UDK 519.6:534.113:531.232

Nihanje palice, obremenjene na vrtilni moment

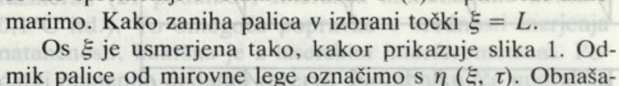
MARKO RAZPET

1. UVOD

V prispevku rešujemo z analitičnimi metodami naslednji problem:

Zelo dolga homogena palica z gostoto ϱ, elastičnostnim modulom E, konstantnim prerezom S in vztrajnostnim momentom prereza I je na oddaljenem koncu naslonjena in na začetku v mirujočem stanju. Ob času $\tau = 0$ začne na drugem koncu, kjer je palica vrtljivo vpeta, delovati časovno spremenljivi vrtilni moment $T(\tau)$. Vpliv teže zanemarimo. Kako zaniha palica v izbrani točki $\xi = L$.

Os ξ je usmerjena tako, kakor prikazuje slika 1. Odmik palice od mirovne lege označimo s $\eta(\xi, \tau)$. Obnašanje te spremenljivke opisuje parcialna diferencialna enačba



Slika 1.

$$\frac{EI}{\varrho S}\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4}(\xi,\tau) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2}(\xi,\tau) = 0, \quad \xi \geqq 0, \quad \tau > 0 \quad (1.1)$$

pri začetnih pogojih

$$\eta(\xi, 0+) = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \tau}(\xi, 0+) = 0, \quad \xi \geqq 0 \quad (1.2)$$

in pri robnih pogojih

$$\eta(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}(0, \tau) = -\frac{T(\tau)}{EI}, \quad \tau > 0 \quad (1.3).$$

Na zelo oddaljenem koncu palice mora biti odmik nič in strmina upogibne linije navzgor omejena:

$$\lim_{\xi \to \infty} \eta(\xi, \tau) = 0, \quad \left| \frac{\partial \eta}{\partial \xi}(\xi, \tau) \right| < \infty \text{ za } \xi \geqq 0 \text{ in } \tau > 0 \quad (1.4).$$

Lepše bomo računali, če že takoj na začetku vpeljemo brezdimenzijske koordinate x, t in $w(x, t)$ z relacijami $\xi = Lx$, $\tau = Mt$ in $\eta(\xi, \tau) = Ww(x, t)$. Poleg tega zapišimo vrtilni moment $T(\tau)$ v obliki $T(\tau) = T_0 \mu(\tau)$, pri čemer so M, W in T_0 konstante, $\mu(\tau)$ pa časovna funkcija. Vpeljemo še funkcijo $m(t)$ z razmerjem $m(t) = \mu(\tau)$. Če izberemo M in W po formulah

$$M = L^2 \sqrt{\frac{\varrho S}{EI}}, \quad W = \frac{L^2 T_0}{EI} \quad (1.5),$$

potem se naš problem prevede na reševanje parcialne diferencialne enačbe

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0, \quad x \geqq 0, \quad t > 0 \quad (1.6)$$

pri začetnih pogojih

$$w(x, 0+) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0+) = 0, \quad x \geqq 0 \quad (1.7)$$

in pri robnih pogojih

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = -m(t), \quad \lim_{x \to \infty} w(x, t) = 0$$

za $t > 0$

$$\text{in} \quad \left| \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \right| < \infty \text{ za } x \geqq 0, \quad t > 0 \quad (1.8).$$

Z metodo separacije spremenljivk problema ne moremo rešiti, koeficiente v dobljeni vrsti je nemogoče izračunati pri danih začetnih in robnih pogojih. Zato bomo ubrali malo drugačno pot.

2. REŠEVANJE Z LAPLACEOVO TRANSFORMACIJO

Rešitev bomo iskali z metodo Laplaceove transformacije. Rešitev bomo skušali najti med funkcijami $w(x, t)$, ki so enake 0 za $t < 0$. Predpostavili bomo, da je $w(x, t)$ glede na x štirikrat odvedljiva za $x \geqq 0$ pri vsakem $t > 0$. Za vsak $x \geqq 0$ pa naj bo še $w(x, t)$ glede na t dvakrat odvedljiva na t in za vsa kompleksna števila s, ki imajo dovolj velik realni del, naj obstajajo integrali

$$\int_0^\infty w(x, t) \exp(-st)\, dt, \quad \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) \exp(-st)\, dt,$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \exp(-st)\, dt$$

Prvi od teh integralov je Laplaceova transformiranka funkcije $w(x, t)$ glede na spremenljivko t. Označimo:

$$W(x, s) = \int_0^\infty w(x, t) \exp(-st)\, \mathrm{d}t \qquad (2.1).$$

Z uporabo znanih lastnosti Laplaceove transformacije (glej na primer [1], [2], [3]), dobimo iz enačbe (1.6) in iz začetnih pogojev (1.7) navadno diferencialno enačbo

$$\frac{\mathrm{d}^4 W}{\mathrm{d}x^4}(x, s) + s^2 W(x, s) = 0 \qquad (2.2).$$

Kakor je znano iz teorije navadnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti, iščemo rešitev enačbe (2.2) v obliki $W(x, s) = \exp(kx)$. Za število k dobimo karakteristično enačbo $k^4 + s^2 = 0$, ki ima korene ($\sqrt{s}$ ima za $s > 0$ pozitivno vrednost) $k_1 = -\sqrt{s} \exp(\pi i/4)$, $k_2 = -\sqrt{s} \exp(\pi i/4)$, $k_3 = \sqrt{s} \exp(\pi i/4)$, $k_4 = \sqrt{s} \exp(-\pi i/4)$. Splošna rešitev enačbe (2.2) je torej oblike

$$W(x, s) = A \exp(k_1 x) + B \exp(k_2 x) + C \exp(k_3 x) + D \exp(k_4 x).$$

Zaradi tretjega pogoja v (1.8) je $C = D = 0$, ker sta realna dela števil k_3 in k_4 pozitivna.

Naj bo $\widetilde{M}(s)$ Laplaceova transformiranka funkcije $m(t)$:

$$\widetilde{M}(s) = \int_0^\infty m(t) \exp(-st)\, \mathrm{d}t \qquad (2.3).$$

Potem iz prvih dveh pogojev v (1.8) dobimo za A in B sistem enačb $A + B = 0$, $Asi - Bsi = \widetilde{M}(s)$. Po krajšem elementarnem računu izvemo:

$$W(x, s) = \frac{\widetilde{M}(s)}{s} \exp\left(-x\sqrt{s/2}\right) \sin\left(x\sqrt{s/2}\right) \qquad (2.4).$$

Vpeljimo funkciji $W_1(s)$ in $W_2(x, s)$ takole:

$$W_1(s) = \frac{\widetilde{M}(s)}{\sqrt{s}}, \quad W_2(x, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \exp\left(-x\sqrt{s/2}\right) \sin\left(x\sqrt{s/2}\right) \qquad (2.5).$$

Če poznamo izvirni funkciji $w_1(t)$ in $w_2(x, t)$, ki imata za Laplaceovi transformiranki po (2.1) ravno funkciji $W_1(s)$ in $W_2(x, s)$, potem dobimo po izreku o konvoluciji iz (2.4) rešitev

$$w(x, t) = \int_0^t w_1(t - t')\, w_2(x, t')\, \mathrm{d}t' \qquad (2.6)$$

Do izvirnika funkcije $W_2(x, s)$ pridemo z uporabo preglednic v [3]. Tako dobimo naslednji izraz:

$$w_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin \frac{x^2}{4t} \qquad (2.7).$$

Do tega rezultata pridemo z uporabo formule za obratno Laplaceovo transformacijo

3. PRIMER

Za primer vzemimo trenutni sunek vrtilnega momenta ob času $\tau = 0$: $T(\tau) = T_0\, \delta(\tau)$, kjer je $\delta(\tau)$ Diracova impulzna funkcija. Tedaj je $m(t) = \delta(t)$, $\widetilde{M}(s) = 1$ in $W_1(s) = 1/\sqrt{s}$. Izvirna funkcija za $W_1(s)$ je $w_1(t) = 1/\sqrt{\pi t}$. Po formuli (2.6) dobimo odziv palice na zgoraj opisano motnjo:

$$w(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{\sin(x^2/4t')}{\sqrt{t'(t - t')}}\, \mathrm{d}t' \qquad (3.1).$$

Vpeljimo v ta integral novo integracijsko spremenljivko y in novo mejo u z

$$y = \frac{x^2}{4t'}, \quad u = \frac{x^2}{4t} \qquad (3.2).$$

Po krajšem računu dobimo naslednjo obliko rešitve:

$$w(x, t) = \frac{\sqrt{u}}{\pi} \int_u^\infty \frac{\sin y\, \mathrm{d}y}{y\sqrt{y - u}}$$

Za pozitiven parameter a vpeljimo integral $F(a)$ takole:

$$F(a) = \int_u^\infty \frac{\sin ay\, \mathrm{d}y}{y\sqrt{y - u}} \qquad (3.3).$$

Ta integral se da izraziti s Fresnelovima integraloma ([1]):

$$C_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t, \quad S_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t.$$

V zvezi z njima povejmo, da velja:

$$C_2(0) = S_2(0) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} C_2(x) = \lim_{x \to \infty} S_2(x) = \frac{1}{2}$$

S skrbno analizo ugotovimo, da se sme odvajati integral (3.3) po Leibnizovem pravilu in dobimo:

$$F'(a) = \int_u^\infty \frac{\cos a y \ \mathrm{d}y}{\sqrt{y-u}} = \cos a u \int_0^\infty \frac{\cos a z \ \mathrm{d}z}{\sqrt{z}} - $$

$$- \sin au \int_0^\infty \frac{\sin a z \ \mathrm{d}z}{\sqrt{z}}.$$

Če uporabimo Fresnelova integrala, je končna oblika

$$F'(a) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos ua}{\sqrt{a}} - \frac{\sin ua}{\sqrt{a}} \right).$$

Ker je $F(0) = 0$, dobimo z integracijo po parametru a

$$F(a) = \frac{\pi}{\sqrt{u}} \left(C_2(au) - S_2(au) \right)$$

nazadnje

$$w(x, t) = C_2\left(\frac{x^2}{4t}\right) - S_2\left(\frac{x^2}{4t}\right) \qquad (3.4).$$

Numerično lahko izračunamo Fresnelova integrala $C_2(x)$ in $S_2(x)$ z metodami, ki so opisane v [1]. Prva metoda uporablja Besselove funkcije s polovičnimi indeksi, druga metoda pa aproksimacijo, ki zagotavlja izračun Fresnelovih integralov z aproksimacijo na tri decimalke natančno. Po tej metodi, ki je primerna za hitro konstrukcijo grafov, bomo dobili obliko krivulje $w(1, t)$. Vpeljati je treba funkcije

$$f(x) = (1 + 0{,}962\, x) / (2 + 1{,}792\, x + 3{,}104\, x^2),$$

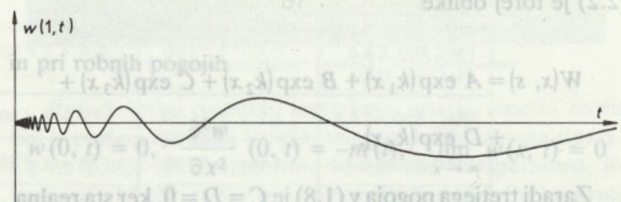
$$g(x) = 1 / (2 + 4{,}142\, x + 3{,}492 x^2 + 6{,}67 x^3), \ h(x) = \frac{\pi}{2}(x^2 - 0{,}5).$$

$$F(x) = \sqrt{2}\,(f(x) \cos h(x) + g(x) \sin h(x)).$$

Potem je zadosti natančno vzeti aproksimacijo

$$w(x, t) = F\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi t}}\right).$$

Časovni potek funkcije $w(1, t)$ prikazuje slika 2.



Slika 2

Pri $t = 1/\pi$ se pojavi zadnji ekstrem, nato se graf umirja.

LITERATURA

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York 1965.

[2] R. Courant, D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1968.

[3] F. Oberhettinger, L. Badii, Tables of Laplace Transforms, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1973.

Avtorjev naslov: mag Marko Razpet, dipl. inž. mat.
Fakulteta za strojništvo,
Ljubljana