

UDK 519.6:534.113:531.232

## Nihanje palice, obremenjene na vrtilni moment

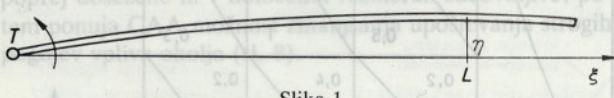
MARKO RAZPET

### 1. UVOD

V prispevku rešujemo z analitičnimi metodami naslednji problem:

Zelo dolga homogena palica z gostoto  $\varrho$ , elastičnostnim modulom  $E$ , konstantnim prerezom  $S$  in vztrajnostnim momentom prereza  $I$  je na oddaljenem koncu naslonjena in na začetku v mirujočem stanju. Ob času  $\tau = 0$  začne na drugem koncu, kjer je palica vrtljivo vpeta, delovati časovno spremenljivi vrtilni moment  $T(\tau)$ . Vpliv teže zanemarimo. Kako zaniha palica v izbrani točki  $\xi = L$ .

Os  $\xi$  je usmerjena tako, kakor prikazuje slika 1. Odmak palice od mirovne lege označimo s  $\eta(\xi, \tau)$ . Obnašanje te spremenljivke opisuje parcialna diferencialna enačba



Slika 1.

$$\frac{EI}{\varrho S} \frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} (\xi, \tau) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} (\xi, \tau) = 0, \quad \xi \geq 0, \quad \tau > 0 \quad (1.1)$$

pri začetnih pogojih

$$\eta(\xi, 0+) = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \tau} (\xi, 0+) = 0, \quad \xi \geq 0 \quad (1.2)$$

in pri robnih pogojih

$$\eta(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} (0, \tau) = -\frac{T(\tau)}{EI}, \quad \tau > 0 \quad (1.3)$$

Na zelo oddaljenem koncu palice mora biti odmak nič in strmina upogibne linije navzgor omejena:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \eta(\xi, \tau) = 0, \quad \left| \frac{\partial \eta}{\partial \xi} (\xi, \tau) \right| < \infty \text{ za } \xi \geq 0 \text{ in } \tau > 0 \quad (1.4).$$

Lepše bomo računali, če že takoj na začetku vpeljemo brezdimenzijske koordinate  $x, t$  in  $w(x, t)$  z relacijami  $\xi = Lx$ ,  $\tau = Mt$  in  $\eta(\xi, \tau) = Ww(x, t)$ . Poleg tega zapišimo vrtilni moment  $T(\tau)$  v obliki  $T(\tau) = T_0 \mu(\tau)$ , pri čemer so  $M, W$  in  $T_0$  konstante,  $\mu(\tau)$  pa časovna funkcija. Vpeljemo še funkcijo  $m(t)$  z razmerjem  $m(t) = \mu(t)$ . Če izberemo  $M$  in  $W$  po formulah

$$M = L^2 \sqrt{\frac{\varrho S}{EI}}, \quad W = \frac{L^2 T_0}{EI} \quad (1.5),$$

potem se naš problem prevede na reševanje parcialne diferencialne enačbe

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} (x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (x, t) = 0, \quad x \geq 0, \quad t > 0 \quad (1.6)$$

pri začetnih pogojih

$$w(x, 0+) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} (x, 0+) = 0, \quad x \geq 0 \quad (1.7)$$

in pri robnih pogojih

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} (0, t) = -m(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w(x, t) = 0$$

za  $t > 0$

$$\text{in } \left| \frac{\partial w}{\partial x} (x, t) \right| < \infty \text{ za } x \geq 0, \quad t > 0 \quad (1.8).$$

Z metodo separacije spremenljivk problema ne moremo rešiti, koeficiente v dobljeni vrsti je nemogoče izračunati pri danih začetnih in robnih pogojih. Zato bomo ubrali malo drugačno pot.

## 2. REŠEVANJE Z LAPLACEOVIM TRANSFORMACIJOM

Rešitev bomo iskali z metodo Laplaceove transformacije. Rešitev bomo skušali najti med funkcijami  $w(x, t)$ , ki so enake 0 za  $t < 0$ . Predpostavili bomo, da je  $w(x, t)$  glede na  $x$  štirikrat odvedljiva za  $x \geq 0$  pri vsakem  $t > 0$ . Za vsak  $x \geq 0$  pa naj bo še  $w(x, t)$  glede na  $t$  dvakrat odvedljiva na  $t$  in za vsa kompleksna števila  $s$ , ki imajo dovolj velik realni del, naj obstajajo integrali

$$\int_0^\infty w(x, t) \exp(-st) dt, \quad \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial t} (x, t) \exp(-st) dt,$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} (x, t) \exp(-st) dt$$

Prvi od teh integralov je Laplaceova transformacija funkcije  $w(x, t)$  glede na spremenljivko  $t$ . Označimo:

$$W(x, s) = \int_0^\infty w(x, t) \exp(-st) dt \quad (2.1)$$

Z uporabo znanih lastnosti Laplaceove transformacije (glej na primer [1], [2], [3]), dobimo iz enačbe (1.6) in iz začetnih pogojev (1.7) navadno diferencialno enačbo

$$\frac{d^4 W}{dx^4}(x, s) + s^2 W(x, s) = 0 \quad (2.2)$$

Kakor je znano iz teorije navadnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti, iščemo rešitev enačbe (2.2) v obliki  $W(x, s) = \exp(kx)$ . Za število  $k$  dobimo karakteristično enačbo  $k^4 + s^2 = 0$ , ki ima korene ( $\sqrt{s}$  ima za  $s > 0$  pozitivno vrednost)  $k_1 = -\sqrt{s} \exp(\pi i/4)$ ,  $k_2 = -\sqrt{s} \exp(\pi i/4)$ ,  $k_3 = \sqrt{s} \exp(\pi i/4)$ ,  $k_4 = \sqrt{s} \exp(-\pi i/4)$ . Splošna rešitev enačbe (2.2) je torej oblike

$$W(x, s) = A \exp(k_1 x) + B \exp(k_2 x) + C \exp(k_3 x) + D \exp(k_4 x) \quad (3)$$

Zaradi tretjega pogoja v (1.8) je  $C = D = 0$ , ker sta realna dela števil  $k_3$  in  $k_4$  pozitivna.

Naj bo  $\tilde{M}(s)$  Laplaceova transformiranka funkcije  $m(t)$ :

$$\tilde{M}(s) = \int_0^\infty m(t) \exp(-st) dt \quad (2.3)$$

Potem iz prih dveh pogojev v (1.8) dobimo za  $A$  in  $B$  sistem enačb  $A + B = 0$ ,  $Asi - Bs_i = \tilde{M}(s)$ . Po krajšem elementarnem računu izvemo:

$$W(x, s) = \frac{\tilde{M}(s)}{s} \exp(-x\sqrt{s}/2) \sin(x\sqrt{s}/2) \quad (2.4)$$

Obstaja vč izraz, s katerim rešujemo sistem enačb (1), (2), (3). V tem delu bomo uporabili vrtinčno-hitrostni izraz.

Vpeljimo funkciji  $W_1(s)$  in  $W_2(x, s)$  takole:

$$W_1(s) = \frac{\tilde{M}(s)}{\sqrt{s}}, \quad W_2(x, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \exp(-x\sqrt{s}/2) \sin(x\sqrt{s}/2) \quad (2.5)$$

Če poznamo izvirni funkciji  $w_1(t)$  in  $w_2(x, t)$ , ki imata za Laplaceovi transformiranki po (2.1) ravno funkciji  $W_1(s)$  in  $W_2(x, s)$ , potem dobimo po izreku o konvoluciji iz (2.4) rešitev

$$w(x, t) = \int_0^t w_1(t-t') w_2(x, t') dt' \quad (2.6)$$

Do izvirnika funkcije  $W_2(x, s)$  pridemo z uporabo preglednic v [3]. Tako dobimo naslednji izraz:

$$w_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin \frac{x^2}{4t} \quad (2.7)$$

Do tega rezultata pridemo z uporabo formule za obratno Laplaceovo transformacijo

LEOPOLD ŠKERGET

### 3. PRIMER

Za primer vzemimo trenutni sunek vrtilnega momenta ob času  $\tau = 0$ :  $T(\tau) = T_0 \delta(\tau)$ , kjer je  $\delta(\tau)$  Diracova impulzna funkcija. Tedaj je  $m(t) = \delta(t)$ ,  $\tilde{M}(s) = 1$  in  $W_1(s) = 1/\sqrt{s}$ . Izvirna funkcija za  $W_1(s)$  je  $w_1(t) = 1/\sqrt{\pi t}$ . Po formuli (2.6) dobimo odziv palice na zgoraj opisano motnjo:

$$w(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\sin(x^2/4t')}{\sqrt{t'(t-t')}} dt' \quad (3.1)$$

kjer so:  $S$  – točka na robu,  $x$  – točka v območju  $\Omega$ ,  $\xi$  – izvirna točka na robu ali v območju  $\Omega$ ,  $\Gamma$  – gladični tok,  $\Gamma_0$  – tok na gladkem robu in  $c(\xi) = \beta/2\pi$  za točko na negladkem robu,  $\alpha$  – kot, ki ga oklepata tangenčno na robu,  $\beta$  – predpisemo vrednost potenciala,  $r_{\xi S} = \sqrt{(x_S - x_\xi)^2 + (y_S - y_\xi)^2}$  – razdalja med točkama  $\xi$  in  $S$ .

Vpeljimo v ta integral novo integracijsko spremenljivko  $y$  in novo mejo  $u$  z

Potencialni tok je predstavljen z rednimi integrali, medtem ko območni potencial  $y = \frac{x^2}{4t}$ ,  $u = \frac{x^2}{4t}$  je vrednost na robu in  $h(x)$  nega polna.

Integralna vredna transformacija vravnosti je

Po krajšem računu dobimo naslednjo obliko rešitve:

$$w(x, t) = \frac{u}{\pi} \int_u^\infty \frac{\sin y dy}{y \sqrt{y-u}}$$

Za pozitiven parameter  $a$  vpeljimo integral  $F(a)$  takole:

$$F(a) = \int_u^\infty \frac{\sin ay dy}{y \sqrt{y-u}} \quad (3.3)$$

Ta integral se da izraziti s Fresnelovima integraloma ([1]):

$$C_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt, \quad S_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

V zvezi z njima povejmo, da velja:

$$C_2(0) = S_2(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} C_2(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} S_2(x) = \frac{1}{2}$$

S skrbno analizo ugotovimo, da se sme odvajati integral (3.3) po Leibnizovem pravilu in dobimo:

$$F'(a) = \int_a^\infty \frac{\cos ay \ dy}{\sqrt{y-a}} = \cos au \int_0^\infty \frac{\cos az \ dz}{\sqrt{z}} -$$

$$- \sin au \int_0^\infty \frac{\sin az \ dz}{\sqrt{z}}$$

Zelo dolga homogeno obliko sestavlja enačba (3.3).

Če uporabimo Fresnelova integrala, je končna oblika na začetku v mirujočem stanju. Če pa je  $t=0$  začne na drugem koncu, kjer je vse vpeta delovati čas (t), spremeni  $F'(a) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\cos ua}{\sqrt{a}} - \frac{\sin ua}{\sqrt{a}} \right)$ . Torej zanešljamo. Kako zanikal, da je  $a=t$ .

Os z je usmerjena tako, kakor prikazuje slika 1. Odmik je premenljivka opisuje parabolico diferencialna enačba

$$F(a) = \frac{\pi}{\sqrt{a}} (C_2(au) - S_2(au))$$

nazadnje

$$w(x, t) = C_2\left(\frac{x^2}{4t}\right) - S_2\left(\frac{x^2}{4t}\right) \quad t > 0 \quad (3.4)$$

Numerično lahko izračunamo Fresnelova integrala  $C_2(x)$  in  $S_2(x)$  z metodami, ki so opisane v [1]. Prva metoda uporablja Besselove funkcije s polovičnimi indeksi, druga metoda pa aproksimacijo, ki zagotavlja izračun Fresnelovih integralov z aproksimacijo na tri decimalke natančno. Po tej metodi, ki je primerna za hitro konstrukcijo grafov, bomo dobili obliko krivulje  $w(1, t)$ . Vpeljati je treba funkcije

Na zelo oddaljenem koncu palice mora biti odmik nič in strmina upogibne linije neznaromejena:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(\xi, t) = 0 \quad \text{za } \xi \geq 0 \text{ in } t > 0 \quad (1.4)$$

Lepše bomo računali, če že takoj na začetku vpeljemo brezdimenzijske koordinate  $x, t$  in  $w(x, t)$  z relacijami  $\xi = Lx$ ,  $\tau = M t \ln \eta(\xi, t) = W w(x, t)$ . Počeg tega zapisimo vnutrišnjem momentu  $L(t) = \eta(\xi, t)$  in  $T(t) = \tau(t)$  pa časovna funkcija. Vpeljemo še funkcijo  $m(t)$  z razmerjem  $m(t) = \mu(t)$ . Če izberemo  $M$  in  $W$  po formulah

A vsesi s temi podatki, da velja:

$$\frac{1}{\xi} = (x)^2 M^{-1} \quad L = \int_{-\infty}^x \frac{ds}{\xi} \quad \text{mit } 0 = (0)^2 M^{-1} = (0)$$

$$f(x) = (1 + 0,962 x)/(2 + 1,792 x + 3,104 x^2),$$

$$g(x) = 1/(2 + 4,142 x + 3,492 x^2 + 6,67 x^3), \quad h(x) =$$

MARKO RAZPET  $g(x) = 1/(2 + 4,142 x + 3,492 x^2 + 6,67 x^3)$ ,  $h(x) =$   
S potrebno uporabiti rezultate Laplaceove transformacije. Izraz  $\int_0^\infty \frac{\cos az}{\sqrt{z}} dz$  je enak  $\frac{1}{2}(x^2 - 0,5)$ , kar je  $\int_0^\infty \frac{\sin az}{\sqrt{z}} dz$  enak  $0$ . Torej je  $w(x, t) = (x^2 - 0,5) \frac{\cos at}{\sqrt{2\pi}} + (x^2 + 0,5) \frac{\sin at}{\sqrt{2\pi}}$ .

$F(x) = \sqrt{2}(f(x) \cos h(x) + g(x) \sin h(x))$ .

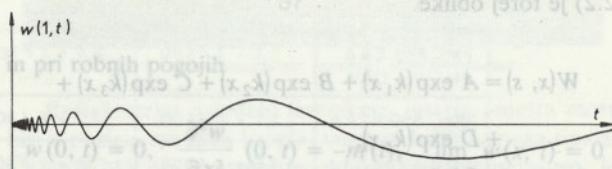
F(x) =  $\sqrt{2}(f(x) \cos h(x) + g(x) \sin h(x))$ .

Potem je zadost natančno vzeti aproksimacijo

Karakteristični rezultati so podani v tabeli 1.

$w(x, t) = F\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi t}}\right)$ .

Časovni potek funkcije  $w(1, t)$  prikazuje slika 2.



Slika 2

Pri  $t = 1/\pi$  se pojavi zadnji ekstrem, nato se graf umirja.

#### LITERATURA

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York 1965.

[2] R. Courant, D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1968.

[3] F. Oberhettinger, L. Badii, Tables of Laplace Transforms, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1973.

Avtorjev naslov: mag Marko Razpet, dipl. inž. mat. Fakulteta za strojništvo, Ljubljana

Rešitev besedila (1.1) in (1.2) na podlagi enačbe (3.4). Rešitev bomo skušali najti med funkcijami  $w(x, t)$ , ki so enake 0 za  $t < 0$ . Predpostavili bomo, da je  $w(x, t)$  gladka na  $t = 0$ . Sledi odvodljiva za  $t \geq 0$  prav (1.1). Za vsak  $t > 0$  pa je  $w(x, t) = 0$  in  $w(x, 0) = 0$ . Vsi odvodljivi na  $t$  in za vsa kompleksna števila  $s$ , ki imajo dovolj velik realni del, pa obvezno integrali

Če poskusimo izraziti funkcijo  $w(1, t)$  v obliki  $w(1, t) = \int_0^\infty e^{ist} w(s) ds$

je  $w(1, t) = \int_0^\infty e^{ist} \left( C_2\left(\frac{s^2}{4t}\right) - S_2\left(\frac{s^2}{4t}\right) \right) ds$

Do izračuna funkcije  $w(x, t)$  bomo z uporabo prvega

člena v [3] izvedeli eksponentne integralne funkcije  $I_n(x) = \int_0^\infty e^{-xt} t^n dt$ .

Pri od teh integralov je Laplaceova transformiranka funkcije  $w(x, t)$  glede na  $t$  določljivo. Označimo: