y^2 \left[M r \frac{\partial r}{\partial \varphi_y} + m \overline{PT_1} \frac{\partial \overline{PT_1}}{\partial \varphi_y} \right] + \\ + \dot{\varphi}_x \dot{\varphi}_y m \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_x} \left[\frac{\partial \overline{PT_1}}{\partial \varphi_y} \cos \alpha - \overline{PT_1} \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_y} \right] \quad (7.6).$$

Sedaj nam preostane še določitev odvodov potencialne energije (5.2) po obeh koordinatah. Odvod po koordinati φ_x je:

$$\frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial \varphi_x} = -m g \left[\frac{\partial \overline{TT_1}}{\partial \varphi_x} \sin(\varphi_y + \beta) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_x} \overline{TT_1} \cos(\varphi_y + \beta) \right] \quad (7.7)$$

in po koordinati φ_y

$$\frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial \varphi_y} = (M + m) g a \sin \varphi_y - m g \overline{TT_1} \cos(\varphi_y + \beta) \quad (7.8).$$

S tem smo določili vse odvode, potrebne za vstavitev v sistem (2.3).

Gibalni enačbi prepišimo v malce drugačni oblike, z vstavitvijo izrazov (7.2a) in (7.4a):

$$B \ddot{\varphi}_x + C \ddot{\varphi}_y + D - \frac{\partial T}{\partial \varphi_x} + \frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial \varphi_x} = 0 \quad (7.9a),$$

$$E \ddot{\varphi}_x + F \ddot{\varphi}_y + G - \frac{\partial T}{\partial \varphi_y} + \frac{\partial \mathcal{V}_p}{\partial \varphi_y} = 0 \quad (7.9b).$$

Tako napisan sistem je pripravljen za preoblikovanje v sistem štirih enačb prvega reda, ki se ga da reševati z numeričnimi metodami na računalniku.

8. SKLEP

Gibalne enačbe popisujejo neko gibanje sistema dovolj dobro, če so predpostavke dovolj blizu resničnemu stanju in seveda če v izpeljavi ni napake. Upamo, da smo pri obojem imeli srečno roko. Odgovor na to bomo dobili po natančni numerični analizi sistema enačb (2.3) in (7.9), o kateri bomo poročali v naslednjem prispevku.