

## Matematični model za izračun eksergije vlažnega zraka Mathematical Model for Calculation of Humid Air Exergy

PETAR DONJERKOVIĆ - IGOR BALEN - IVAN GALASO

*V tem članku je obravnavan teoretični model eksergije vlažnega zraka, ki je osnova za matematični model in ustrezen računalniški program. Matematični model je uporabljen za grafično predstavitev in analizo spreminjanja eksergije kot funkcije temperaturnih sprememb  $e = f(\vartheta)$  in eksergije kot funkcije spreminjanja absolutne vlažnosti  $e = f(x)$ .*

**Ključne besede:** eksergija, zrak vlažni, modeli teoretični, modeli matematični

*In this paper the theoretical approach to humid air exergy the basis for a mathematical model of calculation, and the corresponding computer program that have been developed. The mathematical model has been used for graphic presentation and the analysis of the calculation results of the exergy change as a function of the temperature changes  $e = f(\vartheta)$ , and exergy change as a function of absolute humidity changes  $e = f(x)$  has been carried out.*

**Keywords:** exergy, humid air, theoretical models, mathematical models

### 0 UVOD

Eksergija vlažnega zraka je lastnost, ki vključuje veličine suhega zraka in vlage. Za izračun eksergije vlažnega zraka je bistvenega pomena definicija stanja okolja. Znano je, da se razmere v okolju spreminjajo. Nekateri avtorji definirajo za potrebe svojih izračunov tako imenovano "referenčno ničlo pogojev okolja" z  $\vartheta_0 = 0^\circ\text{C}$  in  $x_0 = 0$ , medtem ko drugi avtorji predlagajo, da ne bi definirali osnovnih pogojev, pač pa da bi jih prevzeli glede na realne pogoje obravnavanega sistema.

Čeprav je okolje hranilnik toplote, na katerega ne more vplivati drugi hranilnik toplote, le to ne vsebuje časovne konstante termodinamičnih pogojev.

Zaradi relativno majhnih sprememb tlaka v klimatizacijskih sistemih z zrakom uporabimo za potrebe definicije izobarno spremembo vlažnega zraka. Upoštevajoč, da je eksergija vlažnega zraka za razmere v okolju enaka nič, je prvi robni pogoj matematičnega modela enak:

$$e_0 = 0 \quad (1)$$

Drugi robni pogoj dobimo iz predpostavke, da se eksergija kot veličina okolja ne spreminja:

The second boundary condition is derived from the assumption that the exergy, as an environmental property, does not change:

$$de_0 = 0 \quad (2)$$

Stanje vlažnega zraka kot mešanice suhega zraka in vlage je definirano s tlakom  $p$ , temperaturo  $T$  in absolutno vlažnostjo  $x$ . Podobno sta tudi entalpija in entropija odvisni od teh vrednosti:

$$h = h(p, T, x) \quad (3)$$

$$s = s(p, T, x)$$

Iz tega izhaja, da je eksergija vlažnega zraka, definirana z enačbo:

$$e_{(1+x)} = h_a - h_{a0} - T_0(s_a - s_{a0}) + x[h_d - h_{d0} - T_0(s_d - s_{d0})] \quad (4)$$

funkcija tlaka, temperature in absolutne vlažnosti oziroma koncentracije vlage, upoštevajoč, da je končna sprememba pogojev definirana kot:

$$e - e_0 = h - h_0 - T_0(s - s_0) \quad (5)$$

Skladno s Szargut-Styrylsko [8] običajni model za izračun eksergije vlažnega zraka ni veljaven za binarne zmesi, pri katerih je uveden model za izračun eksergije zraka, ki vsebuje fizikalni in kemični del. Rešitve so podane v nomogramih, ki zaradi področja vrednosti niso uporabni za klimatizacijsko tehniko. Neuporabnost teh rezultatov je bil motiv za pisanje tega članka, ki poskuša utemeljiti matematični model za eksergije vlažnega zraka za naslednje področje:

$\theta$  od  $-25$  °C do  $50$  °C

$x$  od  $0$  do  $0,025$  kg/kg<sub>z</sub>

(v - voda, z - zrak)

s konstantnim tlakom  $100$  kPa.

## 1 IZRAČUN VREDNOSTI VLAŽNEGA ZRAKA

Ko so robni pogoji (1) in (2) zagotovljeni, je eksergija termodinamičnih pogojev za vlažni zrak v razmerju z razmerami v okolju prikazana v enačbi:

$$e_{(1+x)} = h - \left[ h_0 + \left( \frac{\partial h_0}{\partial \xi_0} \right)_{T_0, p_0} (\xi - \xi_0) \right] - T_0 \left\{ s - \left[ s_0 + \left( \frac{\partial s_0}{\partial \xi_0} \right)_{T_0, p_0} (\xi - \xi_0) \right] \right\} \quad (6)$$

kjer

$$\left( \frac{\partial h_0}{\partial \xi_0} \right)_{T_0, p_0} (\xi - \xi_0)$$

pomenijo korekcijske faktorje, ki v binarnih zmesih upoštevajo spremembe koncentracij vlage, pri katerih entalpijo in entropijo vlažnega zraka lahko izračunamo iz naslednjih obrazcev:

The humid air condition, as a mixture of dry air and humidity, is determined by the pressure  $p$ , temperature  $T$  and absolute humidity  $x$ . As in the case of humid air, entropy and enthalpy depend upon the same values:

It follows that humid air exergy, defined by the equation:

is the function of the pressure, temperature and absolute humidity, or humidity concentration as well, taking into consideration that the final change of the condition is defined as:

According to Szargut-Styrylska [8], the classical model for the calculation of the humid air exergy does not apply for binary mixtures, and a model of the air exergy calculation consisting of a physical and chemical parts is being introduced. Their solutions are shown in nomograms, which, due to their field of values, are not applicable in the air-conditioning technique. The inability of application was the motive for taking up this investigation which attempted to establish a mathematical model for calculation of the humid air exergy in the following field:

$\theta$  from  $-25$  °C to  $50$  °C

$x$  from  $0$  to  $0.025$  kg/kg<sub>a</sub>

(w - water, a - air)

with a constant air pressure of  $100$  kPa.

## 1 CALCULATION OF THE HUMID AIR PROPERTIES

When the boundary conditions (1) and (2) have been fulfilled, the exergy of a thermodynamic condition of humid air in relation to the environmental condition can be shown by the equation:

where

$$\left( \frac{\partial s_0}{\partial \xi_0} \right)_{T_0, p_0} (\xi - \xi_0)$$

represent correction factors which in binary mixtures take into consideration humidity concentration changes, while humid air enthalpy and entropy can be calculated from the following formulae:

$$h_{(1+x)} = c_{pa} \vartheta + x_d (r_s + c_{pd} \vartheta) + x_w c_w \vartheta - x_l (r_l - c_l \vartheta) \tag{7}$$

$$s_{(1+x)} = c_{pa} \ln \frac{T}{T_0} + x_d \left( \frac{r_s}{T_0} + c_{pd} \ln \frac{T}{T_0} \right) + x_w c_w \ln \frac{T}{T_0} - x_l \left( \frac{r_l}{273,15} - c_l \ln \frac{T}{273,15} \right) \tag{8}$$

Z uporabo metode najmanjših kvadratov z linearno odvisnostjo od temperature uparjanja  $T_s$  je uparjalna toplota  $r_s$  nad  $0^\circ\text{C}$ :

$$r_s = 3140,962 - 2,345 T_s \tag{9}$$

medtem ko je z enakim postopkom sublimacijska toplota pod  $0^\circ\text{C}$ :

$$r_s = 2877,560 - 0,158 T_s \tag{10}$$

Iz navedenega izhaja, da je eksergija vlažnega zraka lahko prikazana kot funkcija temperature in absolutne vlažnosti vlažnega zraka in razmer v okolju:

$$e_{(1+x)} = f(T, x, T_0, x_0) \tag{11}$$

Povezava med absolutno vlažnostjo  $x$ , reducirano na 1 kg suhega zraka in koncentracijo vlage  $\xi$ , reducirano na 1 kg suhega zraka in mešanico vlage, je predstavljena kot:

$$\xi = \frac{x}{1-x} \tag{12}$$

Iz pregledničnih vrednosti za  $T_s$  in  $x_s$  lahko določimo analitično odvisnost z metodo najmanjših kvadratov. Z dvema logaritmičnima funkcijama je aproksimacija za naslednje primere:

a)  $0 < x \leq 0,00378 \text{ kg./kg}_a$

$$T_s = 329,428 + 10,2953 \ln x_s \tag{13}$$

b)  $x > 0,00378 \text{ kg./kg}_a$

$$T_s = 360,725 + 15,7850 \ln x_s \tag{14}$$

ki sta enačbi za dve črti uparjanja v diagramu  $h,x$ . Če je absolutna vlažnost  $x$  prikazana kot funkcija relativne vlage  $\varphi$  in tlaka uparjanja  $p_s$ , potem lahko za naslednja območja zapišemo:

a)  $0 < x \leq 0,00378 \text{ kg./kg}_a$

$$x = 0,622 \frac{\varphi P_{s1}}{1000 - \varphi P_{s1}} \tag{15}$$

Using the method of the least squares, with a linear dependence upon the saturation temperature  $T_s$ , the heat of vaporization  $r_s$  above  $0^\circ\text{C}$  equals:

whereas by the same procedure the heat of sublimation below  $0^\circ\text{C}$  equals:

From the above it follows that the humid air exergy can generally be shown as a function of the temperature and absolute humidity of optional humid air condition and environmental condition:

The connection between the absolute humidity  $x$ , reduced to 1kg of dry air and the humidity concentration  $\xi$ , reduced to 1 kg of dry air and humidity mixture is shown as:

From the table values for  $T_s$  and  $x_s$  the analytical dependence of these properties can be determined by the method of least squares. By two logarithmic functions the approximation for the following cases is:

a)  $0 < x \leq 0,00378 \text{ kg}_w/\text{kg}_a$

b)  $x > 0,00378 \text{ kg}_w/\text{kg}_a$

which are the equations of the two saturation curve lines in an  $h,x$ -diagram. If the absolute humidity  $x$  is shown as a function of relative humidity  $\varphi$  and saturation pressure  $p_s$ , then for the following intervals it can be written:

a)  $0 < x \leq 0,00378 \text{ kg}_w/\text{kg}_a$

b)  $x > 0,00378 \text{ kg}_w/\text{kg}_a$

$$x = 0,622 \frac{\varphi p_{s2}}{1000 - \varphi p_{s2}} \quad (16)$$

Največji odklik od pregledničnih vrednosti za območje  $0 < x \leq 0,00378 \text{ kg}_w/\text{kg}_a$  je 0,38 %, medtem ko je za območje  $x > 0,00378 \text{ kg}_w/\text{kg}_a$  največji odklik 0,3 %, kar je zadovoljivo za tehnične izračune. Boljše rezultate lahko dosežemo, če povezavo med  $T_s$  in  $x_s$  aproksimiramo s polinomom  $n$ -tega reda namesto logaritmične funkcije. V tem primeru zapletenost izračuna vlažnega zraka narašča brez očitnih razlik v končnih rezultatih.

Tlak uparjanja  $p_s$  kot funkcijo temperature  $\vartheta$  lahko definiramo z uporabo podatkov v preglednicah za paro z metodo najmanjših kvadratov:

a) za  $-25 \text{ }^\circ\text{C} < \vartheta < 0 \text{ }^\circ\text{C}$

$$p_{s1} = 6,108 \cdot 10^{27,8161 + 0,08\vartheta - 5,12562 \cdot 10^{-4} \vartheta^2} \quad (17)$$

b) za  $0 \text{ }^\circ\text{C} < \vartheta < 50 \text{ }^\circ\text{C}$

$$p_{s2} = 6,108 \cdot 10^{31,719 + 0,128\vartheta + 6,47399 \cdot 10^{-5} \vartheta^2} \quad (18)$$

Na območju  $-25 \text{ }^\circ\text{C} < \vartheta < 0 \text{ }^\circ\text{C}$  je največji odklik od pregledničnih vrednosti 0,06 %, ko je  $\vartheta = -15 \text{ }^\circ\text{C}$ , medtem ko je na območju  $0 \text{ }^\circ\text{C} < \vartheta < 50 \text{ }^\circ\text{C}$  največji odklik 0,77 %, ko je  $\vartheta = 46 \text{ }^\circ\text{C}$ . Da bi dosegli bolj točne rezultate, bi bilo treba uporabiti več manjših korakov.

## 2 ANALIZA IZRAČUNANIH REZULTATOV

Na osnovi prej podanih enačb je bil oblikovan matematični model za izračun eksergije vlažnega zraka. Ta je bil uporabljen kot model za računalniški program. Izračunani rezultati so podani na slikah 1 in 2.

Računalniški program omogoča analizo eksergije vlažnega zraka kot funkcijo temperature (sl. 1), pri kateri je absolutna vlažnost parameter, ali kot funkcijo absolutne vlage (sl. 2), pri kateri je parameter temperatura.

### 2.1 Eksergija vlažnega zraka kot funkcija temperature

Eksergija kot funkcija temperature pod pogoji, ko ima absolutna vlažnost različne vrednosti in ko so izbrane razmere v okolju  $\vartheta_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  in  $x_0 = 0,007 \text{ kg}_w/\text{kg}_a$ , je prikazana na sliki 1. Krivulja je parabolična prek opazovanega intervala v diagramu ter črte, levo in

b)  $x > 0,00378 \text{ kg}_w/\text{kg}_a$

The biggest deviation from the table values for the interval  $0 < x \leq 0,00378 \text{ kg}_w/\text{kg}_a$  is 0.38 %, while for the interval  $x > 0,00378 \text{ kg}_w/\text{kg}_a$  the biggest deviation is 0.3 % which is sufficiently accurate for technical calculations. More accurate results could be derived if the dependence of  $T_s$  and  $x_s$  was approximated with a polynomial of the  $n$ -th order, instead of a logarithmic function. In that case, however, the complexity of calculation of the humid air exergy is increased without any substantial differences in the final results.

The saturation pressure  $p_s$  as a function of a temperature  $\vartheta$  can be determined following the data in steam tables using the method of the least squares:

a) for  $-25 \text{ }^\circ\text{C} < \vartheta < 0 \text{ }^\circ\text{C}$

b) for  $0 \text{ }^\circ\text{C} < \vartheta < 50 \text{ }^\circ\text{C}$

At the interval  $-25 \text{ }^\circ\text{C} < \vartheta < 0 \text{ }^\circ\text{C}$  the biggest deviation from the table values is 0.06 % when  $\vartheta = -15 \text{ }^\circ\text{C}$ , whereas at the interval  $0 \text{ }^\circ\text{C} < \vartheta < 50 \text{ }^\circ\text{C}$  the biggest deviation is 0.77 % when  $\vartheta = 46 \text{ }^\circ\text{C}$ . In order to get more accurate results it would be necessary to approximate several smaller steps.

## 2 ANALYSIS OF CALCULATION RESULTS

On the basis of the previously given equations, a mathematical model for calculation of humid air exergy has been formulated. It was used as a model for the computer program. The calculation results are presented in the diagrams in figures 1 and 2.

The computer program enables the analysis of humid air exergy as a temperature function (Fig. 1) where absolute humidity is an optional parameter, or as an absolute humidity function (Fig. 2) where temperature is an optional parameter.

### 2.1 Humid Air Exergy as Temperature Function

Exergy as a temperature function, under conditions when the absolute humidity has different values and when the chosen environmental condition equals  $\vartheta_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  and  $x_0 = 0.007 \text{ kg}_w/\text{kg}_a$ , is shown in Figure 1. The curve is parabolic along the observed

desno od okoljskih pogojev, se bistveno ne razlikujejo. Tako lahko rečemo, da so črte približno parabolične. Kot tangente na krivuljo lahko dobimo z odvodom eksergije glede na temperaturo in z določitvijo kota v posameznih točkah. Odvajanje eksergije glede na temperaturo, kjer je  $x = \text{konst}$  je zelo zapleteno, tako so tangentni koti definirani z manj komplicirano Newtonovo interpolacijsko formulo. Ko primerjamo tangentna kota z obema krivuljama, lahko ugotovimo, da je levi bolj pokončen kakor desni.

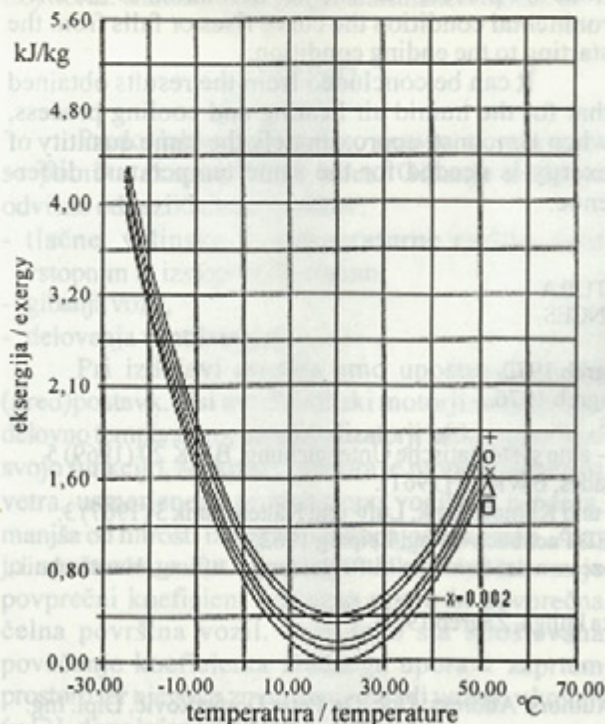
Iz tega lahko povzamemo, da potrebujemo enako količino eksergije za ogrevanje in hlajenje zraka, kjer je  $x = \text{konst}$ .

Drug pomemben sklep, ki ga lahko potegnemo iz analiz krivulj, je dejstvo, da je eksergija izobarnih procesov vedno pozitivna. Eksergija vlažnega zraka je enaka nič samo v primeru, ko so razmere opazovanega vlažnega zraka enake razmeram v okolju, ko sta  $\vartheta = \vartheta_0$  in  $x = x_0$ .

interval on the diagram, and the lines - both left and right from the environmental condition - do not substantially differ. Therefore, it can be said that these lines are approximately parabolic. The tangent angle on the curve could be determined by exergy derivation according to the temperature and by determining the value of the angle at certain points. However, exergy derivation according to the temperature where  $x = \text{konst}$  is very complex, so the tangent angles are determined by the less complicated Newton's interpolation formula. When comparing tangent angles of both curve lines it was shown that the left one is slightly more vertical than the right one.

From this we can conclude that, as far as air heating and cooling is concerned, whenever  $x = \text{konst}$  approximately the same quantity of exergy is needed.

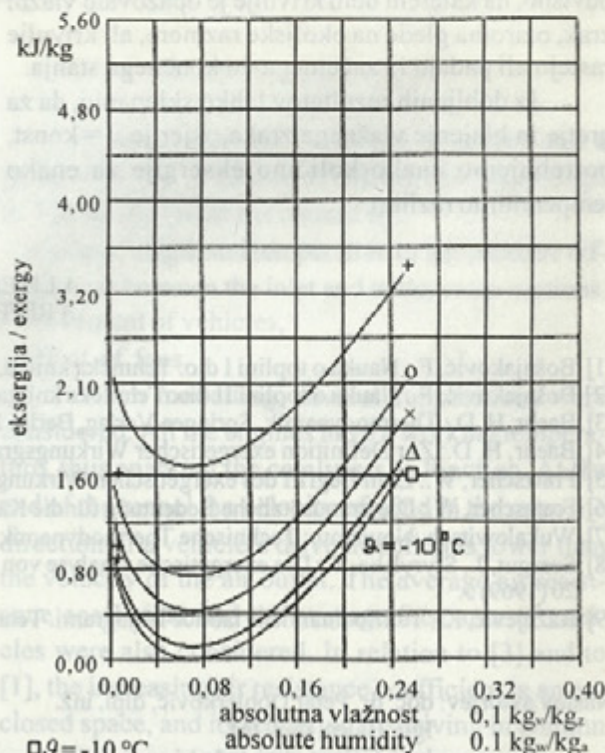
Another important conclusion which can be drawn from the analysis of the curves shown is the fact that the exergy in isobaric processes is always positive. Humid air exergy vanishes only in the cases where the observed humid air conditions correspond to environmental conditions, when  $\vartheta = \vartheta_0$  and  $x = x_0$ .



- $x = 0,002 \text{ kg}_w/\text{kg}_a (\text{kg}_w/\text{kg}_a)$
- △  $x = 0,004 \text{ kg}_w/\text{kg}_a (\text{kg}_w/\text{kg}_a)$
- ×  $x = 0,007 \text{ kg}_w/\text{kg}_a (\text{kg}_w/\text{kg}_a)$
- $x = 0,012 \text{ kg}_w/\text{kg}_a (\text{kg}_w/\text{kg}_a)$
- +  $x = 0,015 \text{ kg}_w/\text{kg}_a (\text{kg}_w/\text{kg}_a)$

Sl. 1. Eksergija vlažnega zraka kot funkcija temperature

Fig. 1. Humid air exergy as a temperature function



- $\vartheta = -10^\circ\text{C}$
- △  $\vartheta = 0^\circ\text{C}$
- ×  $\vartheta = 12^\circ\text{C}$
- $\vartheta = 20^\circ\text{C}$
- +  $\vartheta = 36^\circ\text{C}$

Sl. 2. Eksergija vlažnega zraka kot funkcija absolutne vlage

Fig. 2. Humid air exergy as absolute humidity function

## 2.2 Eksergija vlažnega zraka kot funkcija absolutne vlažnosti

Če sledimo vrednostim programa za izbrane razmere okolja, potem je eksergija kot funkcija absolutne vlažnosti za različne vrednosti parametra  $\vartheta$  prikazana na sliki 2.

Kakor je prikazano v diagramu, so krivulje na levi bolj pokončne od desnih. Videti je tudi, če je temperatura višja, potem je višji tudi minimum. Ker je ta pojav bolj viden na sliki 1 kakor na sliki 2, potem lahko povzamemo, da na eksergijo bolj vpliva sprememba absolutne vlažnosti kakor sprememba temperature zraka.

### 3 SKLEP

Proces klimatizacije je sestavljen iz vrste osnovnih procesov sprememb vlažnega zraka. Izračun, predstavljen v tem članku, definira eksergijo različnih začetnih in končnih stanj opazovanih procesov. Eksergijo s pozitivnim in negativnim predznakom lahko izračunamo iz izvedenih metod, odvisno, na katerem delu krivulje je opazovani vlažni zrak, oziroma glede na okoljske razmere, ali krivulje rastejo ali padajo iz začetnega do končnega stanja.

Iz dobljenih rezultatov lahko sklepamo, da za gretje in hlajenje vlažnega zraka, kjer je  $x = \text{konst}$ , potrebujemo enako količino eksergije za enako temperaturno razliko.

### 4 LITERATURA 4 REFERENCES

- [1] Bošnjaković, F.: Nauka o toplini I dio. Tehnička knjiga, Zagreb 1970.
- [2] Bošnjaković, F.: Nauka o toplini II dio. Tehnička knjiga, Zagreb 1976.
- [3] Baehr, H. D.: Thermodynamik. Springer-Verlag, Berlin 1973.
- [4] Baehr, H. D.: Zur Definition exergetischer Wirkungsgrade - eine systematische Untersuchung, BWK 20 (1969) 5.
- [5] Fratzscher, W.: Zum Begriff des exergetischen Wirkungsgrades, BWK 13 (1961).
- [6] Fratzscher, W.: Die grundsätzliche Bedeutung für die Kälte- und Klimatechnik, Luft- und Kältetechnik 3 (1967) 3.
- [7] Wukalowitsch, Nowikow: Technische Thermodynamik. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1962.
- [8] Szargut, J., Styrylska, T.: Die exergetische Analyse von Prozessen der feuchten Luft. Heizung, Lüftung, Haustechnik, 20 (1969) 5.
- [9] Ražnjević, K.: Termodinamičke tablice i dijagrami. Tehnička knjiga, Zagreb 1964.

Naslov avtorjev: doc. dr. Petar Donjerković, dipl. inž.  
Igor Balen, dipl. inž.  
Ivan Galaso, dipl. inž.  
Fakultet strojarstva i brodogradnje  
Sveučilište u Zagrebu  
I. Lučića 5  
10000 Zagreb, Hrvatska

Authors' Address: Doc. Dr. Petar Donjerković, Dipl. Ing.  
Igor Balen, Dipl. Ing.  
Ivan Galaso, Dipl. Ing.  
Faculty of Mechanical Engineering  
and Shipbuilding  
University of Zagreb  
I. Lučića 5  
10000 Zagreb, Croatia

Prejeto: 20.6.1997  
Received:

Sprejeto: 15.12.1997  
Accepted: