

UDK 519.6:532.517.2

Robna integralska metoda za časovno odvisne difuzijsko-konvekcijske probleme

ZLATKO REK - LEOPOLD ŠKERGET

1. UVOD

Časovno odvisen tok laminarnega nestisljivega viskoznega fluida in transport energije opišemo z zakoni ohranitve mase, gibalne količine in energije. Vzgonske sile, ki prevladujejo pri naravni konvekciji, se pojavijo zaradi spremembe gostote fluida, ki je odvisna od temperature. Podamo jih z Bussinesqovo aproksimacijo $\varrho = \varrho_0[1 - \beta(T - T_0)]$. ϱ_0 je referenčna gostota pri temperaturi T_0 , in β koeficient prostorninske razteznosti.

Dogajanje opisujejo naslednje ohranitvene enačbe:

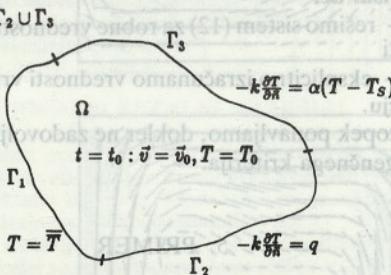
$$\text{masa} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

gibalna količina

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{\varrho} \nabla p + [1 - \beta(T - T_0)] \mathbf{g} \quad (2)$$

$$\text{energija} \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = a \nabla^2 T \quad (3)$$

Predpisati moramo še začetne in robne pogoje (sl.1).



Sl. 1. Začetni in robni pogoji

Snovne lastnosti so: ν – kinematična viskoznost, a – difuzivnost, α – koeficient prestopa toplote, T_s – temperaturna okolica in \mathbf{g} – gravitacijski pospešek.

Obstaja več izrazov, s katerimi rešujemo sistem enačb (1), (2), (3). V tem delu bomo uporabili vrtinčno-hitrostni izraz. Z uvedbo vrtinčnosti

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (4)$$

razdelimo reševanje toka fluida na kinematski in kinetski del. Prvega predstavlja enačbi (1) in (4). Ker je hitrostno polje brezizvorno, vpeljemo vektorski potencial ψ tako, da je $\mathbf{v} = \nabla \times \psi$ in je zahteva iz enačbe (1) izpolnjena. Kinematski del tako zapišemo v obliki za vektorski potencial hitrosti

$$\nabla^2 \psi + \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (5)$$

Ko poiščemo rotor leve in desne strani enačbe (2), upoštevajoč $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \nu^2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, dobimo za kinetski del vektorsko transportno enačbo za vrtinčnost

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} - \nabla \times \beta(T - T_0) \mathbf{g} \quad (6)$$

Opozimo podobnost med enačbo (3) in (6), iz česar izhaja podoben potek reševanja. Ker v nadaljevanju obravnavamo razmere v ravnini, se enačbe precej poenostavijo. Tako so: $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ in $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$, ter $\mathbf{g} = (g_x, g_y, 0)$.

2. ROBNE INTEGRALSKIE ENAČBE

Enačbe (3), (5), (6), ki so parcialne diferencialne enačbe paraboličnega oziroma eliptičnega tipa, prevedemo z Greenovimi teoremi ali metodo utežnih ostankov v ustrezne robne integralske enačbe. Tako dobimo za kinematiko robno enačbo

$$\begin{aligned} c(\xi) \mathbf{v}(\xi) + \int_{\Gamma} [\nabla u_E^*(\xi; S) \cdot \mathbf{n}(S)] \mathbf{v}(S) d\Gamma &= \\ &= \int_{\Gamma} [\nabla u_E^*(\xi; S) \times \mathbf{n}(S)] \times \mathbf{v}(S) d\Gamma + \quad (7), \\ &+ \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}(s) \times \nabla u_E^*(\xi; s) d\Omega + \end{aligned}$$

kjer so: S – točka na robu Γ , s – točka v območju Ω , ξ – izvorna točka na robu ali v območju, $c(\xi) = 1$ za točko v območju, $c(\xi) = \frac{1}{2}$ za točko na gladkem robu in $c(\xi) = \beta/2\pi$ za točko na negladkem robu, β – kot, ki ga oklepata tangenti na rob v točki ξ , $u_E^*(\xi; s) = (\frac{1}{2}\pi) \ln(r_0/r_{\xi, s})$ je eliptična osnovna rešitev, r_0 – polmer, kjer predpišemo vrednost potenciala 0, $r_{\xi, s} = \sqrt{(x_{\xi} - x_s)^2 + (y_{\xi} - y_s)^2}$ – razdalja med točkama ξ in s .

Potencialni tok je predstavljen z robnimi integrali, medtem ko območni integral izraža vpliv vrtinčnosti na razvoj hitrostnega polja.

Integralska oblika transporta vrtinčnosti je

$$\begin{aligned} c(\xi) \boldsymbol{\omega}(\xi, \tau) + \nu \int \int_{\Gamma} \boldsymbol{\omega}(S, t) q_P^*(\xi, \tau; S, t) d\Gamma dt &= \\ &= \nu \int \int_{\Gamma} q^*(S, t) u_P^*(\xi, \tau; S, t) d\Gamma dt - \\ &- \int \int_{\Gamma} \boldsymbol{\omega}(S, t) v_n(S, t) + \\ &+ \beta g_i T(S, t) u_P^*(\xi, \tau; S, t) d\Gamma dt + \quad (8), \\ &+ \int \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}(s, t) \mathbf{v}(s, t) + \\ &+ \beta \left\{ \frac{g_y}{g_x} \right\} T(s, t) \cdot \nabla u_P^*(\xi, \tau; s, t) d\Omega dt + \\ &+ \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}(s, t) = 0 u_P^*(\xi, \tau; s, t = 0) d\Omega \end{aligned}$$

kjer je

$$u_P^*(\xi, \tau; s, t) = \begin{cases} 0 & ; t < \tau \\ \frac{1}{4\pi\nu(\tau-t)} \exp\left(-\frac{r^2(\xi, s)}{4a(\tau-t)}\right) & ; t \geq \tau \end{cases}$$

parabolična osnovna rešitev, $q_P^*(\xi, \tau; s, t) = (\partial u_P^*/\partial n)(\xi, \tau; s, t) = \nabla u_P^*(\xi, \tau; s, t) \cdot \mathbf{n}$ je odvod parabolične osnovne rešitve po normali, (ξ, τ) je krajevno-časovna izvorna točka, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ in $t = (-n_y, n_x)$ sta enotska normala in tangentna na rob Γ , $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ je normalna komponenta hitrosti na robu in $g_i = \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}$ tangentna komponenta zemeljskega pospeška, $q^*(S, t)$ je fluks vrtinčnosti na robu, $q(S, t)$ pa topotni fluks na robu.

Vidimo, da je difuzija vrtinčnosti opisana s prvo dvema robnima integraloma. Tretji integral pomeni kon-

vekcijsko vrtinčnosti in njen generacijo na robu. Prvi območni integral se pojavi zaradi naravne in prisilne konvekcije vrtinčnosti v območju. Drugi območni integral pomeni začetne pogoje za vrtinčnost.

Iz že omenjene podobnosti med enačbo transporta vrtinčnosti in energije izhaja robna enačba za temperaturno polje

$$\begin{aligned} c(\xi) T(\xi, \tau) + a \iint_{\Gamma} T(S, t) q_p^*(\xi, \tau; S, t) d\Gamma dt = \\ = a \iint_{\Gamma} q(S, t) u_p^*(\xi, \tau; S, t) d\Gamma dt - \\ - \iint_{\Gamma} T(S, t) v_n(S, t) u_p^*(\xi, \tau; S, t) d\Gamma dt + \\ + \iint_{\Omega} T v(s, t) \cdot \nabla u_p^*(\xi, \tau; s, t) d\Omega dt + \\ + \int_{\Omega} T(s, t = 0) u_p^*(\xi, \tau; s, t = 0) d\Omega \end{aligned} \quad (9).$$

3. DISKRETIZACIJA

Rob Γ in območje Ω razdelimo na N_c robnih elementov in N_e notranjih celic. Vrednosti spremenljivk aproksimiramo po elementih in celicah z ustreznimi časovnimi in krajevnimi interpolacijskimi funkcijami in vozliščnimi vrednostmi.

Za kinematski del na robu $v_i = \{\Phi\}^t \{V_i\}$, in v območju $\omega = \{\varphi\}^t \{W\}$.

Za kinetski in energijski del na robu $\omega = \{\Phi\}^t \{\Psi\}^t \{W\}$, $q^w = \{\Phi\}^t \{\Psi\}^t \{Q^w\}$, $q = \{\Phi\}^t \{\Psi\}^t \{Q\}$, $T v_i = \{\Phi\}^t \{\Psi\}^t \{TV_i\}$, $T = \{\Phi\}^t \{\Psi\}^t \{T\}$, $\omega v_n = \{\Phi\}^t \{\Psi\}^t \{WV_n\}$, in v območju: $\omega v_i = \{\varphi\}^t \{\Psi\}^t \{WV_i\}$, $T v_i = \{\varphi\}^t \{\Psi\}^t \{TV_i\}$, $\omega = \{\varphi\}^t \{W\}$, $T = \{\varphi\}^t \{T\}$. Pri tem pomenijo: $i = x, y$, $\{\Phi\}$ – interpolacijsko funkcijo na robu, $\{\varphi\}$ – interpolacijsko funkcijo v območju, $\{\Psi\}$ – časovno interpolacijsko funkcijo, $\{V_i\}$, $\{W\}$, $\{Q^w\}$, $\{Q\}$, $\{TV_i\}$, $\{T\}$, $\{WV_n\}$, $\{WV_i\}$ – vrednosti v vozliščih elementa oziroma celice.

Ko uvedemo integrale:

$$\begin{aligned} \{h^P\} &= \int_{\Gamma_c} \{\Phi\} \int_{\tau}^{\infty} q_p^*(\xi, \tau; S, t) dt d\Gamma \\ \{g^P\} &= \int_{\Gamma_c} \{\Phi\} \int_{\tau}^{\infty} u_p^*(\xi, \tau; S, t) dt d\Gamma \\ \{d_i^P\} &= \int_{\Omega_c} \{\varphi\} \int_{\tau}^{\infty} q_p^*(\xi, \tau; S, t) dt d\Omega \\ \{b^P\} &= \int_{\Omega_c} \{\varphi\} \int_{\tau}^{\infty} u_p^*(\xi, \tau; S, t = 0) dt d\Omega \\ \{h^E\} &= \int_{\Gamma_c} \{\Phi\} q_E^*(\xi, \tau; S, t) d\Gamma \\ \{h_t^E\} &= \int_{\Gamma_c} \{\Phi\} q_{tE}^*(\xi, \tau; S, t) d\Gamma \\ \{d_i^E\} &= \int_{\Omega_c} \{\varphi\} q_{iE}^*(\xi, \tau; S, t) d\Omega \end{aligned}$$

in zapišemo enačbe (7), (8), (9) za vse točke, dobimo naslednji sistem enačb, ki je za rob impliciten, za vrednosti v območju pa eksplisitен:

$$\{H^E\} \{V_x\} = [H_t^E] \{V_y\} - [D_x^E] \{W\}, \quad (10),$$

$$\{H^E\} \{V_y\} = -[H_t^E] \{V_x\} + [D_x^E] \{W\}, \quad (11),$$

$$\begin{aligned} \{H^P\} \{W\} &= [G^P] \{Q^w\} + \frac{1}{v} [-[G^P] (\{WV_n\} + \beta g_y \{T\}) + \\ &+ [D_x^P] (\{WV_x\} + \beta g_y \{T\}) + \\ &+ [D_y^P] (\{WV_y\} - \beta g_x \{T\}) + \\ &+ [B^P] \{W_0\}] \end{aligned} \quad (12),$$

$$\{H^P\} \{T\} = [G^P] \{Q\} + \frac{1}{a} [-[G^P] (\{TV_n\} + [D_x^P] \{TV_x\} + [D_y^P] \{TV_y\} + [B^P] \{T_0\})] \quad (13).$$

Matrike, označene z velikimi črkami, so sestavljene iz vozliščnih prispevkov integralov, označenih z ustrezno malo črko. Vektorja $\{W_0\}$ in $\{T_0\}$ vsebujeta vrednosti vrtinčnosti in temperatur iz poprejšnjega časovnega koraka.

4. POSTOPEK REŠEVANJA

Pri reševanju uporabljamo naslednjo shemo:

Za vsak časovni korak ponavljamo

– začnemo z začetnimi vrednostmi vrtinčnosti in temperatur

kinematski del

– rešimo sistem (10), (11) za robne vrednosti vrtinčnosti

energijski del

– rešimo sistem (13) za robne vrednosti temperatur in/ali fluksov

– eksplisitno izračunamo temperature v območju

kinetski del

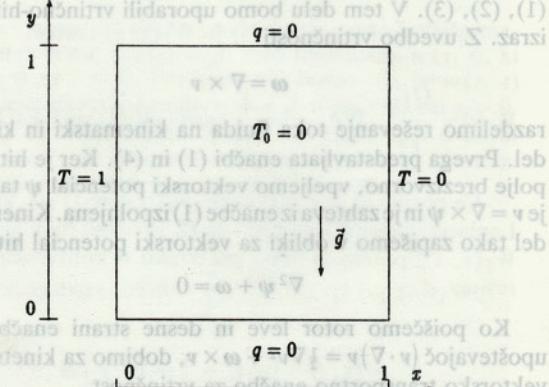
– rešimo sistem (12) za robne vrednosti fluksa vrtinčnosti

– eksplisitno izračunamo vrednosti vrtinčnosti v območju.

Postopek ponavljamo, dokler ne zadovoljimo izbranega konvergenčnega kriterija.

5. PRIMER

Kot primer je obdelana naravna konvekcija v zaprti kotanji (sl. 2). Računamo z različnimi vrednostmi Rayleighjevih števil, in sicer: $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$, za Prandtlovo število $Pr = 1$. $Ra = g\beta\Theta l^3/a$, $Pr = v/a$, l je značilna dolžina, Θ pa razlika temperatur med nasprotnima stenama.



Sl. 2. Naravna konvekcija v zaprti kotanji

Na sliki 3 je prikazan časovni razvoj hitrostnega in temperaturnega polja. Izolinije vrtinčnosti in temperatur za različne Ra prikazuje slika 4. Slike sklepamo, da mora biti za naraščajoče Ra , zaradi velikih gradientov, diskretizacija problema gostejša, če želimo dobro opisati proces.

V zadnjih desetih letih je vse bolj materialov.

- oslojena hitrorezna jekla
 - oslojene karbidne trake
 - kovinska keramika
 - oksidna keramika
 - kubično kristalizirana

Uporabnik lahko rešitev za svojo izdel poveča težave. Tež material, orodje, geotektonično podlagi in voda.

Pogosto naj bi novi rezultati morali biti takšni, kar je počitno napraviti naloge, katerim so v prvi vrsti rešeni napacnega mnenja. Če je res, da je pri rezultatih razumarjanje in razloževanje takrat omejeno in njegovih prednosti podcenjeno, kjer doslej

Izkusnje so pokazalo, da rezalni materiali uveljavljani moramo upoštevati:

- pravilno oceno zmožnosti
- ustrezni postopek ocenjevanja
- pravilno izbiro odrezala

Sole pod temi poglavijem novih rezalnih

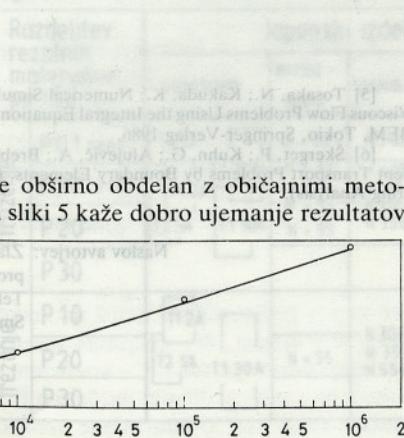
2. IDEALNI REZALNI MATERIAJI

Ideální rezání s obrábcem trdností te v materialu in oksidu je oddalena od ideální

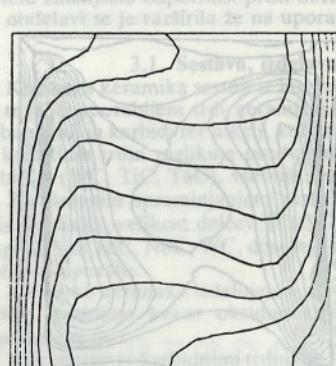
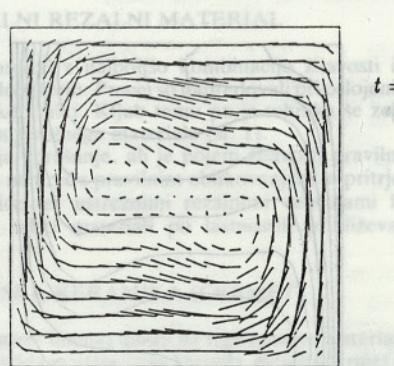
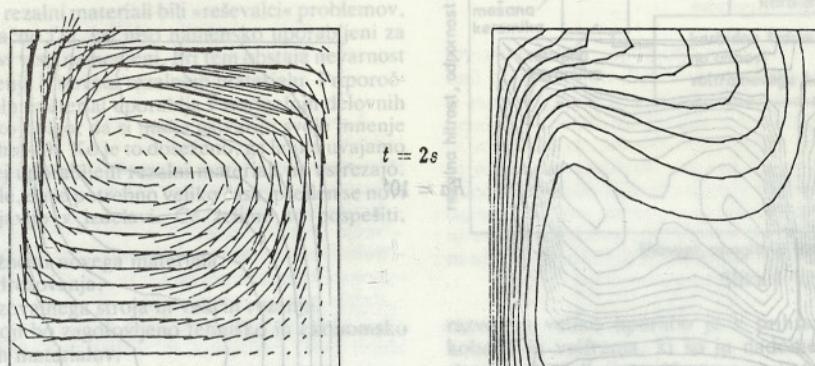
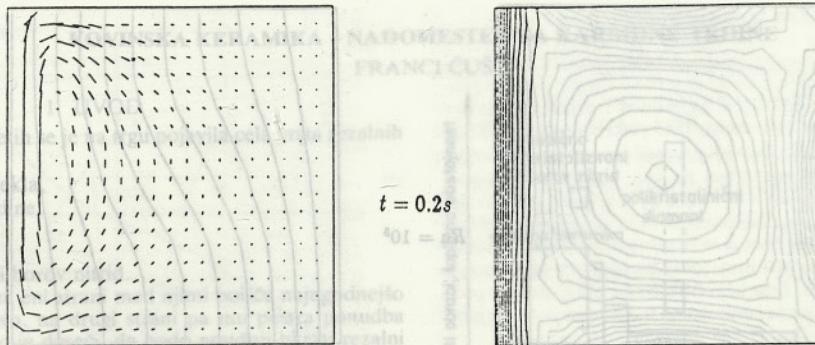
Pri tem se zastavijo definirajoči (2), doslej so vanjem rezalne plošči omogočali, da so se filarmoni.

Pod imenom "Cognac" na osnovi hranjivega alkohola izpeljana je bila vseh vseh materiali zelenega barva, ki so vse bolj uverjajoči.

Sl. 3. Hitrostno polje in izoterme za $Ra = 10^5$



Sl. 5. Primeri uva rezultata RIM - MKR



robne integralne metode (RIM) z rezultati, dobijenimi po metodi končnih razlik (MKR).

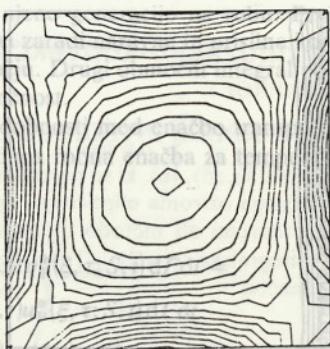
6 SKI ER

Metoda robnih elementov, vrtinčno-hitrostni izraz, je uporabljena za reševanje časovno odvisnega transporta energije v toku fluida. Vzgonske sile so vključene z Bussinesqovo aproksimacijo. Ker osnovna rešitev del transportnega procesa prevede na rob, je numerična shema zelo stabilna.

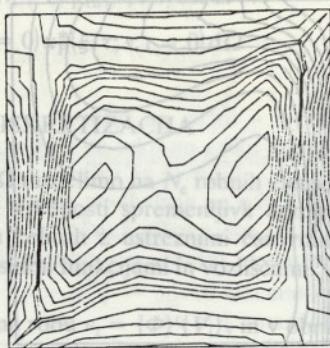
vekijo vrtinčnosti in močni integral se pojavi zaradi težavnosti izračuna vektorske funkcije vrtinčnosti v območju, ki je v tem primeru začetne pogoje za vrtinčnost.

Iz že omenjene potinčnosti in energije izpolje

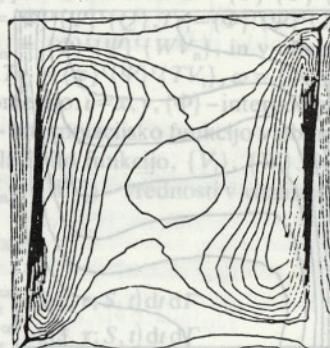
$$c(\xi) T(\xi, t) + a \int_{\Gamma} T(S, t) dS \\ = a \int_{\Gamma} q(S, t) dS \\ - \int_{\Gamma} T(S, t) dS \quad (9)$$



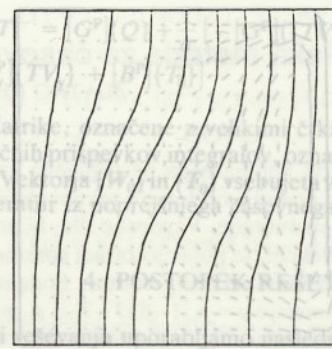
$$R_A = 10^3$$



$$Ra = 10^4$$



$$Ra = 10^5$$



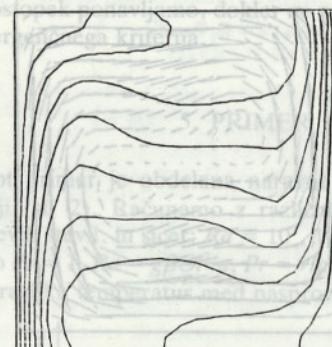
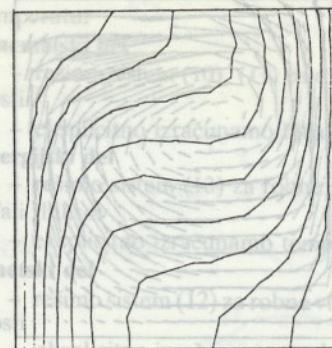
Matrike: oznacenje zveznikovimi, so sestavljene iz označenih parov koordinat, in segajo vseh parov, ki jih je mogoče izbrati na podlagi ustreznosti vrtinčnosti in nevtralnosti.

28

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

REPOSITORIO DE LA UNJA [VER SIGUIENTE](#)

Put the following numbers into shemos as in



Sl. 4. Črte konstantnih vrtinčnosti in temperatur za stacionarno stanje

LITERATURA

- [1] Brebbia, C. A.; Telles, J. and Wrobel, L. C.: Boundary Element Method – Theory and Applications. Springer-Verlag, New York.

[2] De Vahl Davis, G.: Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution. Int. J. Num. Meth. in Fluids (1983), Vol. 3, pp. 249–264.

[3] Onishi, K.; Kuroki, T. and Tanaka, M.: Boundary Element Research (Ed. C. A. Brebbia) (1985), Vol. 2, Chapter 8, pp. 209–229. Springer-Verlag, Berlin and New York.

[4] Škerget, P.; Alujević, A.; Kuhn, G. and Brebbia, C. A.: Natural Convection Flow Problems by BEM. 9th Int. Conf. on BEM, Stuttgart. Computational Mechanics Publications, Springer-Verlag, Berlin 1987.

[5] Tosaka, N.; Kakuda, K.: Numerical Simulation for Incompressible Viscous Flow Problems Using the Integral Equation Method. 8th Int. Conf. on BEM, Tokio, Springer-Verlag 1986.

[6] Škerget, P.; Kuhn, G.; Alujević, A.; Brebbia, C. A.: Time Dependent Transport Problems by Boundary Elements. (Bo objavljeno v Engineering Analysis)

Naslov avtorjev: Zlatko Rek, dipl. inž.
prof. dr. Leopold Škerget,
Tekniška fakulteta Maribor
Smetanova 17