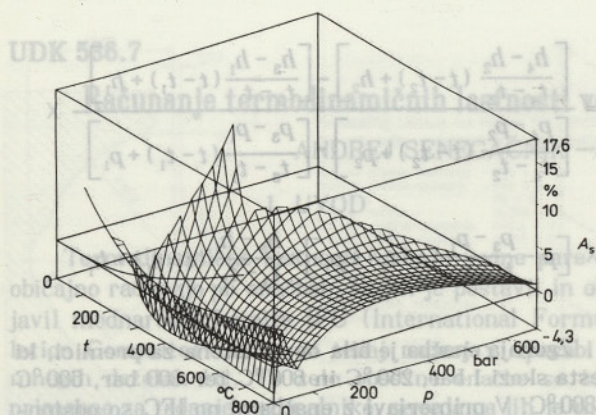




Sl. 7. Odstopanja entropijskih vrednosti A_s .
Primerjava poenostavljenih enačb z enačbami po IFC

4. ČAS RAČUNANJA

Vse enačbe po IFC so bile vnesene v računalnik IBM PC/AT s koprocesorjem Intel 80287. Zaradi čim krajšega časa računanja so bile za termodinamične veličine, ki so v enačbah podane implicitno, uporabljene nekatere iterativne metode. Vsi programi so bili napisani v računalniškem jeziku pascal (Compiler turbopascal 5.0). Za meritve hitrosti računanja so bili ti programi deloma preurejeni, pri tem je bilo število izračunov vedno 100 ali več.

Da bi dobili čim bolj natančno sliko, so bile vnešene v računalnik tudi nekatere starejše enačbe in analizirani časi računanja. Rezultate prikazuje preglednica 1. Po pričakovanju je povprečni čas računanja najdaljši pri enačbah po IFC. Čas računanja je odvisen od področja, v katerem ima posamezna enačba veljavnost: krajši časi veljajo za vodo in daljši za področje okoli kritične točke. Po oceni so časi računanja dolgi tudi za enačbe po Juzi [4], kajti zgradba enačb je podobna enačbam po IFC. Enačbe po Vukaloviču potrebujejo zaradi iterativnega računanja specifične prostornine precej časa. Ugodne čase računanja kaže enačba po Kochu [3], najhitreje so seveda poenostavljene aproksimativne enačbe.

UDK 532.517.2:519.61

Robni elementi za časovno odvisni prostorski laminarni viskozni tok

IVAN ŽAGAR – POLDE ŠKERGET

1. UVOD

Od leta 1978, ko je izšla prva knjiga o postopku »robnihi« elementov [1] s področja potencialnega toka in elastičnosti, se je postopek do danes razširil tudi na nelinearna področja problemov, npr. za viskozni tok tekočin. Dejansko pa lahko opazimo prvo uporabo »panelne« metode na področju mehanike fluidov že 20 let prej [4].

5. SKLEP

Aproksimativne enačbe, ki jih uporablja mednarodni komite IFS za izračunavanje termodinamičnih lastnosti vode in vodne pare [1], so bile vstavljene v računalnik IBM PC in primerjane s starejšimi. Pokazalo se je, da so od starejših enačb za računanje z osebnim računalnikom primerne aproksimativne enačbe, ki jih je sestavil Koch s sodelavci [3]: v večini področij odstopajo manj kot 1 odstotek od enačb po IFC, pri tem pa je čas računanja za dve potenci krajši. Nadalje je bilo ugotovljeno, da je za hitro računanje mogoče enačbe zelo poenostaviti: tako poenostavljene enačbe za termodinamične lastnosti vode in vodne pare veljajo sicer le v določenem področju, so manj natančne, zato pa je za njihovo računanje potreben zelo kratek čas.

LITERATURA

- [1] Properties of Water and Steam in SI-Units. 2. izd. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. New York in R. Oldenbourg. München. 1979.
- [2] Pflieger. E.: Optimale Stoffwertberechnung von Wasser und Wasserdampf. BWK 40 (1988). št. 10. str. 405-408.
- [3] VDI-Wasserdampf Tafeln. 4. izd. Springer-Verlag. Berlin. Göttingen. Heidelberg in R. Oldenbourg. München. 1956.
- [4] Juzi. J.: Uravnenja dlja termodinamiških svojst vody i vodjanogo para. prednaznačennye dlja vyčislitel'nyh mašin. Teploenergetika 14 (1967). št. 1. str. 80-86.
- [5] Enthalpie - Entropie - Diagramme für Wasserdampf und Wasser. Springer-Verlag. Berlin. Göttingen. Heidelberg. 1955.
- [6] Reid. C.R.-J.M. Prausnitz-Th.K. Sherwood: The Properties of Gases and Liquids. 3. izd. McGraw-Hill. New York. 1977.

Naslovi avtorjev: Andrej Senegačnik, dipl.inž.stroj.
Fakulteta za strojništvo. Ljubljana,
Tadej Tuma, dipl.inž. el.
Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo,
Ljubljana in
prof.dr.Matija Tuma, dipl.inž.
Fakulteta za strojništvo. Ljubljana

2. TEORIJA

Parcialne diferencialne enačbe, ki opisujejo viskozne izohorne tekočine, so znane nelinearne enačbe, ki vsebujejo ohranitev mase, gibalne količine (Navier-Stokes) in energije. Dasi dobimo ustrezno numerično rešitev laminarnega toka z neposredno uporabo hitrosti, tlaka in temperature [6], lahko uporabimo vrtničnost in tokovno funkcijo [2] ali pa vrtnično-hitrostno formulacijo [7], ki je omogočila veliko stabilnost numeričnega postopka mejnih elementov. Pri tem je še posebej ugodna razdelitev problema na kinematiko in kinetiko toka, medtem ko tlak in temperature določimo v dodatnem izračunu posebej.

S postopkom mejnih elementov dobimo naslednji skupek integralnih enačb:

Kinematika toka

$$c(\xi) v_i(\xi) + \int v_i \frac{\partial u_0^*}{\partial n} d\Gamma = \int \left[v_k \left(\frac{\partial u_0^*}{\partial x_k} n_i - \frac{\partial u_0^*}{\partial x_i} n_k \right) + v_j \left(\frac{\partial u_0^*}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial u_0^*}{\partial x_i} n_j \right) \right] d\Gamma + \int \left(w_j \frac{\partial u_0^*}{\partial x_k} - w_k \frac{\partial u_0^*}{\partial x_j} \right) d\Omega$$

Kinetika toka

$$c(\xi) \omega_i(\xi, t_F) + \nu \iint w_i \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma dt = \nu \iint \frac{\partial w_i}{\partial n} u^* d\Gamma dt - \int \int (w_i v_n - v_i w_n + \beta e_{ijk} n_j g_k T) u^* d\Gamma dt + \int \int (w_i v_j - v_i w_j + \beta e_{ijk} g_k T) \frac{\partial u^*}{\partial x_i} d\Omega dt + \int w_{i,F-1} u_{F-1}^* d\Omega$$

Termika toka

$$c(\xi) T(\xi, t_F) + a \int \int T \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma dt = a \int \int \frac{\partial T}{\partial n} u^* d\Gamma dt - \int \int T v_n u^* d\Gamma dt + \int \int v_i \frac{\partial u^*}{\partial x_i} d\Omega dt + \int T_{F-1} u_{F-1}^* d\Omega$$

Z diskretizacijo spremenljivk na površini in v notranjosti območja dobimo ustrezne algebrske enačbe hitrosti, vrtničnosti in temperature v obliki:

$$[H]\{v_i\} = [H]_{ki}\{v_k\} - [H]_{ij}\{v_j\} + [D]_k\{w_j\} - [D]_j\{w_k\}$$

$$[H]\{w_i\}_F = [G]\left\{\frac{\partial w_i}{\partial n}\right\}_F - \frac{1}{\nu}([G]\{w_i v_n - v_i w_n + \beta(g_k n_j - g_j n_k)T\}_F - [D]_j\{w_i v_j - v_i w_j + \beta g_k T\}_F - [D]_k\{w_i v_k - v_i w_k - \beta g_j T\} - [B]\{w_i\}_{F-1})$$

$$[H]\{T\}_F = [G]\left\{\frac{\partial T}{\partial n}\right\}_F - \frac{1}{a}([G]\{T v_n\}_F - [D]_i\{T v_i\}_F - [B]\{T\}_{F-1})$$

3. PROGRAM

Na podlagi zgoraj zapisanega skupka algebrskih enačb je zasnovana iteracijska numerična shema. Ker je sistem enačb močno nelinearen, ga rešujemo z relaksacijo. V vsakem časovnem koraku rešujemo hitrostno, temperaturno, vrtnično polje do zahtevane natančnosti v naslednjem vrstnem redu:

— startamo z začetnimi vrednostmi vrtničnosti in temperatur iz poprejšnjega časovnega koraka.

Kinematika

— rešimo sistem enačb za robne vrednosti vrtničnosti.

— območne vrednosti hitrosti računamo eksplicitno.

Termika

— rešimo sistem enačb za neznane robne vrednosti temperatur ali normalnih odvodov temperatur,

— eksplicitno računamo območne vrednosti temperatur.

Kinetika

— rešimo sistem enačb za neznane robne vrednosti normalnih odvodov vrtničnosti,

— vrtničnosti v območju računamo eksplicitno.

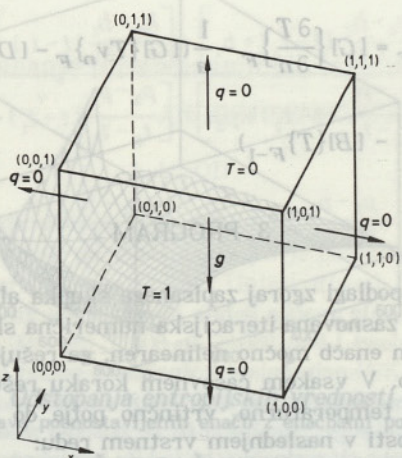
Hitrost konvergence in stabilnost rešitve smo znatno izboljšali z mediteracijo pri izračunu temperatur in vrtničnosti v območju.

4. PRIMERI

4.1 Naravna konvekcija v prostorski kotanji

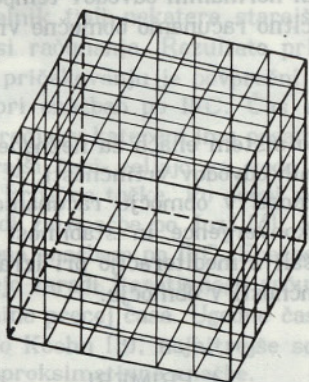
Problem naravne konvekcije v kotanji je pogost primer testiranja učinkovitosti numerične sheme. Gibalna in energijska enačba sta vezani prek vzgonskega člena, kar vnese dodatno nelinearnost v že sicer nelinearen sistem enačb. Posebno problematičen je izračun temperaturnega polja, ker napako iz hitrostnega dela izračuna prenesemo v temperaturni del, kjer jo pomnožimo, tako da lahko rešitev v končni fazi celo divergira.

V našem primeru smo običajen primer dvodimenzionalnega toka v zaprti kotanji razširili na tridimenzionalni primer (sl. 1). Vzrok za gibanje tekočine so vzgonske sile zaradi ogrete leve stene kotanje na normirano temperaturo, medtem ko ima desna stena predpisano relativno temperaturo nič. Preostale stene so toplotno izolirane.



Sl. 1. Naravna konvekcija v prostorski kotanji

Obravnavano območje smo modelirali z 216 linearnimi elementi in 216 linearnimi celicami s skupno 343 vozlišči (sl. 2). Zaradi kompleksnosti primera in s tem obsežnosti izračuna, smo se morali omejiti na razmeroma grobo aproksimacijo modela (omejitev računalnika). To pa je zahtevalo dokaj nizka karakteristična števila ($Gr = 10^4$ ter $Pr = 1$ oziroma $Ra = 10^4$), za katera smo še dobili stabilno rešitev.

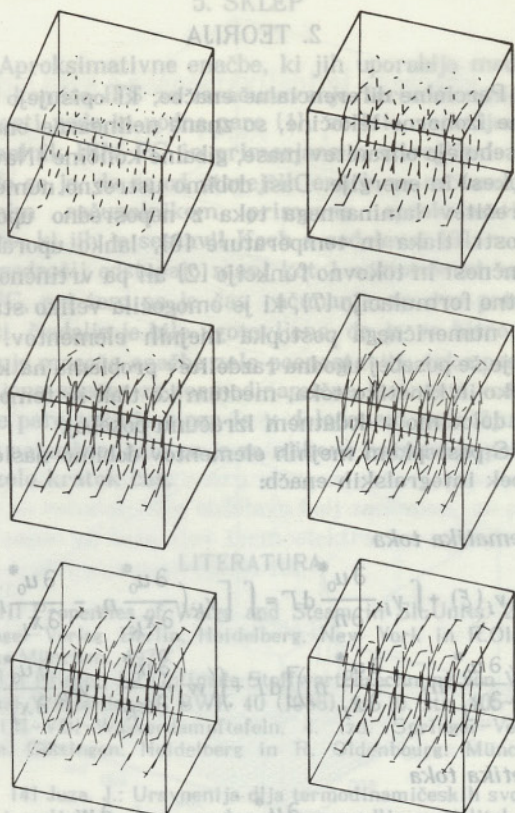
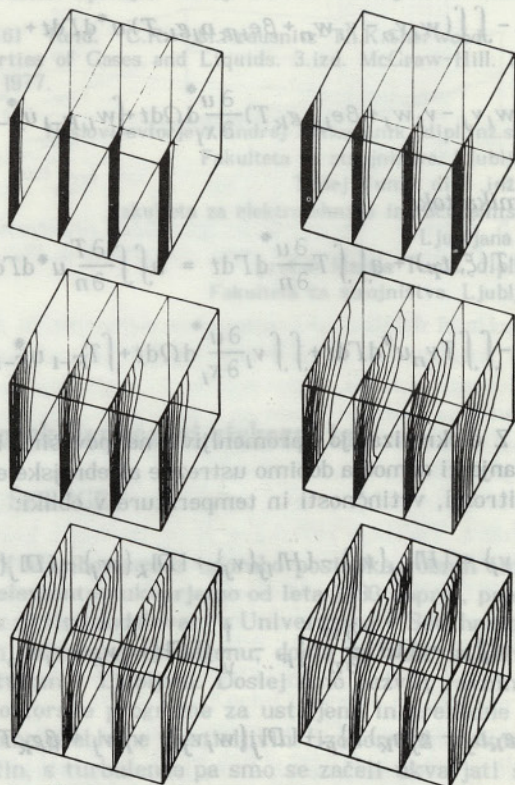


Sl. 2. Diskretizacija obravnavanega območja

Časovni potek razvoja hitrostnega polja (sl. 3), od katerega je odvisno difuzijsko-konvekcijsko širjenje toplotnega polja (sl. 4), kaže značilno tvorbo celičnega toka. V ustaljenem stanju se vrtnec razširi po celotnem območju.

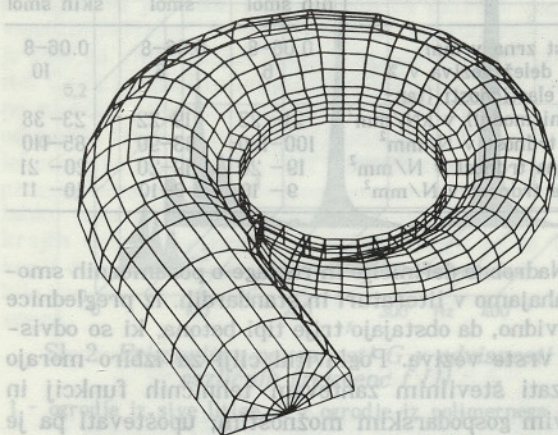
4.2 Spirala vodilnika francisove turbine

Razvoj turbinskih strojev terja poznavanje tokovnih razmer v posameznih komponentah oziroma v stroju kot celoti. Dogajanje v stroju lahko ovrednotimo z meritvami na že uveljavljenih napravah ali na izdelanih laboratorijskih modelih. Šele z razvojem numeričnih metod lahko delno simuliramo tokovne razmere v turbinskih strojih in tako nadomestimo eksperimentalne postopke (seveda ne v celoti).

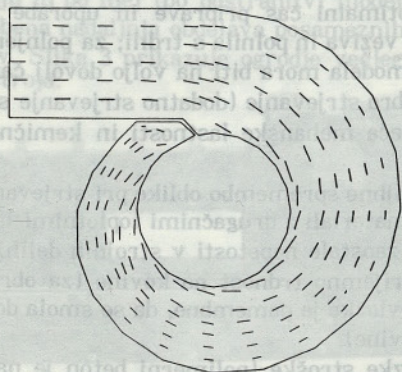
Sl. 3. Časovni potek razvoja hitrostnega polja;
 $t = 0,5s, 1s, 2s, 4s, 8s, 40s$ Sl. 4. Časovni potek razvoja temperaturnega polja;
 $t = 0,5s, 1s, 2s, 4s, 8s, 40s$

V okviru sodelovanja s Turboinštitutom smo obravnavali tok v spirali vodilnika francisove turbine. V splošnem je tok v spirali viskozen in turbulenten, vendar pa prav zaradi visokih števil ($Re = 10^7$) lahko zanemarimo relativno tanko mejno plast ob stenah spirale. Obnašanje glavne toka v spirali tako vzamemo kot nevtrino, nevskozno in ga lahko opišemo s potencialnim tokom.

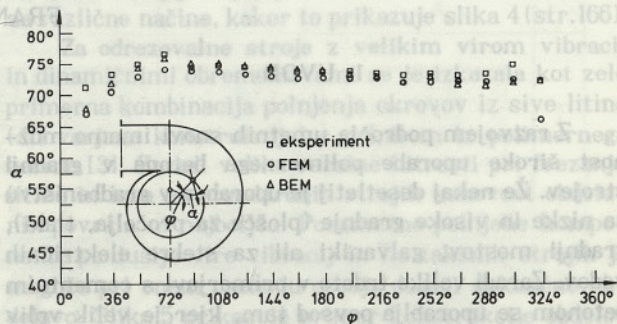
Diskretni model spirale smo opisali s 612 linearnimi robnimi elementi in s 652 vozlišči (sl. 5). Upoštevali smo tudi simetrijo primera prek meridianske ravnine. Na vstopu smo predpisali enoten potencial ($\Phi = 1$), na izstopu iz spirale pa normalno komponento izstopne hitrosti, ki jo zahteva kontinuiteta pretoka skozi spiralo. Upoštevali smo še neprepustnost sten spirale ($\partial\Phi/\partial n = 0$). Rezultati hitrostnega polja v meridianskem prerezu za tako izbrane robne pogoje so prikazani na sliki 6. Sicer pa smo se omejili na kakovostno ovrednotenje izstopnih kotov iz spirale. Iz primerjave rezultatov metode robnih elementov z rezultati eksperimenta ter rezultati metode končnih elementov (sl. 7) je opazno dobro ujemanje numeričnih vrednosti z vrednostmi meritev.



Sl. 5. Model spirale vodilnika francisove turbine



Sl. 6. Hitrostno polje v meridianskem prerezu spirale



Sl. 7. Primerjave rezultatov MRE z MKE in z meritvijo za izstopni kot spirale

5. SKLEPI

V prispevku smo opisali postopek mejnih elementov za reševanje časovno odvisnih problemov nestisljivih tekočin. Podana je teorija kinematike, kinetike in energetike toka, rezultati pa se nanašajo na viskozni tok v prostorski kotanji ter na potencialni tok v spirali vodilnika francisove turbine. Slednje smo primerjali z rezultati meritev Turboinštituta na realnem modelu ter rezultati MKE [5].

LITERATURA

- [1] Brebbia, C.A.: The Boundary Element Method for Engineers. Pentech Press, London, 1978.
- [2] Onishi, K.-Kuroki, T.-Tanaka, M.: Boundary Element Method for Laminar Viscous Flow and Convective Diffusion Problems. Ch. 8. Topics in Boundary Element Research. Vol. 2. p. 209-229. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [3] Škerget, P.-Alujevič, A.-Žagar, I.-Brebbia, C.A.-Kuhn, G.: Time Dependent Three-Dimensional Laminar Isochoric Viscous Fluid Flow by the Boundary Element Method. Proc. 10th Int. Conf. on Boundary Elements. Vol. 2. p. 57-74. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [4] Smith, A.M.O.-Pierce, J.: Exact Solution of the Neumann Problem. Calculation of Plane and Axially Symmetric Flow About or Within Arbitrary Boundaries. Proc. 3rd US National Congress of Appl. Mech., p. 807-815, 1958.
- [5] Sopta, L.-Mrša, Z.: Numerical Modelling of Three-dimensional Flow in the Spiral Casing of a Francis Turbine. Proc. Conf. on Hydraulic Machinery. p. 85-90. Publ. by Turboinstitute, Ljubljana, 1988.
- [6] Tosaka, N.-Kakuda, K.: Numerical Simulation for Incompressible Viscous Flow Problems Using the Integral Equations Methods. Proc. 8th Int. Conf. on Boundary Elements. p. 813-828. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [7] Wu, J.C.: Problems of General Viscous Flow. Ch. 2. Developments in Boundary Elements. Vol. 2. p. 69-109. Elsevier Appl., Sci. Publ., London, 1982.

Naslova avtorjev: mag. Ivan Žagar, dipl.inž.
prof. dr. Polde Škerget, dipl.inž.,
Tehniška fakulteta,
VTO strojništvo,
Maribor, Smetanova 17