UDK 536.2:519.6:697.35

Prenos toplote na orebrenjih, obdanih z vlažnim zrakom, po metodi robnih elementov

BRANKO NAMESTNIK – DEČAN BEADER - POLDE ŠKERGET

1. UVOD

V termotehniki je zelo pogost pojav prehod toplote prek orebrenih površin. Orebrenja so potrebna vselej, kadar je na eni strani fluid z velikim koeficientom toplote prestopnosti toplote α, na drugi strani pa fluid z majhnim prestopnostnim koeficientom. Ta razlika se kompenzira s povečanjem površine oziroma orebrenjem na strani slabše toplotne prestopnosti.

Z analitičnim pristopom nam ponavadi uspe izračunati le preproste oblike orebrenja, pri tem pa so robni pogoji večinoma znatno poenostavljeni. Kadar analitične metode odpovejo, uporabimo katero od numeričnih metod. Metoda končnih razlik je preprosta pri formuliranju algoritma, vendar se pojavijo težave pri generaciji mreže za zapletene geometrijske oblike. Te težave v veliki meri odpravi metoda končnih elementov, ki ob zahtevnejših matematičnih osnovah metode omogoča poljubno gostitev mreže. Metoda robnih elementov ima glede na preostali dve, prej navedeni, prednost, da pri običajnih problemih prenosa toplote ni treba računati območnih integralov, saj se z uporabo divergenčnih izrekov problem prevede na reševanje robne integralske enačbe, vsa diskretizacija poteka samo po robu. V splošnem so rezultati zelo natančni,saj je utežna funkcija že kar ena od rešitev same diferencialne enačbe.

Pokazali bomo numerični postopek za izračunavanje toplotnega toka, ki ga odda rebro, in s tem v zvezi izkoriščenosti rebra, prav tako pa tudi postopek za izračun temperaturnega polja rebra in gostote toplotnega toka oziroma polja fluksov. Za tanka ravninska rebra konstantne debeline, snovskih lastnosti in referenčne temperature lahko uporabimo zelo primeren dvodimenzionalni matematični model z robno integralsko enačbo, katere osnovna rešitev je modificirana Besselova funkcija [7], [9], [10]. Algoritem ima razmeroma omejeno uporabnost, saj pri realnih problemih navedene poenostavitve redko srečamo. Takrat lahko uporabimo splošnejši prostorski matematični model z eliptično Greenovo funkcijo. Značilni primer je hlajenje rebra z vlažnim zrakom, ko se prestopnostni koeficient in okolišnja temperatura zraka lokalno spreminjata, prav tako pa je spremenljiva tudi debelina in temperatura kondenzacijskega filma.

2. RAVNINSKI MATEMATIČNI MODEL

Integralska enačba, ki opisuje dvodimenzionalni stacionarni proces prenosa toplote na ravninskem poligonalnem rebru, se glasi:

$$2\int_A \alpha(T_R - T_F)\,dA = \oint_S \lambda\delta\,\frac{\partial T_R}{\partial n}\,dS \qquad (1),$$

kjer pomenijo: T_R – temperaturo rebr, T_F – konstantno temperaturo okolišnega fluida, $\partial T_R/\partial n$ – normalni odvod temperature v smeri zunanje normale n_i roba S, α – prestopnostni koeficient, λ – koeficient prevoda toplote v rebru in δ – debelino rebra. Konvekcija je na spodnji in zgornji strani rebra. Tanki rob rebra s širino δ smo označili kot rob S, konvektivni površini na zgornji oziroma spodnji strani rebra pa predstavljata območje A. Integralska enačba (1) pravi, da je s konvekcijo oddani toplotni tok s površine $2A$ enak dovedenemu toplotnemu toku z roba S. Pripadajoča robna pogoja sta:

Dirichletov robni pogoj

$$T_R = \overline{T}_R \qquad \text{na } S_1,$$

s katerim predpišemo temperaturo rebra na delu roba S_1 in

Neumannov robni pogoj:

$$\frac{\partial T_R}{\partial n} = \left(\overline{\frac{\partial T_R}{\partial n}}\right) \qquad \text{na } S_2,$$

s katerim predpišemo odvod temperature v smeri normale n_i na delu roba S_2. Če je na robu S_2 predpisan adiabatni robni pogoj, je $\partial T_R/\partial n = 0$.

V primeru, ko je razmerje:

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2\,\alpha}{\lambda\,\delta}}$$

po vsej površini A konstantno, izračunamo toplotni tok, ki ga oddaja rebro prek konvekcijskih površin A iz robne bilančne enačbe za toplotni fluks z roba S. Območna diskretizacija ni potrebna. Robna integralska enačba:

$$c(T_R - T_F) + \oint_S \frac{\partial u^*}{\partial n}(T_R - T_F)\,dS = \oint_S u^*\frac{\partial T_R}{\partial n}\,dS \quad (2)$$

vsebuje kot osnovno rešitev modificirano Besselovo funkcijo K_0

$$u^* = \frac{K_0(\varkappa r)}{2\pi} \qquad (3),$$

kjer je r razdalja med referenčno in opazovano točko.

Numerični model lahko razširimo tudi za primere, ko se debelina in snovske lastnosti po območju spreminjajo, vendar moramo robno integralsko enačbo dopolniti z dodatnim območnim integralom. V tem primeru se zmanjšajo bistvene prednosti poenostavljenega ravninskega modela, saj algoritem po obsegu računanja ne zaostaja več dosti za prostorskim modelom.

3. PROSTORSKI MATEMATIČNI MODEL

Ko ne prevodnost λ ne toplotna prestopnost α nista konstantni, spremenljiva pa je lahko tudi referenčna temperatura fluida, postane problem identičen splošnemu tridimenzionalnemu prevodu toplote, ki ga opisuje Laplaceova robna integralska enačba za temperaturno polje T

$$cT + \oint_S T \frac{\partial u^*}{\partial n} \mathrm{d}S = \oint_S \frac{\partial T}{\partial n} u^* \mathrm{d}S \qquad (4),$$

kjer je S celotna površina tridimenzionalnega rebra. Greennova utežna funkcija u^* za prostor se glasi

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \qquad (5).$$

Robni pogoji k enačbi (4) so lahko:

Dirichletovi

$$T = \overline{T} \quad \text{na } S_1 \qquad (6),$$

kadar na nekem delu roba poznamo temperaturo;

Neumannovi

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial n}\right) = -\frac{1}{\lambda} q \quad \text{na } S_2 \qquad (7),$$

kadar poznamo toplotni tok;

Cauchyjevi

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial n}\right) = -\frac{\alpha}{\lambda}(T - T_F) \quad \text{na } S_3 \qquad (8),$$

kadar poznamo konvektivne razmere na robu: prestopnostni koeficient α in referenčno temperaturo fluida.

4. ROBNI ELEMENTI

Ko rešujemo robno integralsko enačbo (2) oziroma (4) z metodo robnih elementov, razdelimo rob na E robnih elementov, ki imajo skupaj N vozlišč, v katerih računamo in/ali podamo vrednost funkcije in njenega normalnega odvoda. Znotraj posameznega elementa sta funkcija in odvod podana z oblikovnimi funkcijami. Robno integralsko enačbo zapišemo za vsako opazovano točko na robu ($i = 1...N$) in integriramo po elementih; dobimo sistem linearnih algebrajskih enačb reda $N \times N$, ki ga rešimo z eno običajnih metod za reševanje sistemov linearnih enačb. Po rešitvi sistema, ko poznamo vrednosti funkcije in normalnega odvoda po celotnem robu, lahko nato eksplicitno izračunamo vrednost funkcije in gradienta v poljubni notranji točki območja.

5. TERMIČNA UČINKOVITOST

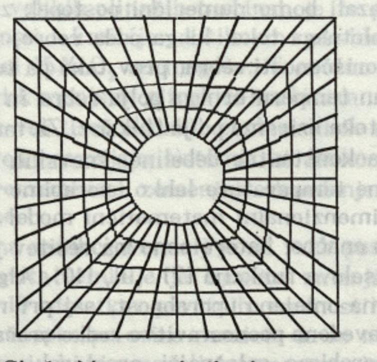
Učinkovitost rebra η računamo kot razmerje med dejanskim in idealnim oddanim toplotnim tokom

$$\eta = \Phi(\lambda) / \lim_{\lambda_{id} \to \infty} \Phi(\lambda_{id}) \qquad (9).$$

Toplotni tok računamo iz robnih bilančnih enačb za toplotne flukse.

6. PRIMER

Rebra pravokotne oblike z dolžino $L = 100$ mm (v smeri osi x), s širino $B = 100$ mm (v smeri osi y) in z debelino 3 mm so nasajena na cev s premerom Φ 30 mm. Na sliki 1 je prikazana mreža robnih elementov za ravnino (x, y). V aksialni smeri se mreža nadaljuje z enim pasom robnih elementov. Uporabljeni robni elementi so štiritočkovni izoparametrični linearni elementi. Razdalja med rebri je 5 mm. Toplotna prevodnost rebra je $\lambda = 300$ W/(mK). V smeri x na rebra nateka s hitrostjo 1 m/s zrak s temperaturo 40 °C in absolutno vlažnostjo 20 g/kg. Temperatura cevi je 10 °C. V smeri z je uporabljen simetrijski robni pogoj.



Sl. 1. *Mreža robnih elementov.*

Pri določanju toplotne prestopnosti je treba razlikovati, ali je rebro suho ali pa se pojavlja kondenzacija in je rebro omočeno. Pri suhem rebru, prebodenem s cevjo, uporabljamo za prisiljen turbulentni tok naslednjo enačbo [15]:

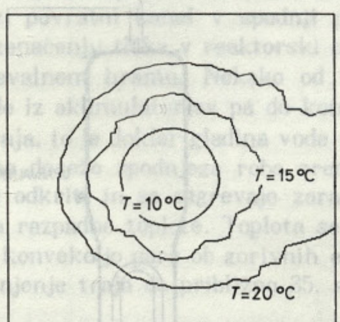
$$Nu_z(x) = 0.032\, Re_z(x)^{0.8}\, Pr^{0.37} \left(\frac{L^2}{d_h}\right)^{0.054} = \frac{\alpha_R(x)\, x}{\lambda_Z} \qquad (10),$$

iz katere izračunavamo lokalni prestopnostni koeficient na zračni strani suhega rebra α_R.

Kadar se na rebru pojavi kondenzacija vlage, je ta lahko filmska ali kapljičasta, kar je odvisno od materiala in površinske obdelave rebra, nečistoč v zraku in tokovnih razmer. V našem primeru smo predpostavili filmsko kondenzacijo. Na rebru se izoblikuje nepretrgan film različne debeline. Do kondenzacije prihaja na meji faz med filmom in vlažnim zrakom, toplota prehaja s prevodom skozi film kondenzata. Za določitev toplotne prestopnosti pri kondenzaciji α_F uporabimo naslednjo enačbo [11]:

$$\frac{\alpha_F}{\alpha_R} = 1 + \frac{r_0 \Delta x}{c_{pZ} \Delta \vartheta} \qquad (11),$$

kjer pomenita Δx in $\Delta \vartheta$ spremembo absolutne vlažnosti oziroma temperature na mejni površini glede na začetno stanje, r_0 je uparjalna toplota in c_{pZ} specifična toplota zraka pri konstantnem tlaku. V našem izračunu smo lokalne prestopnostne koeficiente za vlažni zrak dobili iz literature [12] in iz dodatnih preglednic za lokalno razporeditev temperatur, prestopnostnih koeficientov in debeline filma istih avtorjev. Izoterme na površini rebra so prikazane na sliki 2.



Sl. 2. *Izoterme na površini rebra.*

7. SKLEP

Predstavljeni numerični postopek je primeren za hitro ocenjevanje učinkovitosti reber oziroma toplotnega toka, ki se prenaša prek reber, kakor tudi za analizo temperaturnega polja in polja fluksov. Prednost se pokaže zlasti v hitri in preprosti pripravi podatkov, pa tudi v natančnosti dobljenih rezultatov, kar pomeni redkejše mreže in kratke računalniške čase, primerne za interaktivno obdelavo.

8. LITERATURA

[1] Alujevič. A.-Škerget. P.: Prenos toplotel. Tehniška fakulteta Maribor. 1990.

[2] Brebbia. C.A.: The Boundary Element Method for Engineers. Pentech Press. London. 1978.

[3] Brebbia. C.A.: Progress in Boundary Element Methods. Pentech Press. London. 1981.

[4] Eckert. E.R.G.-Drake. R.M.: Heat and Mass Transfer. McGraw-Hill. New York. 1954.

[5] Fabris. O.: Prelaz toplote putem orebrenih površina. Mašinski fakultet Sarajevo. 1976.

[6] Isachenko. V.P.-Osipova. V.A.-Sukomel. A.S.: Heat Transfer. Mir Publishers. Moscow. 1977.

[7] Dobovišek. Ž.-Černej. A.-Humski. F.-Namestnik. B.: Irregular Fin Shape Thermal Efficiency. Proceedings the Paper from the 10th International Symposium on Computer Aided Design and Computer Aided Manufacturing. 1989. str. 219–225. Elektrotehniški fakultet. Zagreb.

[8] Manzoor. M.: Heat Flow Through Extended Surface Heat Exchangers. Lecture Notes in Engineering. No. 5. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. 1984.

[9] Namestnik. B.- Škerget. P.-Beader. D.: Analiza prenosa toplote na orebrenjih gorivnih elementov hladilnih kanalov z metodo robnih elementov. Zbornik radova sa XXXIII jugoslovenske konferencije o elektronici. telekomunikacijama. automatizaciji i nuklearnoj tehnici. Novi Sad. 1989. sveska IX. str. 159–166. Jugoslovenski savez za ETAN. Beograd. 1989.

[10] Namestnik. B.-Beader. D.-Škerget. P.-Alujevič. A.: Efficiency of Heat Transfer on Extended Surfaces by the Boundary Element Method. Advances in Boundary Elements IX (Proceedings of the 11th Int. Conf. on BEM. Cambridge. USA. 1989) Vol. 2. str. 107–116. Computational Mechanics Publication. Southampton. Boston. 1989.

[11] Poredoš. A. in drugi: Izračun in meritve lamelnih hladilnikov zraka. Fakulteta za strojništvo. Ljubljana. 1979.

[12] Remec. J.-Poredoš. A.-Gašperšič. B.: Toplotno snovna izmenjava na površini hladnega rebra. Strojniški vestnik. Ljubljana (35) 1989/7-9. str. 97–101.

[13] Škerget. P.-Kuhn. G.-Alujevič. A.: Analysis of Mixed Convection Flow Problems by BEM. Z. Angew. Math. Mech.. Vol. (68) 1988. str. 413–416.

[14] Škerget. P.-Alujevič. A.-Brebbia. C.A.-Kuhn. G.: Boundary Element for Mixed Convection Problem. 3rd Int. Conf. on BETECH. Rio de Janeiro. str. 17–25. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. 1987.

[15] De Vries. G.: Beitrag zum Wärmeübertragung von Rippenrohrbundeln bei excentrischer Kernrohrlage. Dissertation. Hannover. 1980.

Naslovi avtorjev: Branko Namestnik. dipl. inž.
Dečan Beader. dipl. inž.
prof. dr. Polde Škerget. dipl. inž.
Tehniška fakulteta. Maribor