

## Določanje kritične obremenitve krožnih kolobarjev v elasto-plastičnem območju

### Determination Of the Buckling Loads of Circular Annular Plates in the Elastic-Plastic Region

Boštjan Bremec - Franc Kosel

*Prispevek opisuje eksperimentalno določanje kritične obremenitve ter izbočitvenega koeficienta krožnega kolobarja konstantne debeline iz materiala z utrjevalno karakteristiko. Kolobar je na zunanjem robu členkasto podprt ter obremenjen z enakomerno tlačno obremenitvijo, notranji rob pa je prost in neobremenjen. Nestabilno stanje se pojavi, ko je napetostno stanje v kolobarju že v elasto-plastičnem področju. Opisan je postopek merjenja, preskuševališče, način izbire materiala ter določitve geometrijske oblike preskušancev, ki zagotavlja, da pride pri preskusu do izbočitve v elasto-plastičnem območju. Rezultate preskusov primerjamo z rezultati matematičnega modela, v katerem upoštevamo idealizirano elastično linearno utrjevalno karakteristiko materiala ali izmerjeno dejansko karakteristiko materiala. Rezultati meritev in izračunov se razlikujejo za 5,5%.*

© 2002 Strojniški vestnik. Vse pravice pridržane.

**(Ključne besede: kolobarji krožni, območja elastoplastična, obremenitve kritične, metode eksperimentalne)**

*This paper presents an experimental determination of the buckling load and the buckling coefficient of a circular, annular plate with constant thickness that is made of an elastic-plastic hardening material. The annulus is simply supported and uniformly loaded on the outer edge, the inner edge is free and not loaded. The unstable state appears when the stress state is already in the elastic-plastic domain. The experimental results are compared to the results obtained from a mathematical model, which can take into account an idealized elastic, linear hardening, rheological model or a measured stress-strain curve. The paper describes the measuring procedure, the equipment and the choice of the material and the geometry of the specimens, which ensure that elastic-plastic buckling occurs during the experiment. The difference between the experimental and numerical results is 5.5 %.*

© 2002 Journal of Mechanical Engineering. All rights reserved.

**(Keywords: annular circular plates, elastic-plastic region, buckling loads, experimental methods)**

#### 0 UVOD

Eksperimentalno določanje kritične obremenitve temelji na merjenju pomikov plošče v prečni smeri  $w$  v odvisnosti od obremenitve. Meritve izvajamo na preskuševališču za preučevanje stabilnosti okroglih plošč, ki omogoča obremenjevanje krožnih plošč po zunanjem in/ali notranjem robu in je bilo zasnovano za raziskave stabilnosti plošč v elastičnem področju ([1] do [4]). Na podlagi izmerjene zveze med obremenitvijo in prečnim pomikom  $w$  lahko z uporabo ustreznih metod (Southwellova metoda [5] in metoda prevojne točke [4]) določimo obremenitev, pri kateri krožna plošča preide iz stabilnega v nestabilno stanje. Pri izbočitvi plošče v elastičnem področju, ki se pojavi pri dovolj vitkih - tankih ploščah, pride do elastičnih deformacij in plošča se po razbremenitvi vrne v začetno stanje, trajnih deformacij ni. Pri izbočitvi v elasto-plastičnem področju, pride do trajnih deformacij, po razbremenitvi se vzpostavi novo deformirano

#### 0 INTRODUCTION

The experimental investigation into buckling loads is based on a measurement of the lateral deflection,  $w$ , of the plate with regard to the applied load. The experiments were done using a special testing unit for circular plates, which allows the loading of circular plates on the outer and/or inner edge and was first built for studies of elastic buckling ([1] to [4]). When the relationship between the load and the lateral deflection,  $w$ , is measured, appropriate methods (Southwell's method [5] and the deflection-point method [4]) are used to determine the buckling load at which the circular plate passes from a stable to the unstable state. During elastic buckling, which is usual for slender, thin plates, only elastic deformations take place, and the plate returns to its original state after the loads are removed. With elasto-plastic buckling, plastic deformations appear, and after unloading a new, deformed, equilibrium state is

ravnotežno stanje. Namen preskusov je primerjava z rezultati matematičnega modela ([6] in [7]), pri katerem kritične obremenitve računamo z uporabo ravnotežne metode reševanja stabilnostnih problemov ob upoštevanju dveh teorij plastičnosti.

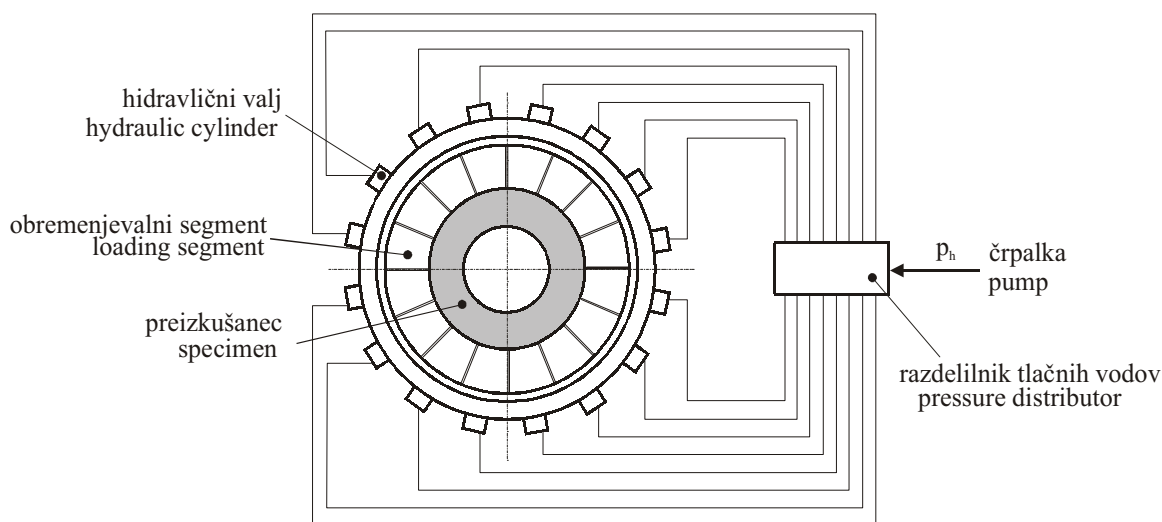
## 1 PRESKUŠEVALIŠČE

Sestavljeno je iz *vpenjalnega dela* (sl. 1) s 16 krožnimi obremenjevalnimi segmenti s hidravličnimi valji, hidravlično črpalko, krmilnikom in krmilnim vezjem za krmiljenje tlaka ter *elektronskega merilnega sklopa* (sl. 2), ki obsega zaznavalo tlaka HBM P19, LVDT zaznavalo pomika HBM WA 50 z ojačevalnikom MES HPSC 3102 ter osebni računalnik s kartico A/D INTELLIGENT INSTRUMENTATION PCI-20428W-1 za zbiranje podatkov ter programsko opremo *Visual Designer*.

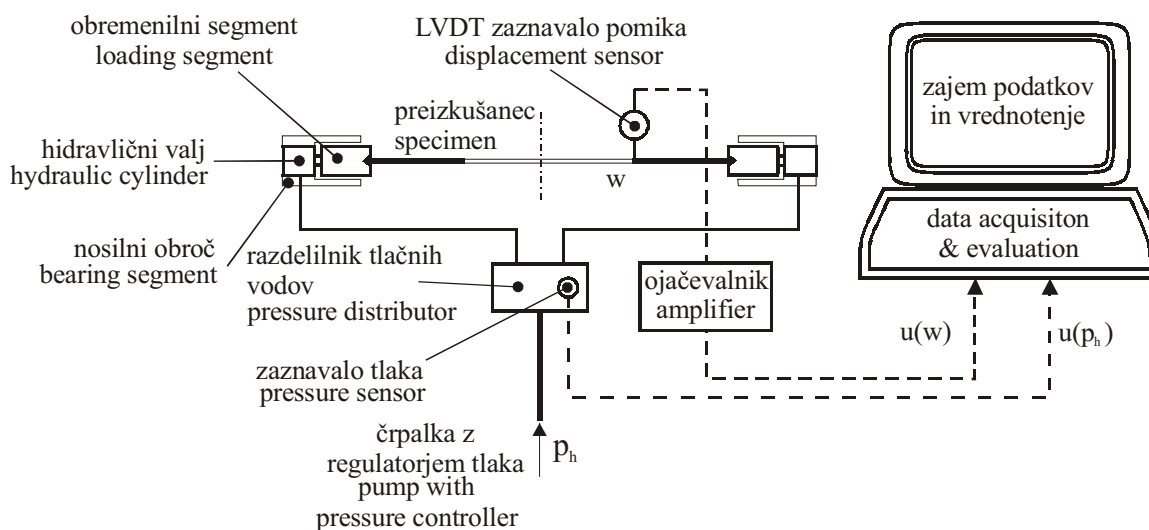
formed. The purpose of the experiments was to compare the experimental results with theoretical predictions ([6] and [7]). The theoretical results were obtained using the equilibrium approach and two different theories of plasticity.

## 1 TESTING UNIT

The testing unit comprises the *fastening assembly* (Fig. 1), with 16 circular loading segments and hydraulic cylinders, a hydraulic pump with pressure control unit; and the *electronic measuring assembly*, with an HBM P19 pressure gauge, an LVDT HBM WA 50 displacement sensor with an MES HPSC 3102 carrier amplifier and a desktop computer equipped with an INTELLIGENT INSTRUMENTATION PCI-20428W-1 data-acquisition card and *Visual Designer* software.



Sl. 1. Shema preskuševališča  
Fig. 1. Testing unit



Sl. 2. Shema merilne verige  
Fig. 2. Measuring set-up

Obremenitev roba plošče izračunamo posredno iz izmerjenega tlaka v hidravličnem sistemu  $p_h(w)$ . Pri preskusu merimo odvisnost  $p_h(w)$ . Zvezo med obremenitvijo in tlakom v hidravličnem sistemu določimo z umerjanjem tako, da z ustreznim merilnikom sile merimo silo obremenjevalnih segmentov (hidravličnih valjev) v odvisnosti od tlaka. Meritve večkrat ponovimo, rezultate pa poenostavimo z regresijsko premico. Tlak v hidravličnem sistemu  $p_h$  merimo na razdelilniku tlačnih vodov, pomike v prečni smeri  $w$  pa z LVDT zaznavalom. To je nameščeno na posebno konstrukcijo (šestilo), ki je pritrjena na zunanji obroč preskuševališča in omogoča merjenje pomikov na izbranem polmeru tudi v obodni smeri. Izhodne analogne signale merimo in shranjujemo na osebнем računalniku prek kartice A/D za zbiranje podatkov.

Preskušanci (krožne plošče) so lahko polne ali pa z izrezi poljubne oblike. Obremenitev je mogoča na zunanjem robu, notranji rob pa je običajno neobremenjen in prost, razen pri ploščah z notranjimi krožnimi odprtini, ko s posebno pripravo obremenimo tudi notranji rob. Rob krožne plošče mora biti posebej obdelan, tako da vpetje čimbolj ustreza členkasti podpori. Pomembnejši tehnični podatki preskuševališča so: polmer segmentov (zunanji polmer preskušancev)  $b=150$  mm ali  $b=300$  mm; število hidravličnih valjev in obremenjevalnih segmentov  $N_s=16$ ; dolžina loka segmenta  $L_s=58,9$  mm pri  $b=150$  mm; hidravlični pogonski agregat HPA-2B/320-16-2,2, največji tlak 32 MPa, pretok 2 l/min; nazivni prerez hidravličnega valja  $A_{nom}=126$  mm<sup>2</sup>.

## 2 IZBIRA PRESKUŠANCEV

Preučevanje izbočitve v elasto-plastičnem področju zahteva razmeroma debele preskušance. Če definiramo vitkost kot razmerje med zunanjim premerom kolobarja in debelino  $\eta=2b/h$ , to pomeni preskušance ustrezno majhne vitkosti  $\eta$ . Konstrukcija preskuševališča s hidravličnimi elementi ter največji hidravlični tlak, ki znaša  $p_{h,max}=32$  MPa, določajo največjo razpoložljivo zunanjo obremenitev  $P_{z,max}=63,8$  N/mm.

Mejna vitkost  $\eta_{mej}$ , pod katero se plošča izboči v elasto-plastičnem področju, je odvisna od načina obremenitve, podprtja, razmerja polmerov  $\delta=a/b$  in materialnih lastnosti ( $\sigma_{pl}$ ,  $E$ ,  $\nu$ ). Določimo jo lahko, če poznamo elastično napetostno stanje ter izbočitveni koeficient  $\kappa_{el}$  za elastično izbočitev. V našem primeru podrobneje analiziramo osnosimetrično elastično napetostno stanje  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\phi$  v kolobarju, ki je na zunanjem robu obremenjen z enakomerno tlačno obremenitvijo  $p_z=\beta p=-p$ , notranji rob pa je neobremenjen  $p_n=\alpha p=0$ . Osnosimetrično elastično napetostno stanje popisujeta enačbi:

$$\sigma_r = -p \frac{1-(a/r)^2}{1-\delta^2}, \quad \sigma_\phi = -p \frac{1+(a/r)^2}{1-\delta^2}$$

During the experiment, the relation  $p_h(w)$  was measured. The load applied to the edge of the plate was calculated from the measured pressure in the hydraulic system  $p_h$ . The relationship between the load and the pressure was obtained with a calibration, which consists of measurements of the loading segments' (hydraulic cylinders) load with respect to the pressure. A series of measurements must be made, and the relationship is obtained with a linear regression. The pressure in the hydraulic system,  $p_h$ , was measured on the pressure lines' distributor, whereas the lateral displacement,  $w$ , was measured with an LVTD displacement sensor. This is installed on a special device (similar to a pair of compasses) mounted on the outer ring of the testing unit, allowing displacement measurements in the circumferential direction on a preselected radius. The analog output signals were measured and stored on a desktop computer using the A/D acquisition card.

The specimens (circular plates) can be with or without cut-outs of an arbitrary shape. The loads can be applied to the outer edge, while the inner edge is usually free and not loaded, except for the plates with circular cut-outs, where a special device can be used to apply loads to the inner edge. The edge of the plate must be accurately machined to provide a support that meets the conditions of a simply supported edge. Other significant technical data include: loading segments radius (specimen outer radius)  $b=150$  mm or  $b=300$  mm; number of hydraulic cylinders and loading segments  $N_s=16$ ; the loading segment's arc length  $L_s=58.9$  mm at  $b=150$  mm; the hydraulic pump HPA-2B/320-16-2.2; the maximum pressure, 32 MPa; oil flow, 2 l/min; hydraulic cylinder nominal cross section,  $A_{nom}=126$  mm<sup>2</sup>.

## 2 CHOICE OF SPECIMENS

The study of elasto-plastic buckling requires relatively thick specimens. Defining the slenderness of the plate as the ratio between the outer diameter and the thickness  $\eta=2b/h$ , slender specimens are needed. The design of the testing unit and the maximum pressure,  $p_{h,max}=32$  MPa, define the maximum outer load  $P_{z,max}=63.8$  N/mm.

The slenderness limit  $\eta_{mej}$ , where the plate buckles in the elasto-plastic region, depends on the load case, the type of supports, the inner and outer radius ratio  $\delta=a/b$  and the material properties ( $\sigma_{pl}$ ,  $E$ ,  $\nu$ ). This can be calculated from the known elastic stress distribution and the elastic buckling coefficient  $\kappa_{el}$ . In our case the axi-symmetric elastic stress state  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\phi$  in the annulus, loaded with the constant compressive load  $p_z=\beta p=-p$  on the outer edge while the inner edge is not loaded  $p_n=\alpha p=0$ , is analysed. The axi-symmetric stress state is given by the following equations:

Največja Misesova primerjalna napetost  $\sigma_M^{max}$  se pojavi na notranjem robu ( $r=a$ ), kjer se, ko primerjalna napetost doseže mejo plastičnosti  $\sigma_{pl}$ , prične plastifikacija. Obremenitev pričetka plastifikacije izračunamo iz pogoja  $\sigma_M^{max}=\sigma_{pl}$ :

$$\sigma_M^{max} = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\phi + \sigma_\phi^2} = \frac{2p}{1-\delta^2}$$

$$P_{pl} = \frac{\sigma_{pl}(1-\delta^2)}{2}$$

Izbočitev v elasto-plastičnem področju dobimo, ko je kritična obremenitev  $p_{cr}^{el}$  večja od obremenitve pričetka plastifikacije  $p_{pl}$  oziroma  $p_{cr}^{el} \geq p_{pl}$ . Ker je izbočitveni koeficient za elastično izbočitev  $\kappa_{el}$  znan, lahko izračunamo mejno vitkost in s tem najmanjšo debelino preskušanca:

$$\eta_{mej} = \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{2\kappa_{el}^2}{3(1-\delta^2)}}, \quad h_{min} \geq 2b\eta_{mej}$$

Največjo debelino preskušanca izračunamo iz pogoja, da kritična obremenitev ob izbočitvi ne preseže največje obremenitve preskuševališča  $P_{z,max}$ . Ker je kritična obremenitev v elasto-plastičnem območju manjša od tiste za elastično območje, najbolj neugoden primer izberemo tako, da predpostavimo elastično izbočitev kolobarja. Ocena za največjo debelino preskušanca oziroma najmanjšo vitkost, ki izhaja iz pogoja  $p_{cr}^{el}h_{max} \leq P_{z,max}$ , je:

$$h_{max} \leq \sqrt[3]{\frac{12P_{z,max}(1-\nu^2)b^2}{\kappa_{el}^2 E}}$$

$$\eta_{min} \leq \sqrt[3]{\frac{2\kappa_{el}^2 E b}{3P_{z,max}(1-\nu^2)}}$$

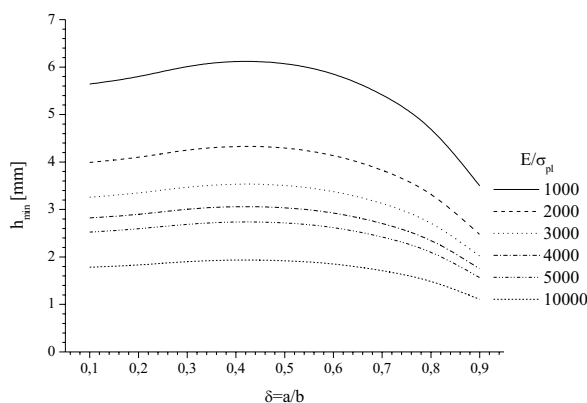
Debelino preskušancev izberemo med  $h_{min} \leq h \leq h_{max}$ . Diagram na sliki 3 prikazuje najmanjše debeline za kolobarja s prostim notranjim in členkasto podprtim zunanjim robom ter obremenitvijo, določeno z  $\alpha=0$ ,  $\beta=-1$ . Debeline so podane za različna razmerja polmerov  $\delta$  in razmerja  $E/\sigma_{pl}$ . Ker je največja obremenitev  $P_{z,max}$ , ki jo na preskuševališču dosežemo, razmeroma majhna, moramo izbrati material z razmeroma majhnim modulom elastičnosti  $E$  in ustrezno

The greatest Mises equivalent stress  $\sigma_M^{max}$  appears on the inner edge ( $r=a$ ), where, when the equivalent stress reaches the yield stress  $\sigma_{pl}$ , plastification starts. The load at the beginning of plastification is calculated from the condition  $\sigma_M^{max}=\sigma_{pl}$ :

Elasto-plastic buckling occurs when the buckling load  $p_{cr}^{el}$  is greater than the load at the beginning of plastification  $p_{pl}$  or  $p_{cr}^{el} \geq p_{pl}$ . Because the elastic buckling coefficient is known, the slenderness limit and the minimum thickness of the specimen can be calculated:

The maximum thickness of the specimen is calculated from the condition that the buckling load should not exceed the maximum load of the testing unit  $P_{z,max}$ . Because the buckling load in the elasto-plastic region is smaller than the elastic buckling load, the worst case is considered if elastic buckling is taken into account. The estimation for the maximum thickness of the specimen or the minimum slenderness, based on the condition  $p_{cr}^{el}h_{max} \leq P_{z,max}$ , is:

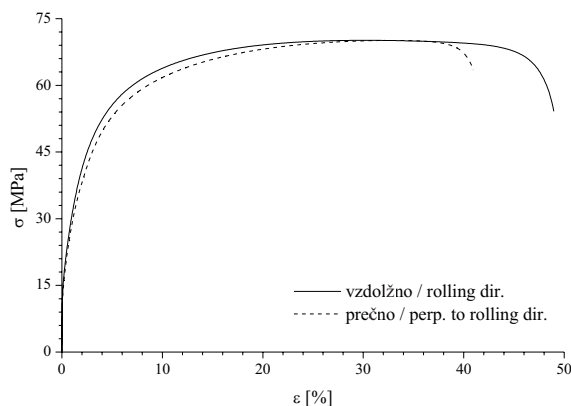
The thickness of the specimens is chosen to be between  $h_{min} \leq h \leq h_{max}$ . Fig. 3 shows the minimum thicknesses  $h_{min}$  for annular plates with a free inner and a simply supported outer edge, and loading defined by  $\alpha=0$ ,  $\beta=-1$ . Thicknesses are given for different ratios of radii  $\delta$  and  $E/\sigma_{pl}$ . Because of the relatively small testing-unit maximum load a strain-hardening material with a



Sl. 3. Mejne debeline  $h_{min}$  pri različnih razmerjih  $\delta$  in  $E/\sigma_{pl}$ ,  $\nu=0,3$   
Fig. 3. Minimum thickness  $h_{min}$  at different ratios  $\delta$  and  $E/\sigma_{pl}$ ,  $\nu=0,3$

mejo plastičnosti  $\sigma_{pl}$  ki mora poleg primernih mehanskih lastnosti imeti tudi elastično utrjevalno karakteristiko.

Po pregledu standardov smo izbrali Al pločevino debeline  $h=4$  mm v osnovnem mehkem stanju (oznaka po standardu EN AW-1050A [A199,5] oziroma po standardu DIN Al99,5 stanje O/H111), za katero je podana meja plastičnosti  $R_{p0,2}$  najmanj 20 MPa. Dejanske mehanske lastnosti smo izmerili pozneje z enoosnimi nateznimi preskusi. Preskušance smo izdelali tako, da so bili usmerjeni v smeri valjanja ter prečno na smer valjanja pločevine. Na ta način smo preverili anizotropijo materiala.



Sl. 4. Izmerjeni diagram  $\sigma$ - $\varepsilon$  materiala preskušancev

Fig. 4. Measured  $\sigma$ - $\varepsilon$  diagram of the specimens material

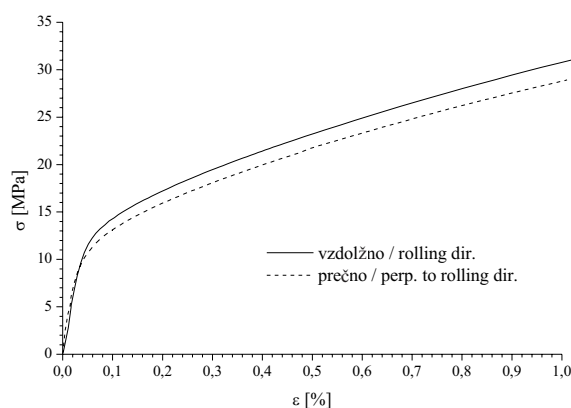
Diagrama na slikah 4 in 5 prikazujeta srednje vrednosti nateznih preskusov za prečno in vzdolžno usmerjenost preskušancev glede na smer valjanja. Razvidno je, da ima material izrazito utrjevalno karakteristiko. V smeri valjanja so napetosti tečenja nekoliko večje, modul elastičnosti in meja plastičnosti pa sta približno enaka. Diagram na sliki 5 prikazuje točko začetka plastifikacije, kjer vidimo, da je meja plastičnosti  $\sigma_{pl}$  precej manjša od  $R_{p0,2}$  in  $R_{p0,1}$ . Izmerjene mehanske lastnosti so: elastični modul  $E=30800$  MPa; meja plastičnosti  $\sigma_{pl}=10$  MPa; meja plastičnosti  $R_{p0,1}=15,3$  MPa; meja  $R_{p0,2}=17,9$  MPa. Če poenostavimo diagram v elasto-plastičnem področju do skupne deformacije 5% z linearno utrjevalnim reološkim modelom, je faktor linearnega utrjevanja materiala približno  $f=0,4$ .

### 3 REZULTATI MERITEV

Izdelali smo šest preskušancev z zunanjim polmerom  $b=150$  mm in razmerjem polmerov  $\delta=0,4$ . Pred preskusi smo izmerili dejanske velikosti ter preverili začetno neravnost preskušancev, za katero se je pri predhodnih raziskavah izkazalo, da ima precejšen vpliv na rezultate meritev ([1], [2] in [4]). Nadzor smo izvedli na dva načina, in sicer optično z ravno letvijo ter z merjenjem relativne neravnosti zunanjega ( $r=b$ ) in notranjega ( $r=a$ ) roba kolobarja (tabela 1) glede na izbrano začetno točko. Preskušane smo vpeli v preskuševališče tako, da smo

small elastic modulus  $E$  and yield stress  $\sigma_{pl}$  must be chosen.

After reviewing the standards, an Al,  $h=4$  mm-thick sheet metal in an elementary soft state (standard designation EN AW-1050A [A199,5] or DIN standard DIN Al99,5 state O/H111) with a declared yield stress  $R_{p0,2min}=20$  MPa was chosen. The actual mechanical properties were subsequently determined by uniaxial tensile tests. The specimens were oriented in, and perpendicular to, the rolling direction to check the eventual material anisotropy.



Sl. 5. Izmerjeni diagram  $\sigma$ - $\varepsilon$ , območje do 1% skupne deformacije

Fig. 5. Measured  $\sigma$ - $\varepsilon$  diagram, region up to 1% total strain

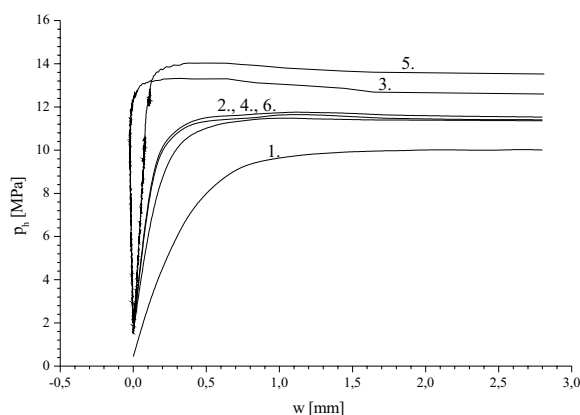
Fig. 4 and 5 show the average values of the tensile tests for the crosswise and alongside specimen orientations. It is clear that the material has a well-defined hardening characteristic. In the direction of rolling the stresses in the plastic region are slightly greater, while the elastic modulus and the yield stress are almost the same. Fig. 5 shows the actual yielding stress  $\sigma_{pl}$  which is significantly smaller than  $R_{p0,2}$  and  $R_{p0,1}$ . The measured mechanical properties are: elastic modulus  $E=30800$  MPa; yield stress  $\sigma_{pl}=10$  MPa;  $R_{p0,1}=15.3$  MPa;  $R_{p0,2}=17.9$  MPa. If the elasto-plastic region of the diagram up to 5% of the total strain is approximated by a linearly hardening rheological model, the linear hardening coefficient is  $f=0.4$ .

### 3 EXPERIMENTAL RESULTS

Six specimens with outer radius  $b=150$  mm and inner-to-outer radii ratio  $\delta=0.4$  were made. Before the experiment the actual dimensions and the initial displacements, which in the previous studies showed a great influence on the experimental results ([1], [2] and [4]), were measured. The initial displacements were checked optically with a ruler and by measuring the relative unevenness of the outer ( $r=b$ ) and inner ( $r=a$ ) edges of the specimen (Table 1). The specimens were placed into the testing

izničili morebitne zračnosti na mestih podpor in tako zagotovili čimbolj enakomerno zunanjo obremenitev. Pri tem ima pomembno vlogo natančnost priprave roba preskušanca.

Diagrami na sliki 6 prikazujejo izmerjene funkcije  $p_h(w)$ . Vidimo, da se z večanjem obremenitve tlaka  $p_h$  večajo tudi pomiki v prečni smeri  $w$ . Zanimivo je, da v nasprotju s preskusi, pri katerih pride do elastične izbočitve, ne dobimo diagrama s prevojno točko, temveč kolobar pri kritični obremenitvi zelo hitro preide v novo stabilno stanje, za katero je po razbremenitvi značilen trajni pomik  $w_{zb}$ , ki znaša od 11 do 13,5 mm (preglednica 1).



Sl. 6. Izmerjeni diagrami  $p_h(w)$   
Fig. 6. Measured diagrams  $p_h(w)$

V nasprotju s predhodnimi raziskavami, pri katerih so kritično obremenitev iz rezultatov meritev določali z metodo prevojne točke [4] ali s Southwellovo metodo ([5], [1] in [2]), smo lahko točko prehoda kolobarja iz stabilnega v nestabilno stanje natančno določili že iz diagramov. Pri tem smo za kritično obremenitev  $p_{h,cr}$  upoštevali največjo izmerjeno obremenitev pri posameznem preskusu.

Diagrami meritev preskušancev 2, 4 in 6 se med seboj dobro ujemajo. Meritev preskušanca 1 prikazuje hitrejšo povečevanje deformacije v prečni smeri ter manjšo vrednost tlaka ob izbočitvi, kar lahko pripišemo izmerjeni večji začetni neravnosti od drugih preskušancev. Pri meritvah preskušancev 3 in 5 je značilen majhen prečni pomik  $w$  vse do točke, v kateri je tlak skoraj enak kritičnemu tlaku, sledi pa trenuten prehod v novo deformirano stabilno stanje, pri čemer tlak celo nekoliko pade. Čeprav se začetna neravnost preskušancev 3 in 5 bistveno ne razlikuje od preskušancev 2, 4 in 6, predvidevamo, da sta preskušanca v teh primerih pokazala nadkritično obnašanje. To lahko potrdimo z dejstvom, da znaša teoretična obremenitev za elastično izbočitev 22,153 N/mm, obremenitvi, pri kateri sta preskušanca 3 in 5 izbočila, pa sta za 21,2% oziroma za 27,5% večji.

Če vzamemo za odločilne preskuse 2, 4 in 6, znaša povprečni hidravlični tlak ob izbočitvi  $p_{h,cr} = 11,633$  MPa, kar ustreza zunanji enotski kritični obremenitvi

unit very carefully to prevent play and to ensure as much as possible a constant outer load. The accuracy of the outer-edge preparation has an important role at this stage.

Fig. 6 shows the measured functions  $p_h(w)$ . It is evident that by increasing the load-pressure  $p_h$  the lateral displacements,  $w$ , also increase. It is interesting that, for the difference with the experiments where elastic buckling occurs, the diagrams do not show the inflection point and the annulus as the buckling load passes very quickly into a new stable state, characterised by a permanent deflection  $w_{zb}$  of 11 to 13.5 mm (Table 1).

In contrast with previous research, where the buckling loads were determined from the measured data by the method of the inflection point [4] or Southwell's method ([5], [1] and [2]), in our case the point of buckling was exactly determined, directly from the diagrams. The buckling load  $p_{h,cr}$  was determined by considering the maximum measured load during a single experiment.

The diagrams of specimens 2, 4 and 6 are in good agreement. The diagram of specimen 1 shows a greater increment of the lateral displacement and a smaller pressure value during buckling, which can be attributed to a greater measured initial displacement compared to other specimens. Specimens 3 and 5 show very small lateral displacements,  $w$ , to almost up the critical pressure, followed by immediate passage into a new, deformed, stable state, during which the pressure even drops a little. Though the initial displacements of specimens 3 and 5 do not differ significantly from specimens 2, 4 and 6 we believe that the specimens exhibited post-critical behavior. This can be substantiated by the fact that the theoretical elastic buckling load is 22.153 N/mm and the buckling loads of specimens 3 and 5 are 21.2% and 27.5% greater.

If experiments 2, 4 and 6 are considered as characteristic, the average hydraulic pressure during buckling is  $p_{h,cr} = 11.633$  MPa, which is equivalent to

Preglednica 1. *Relativna neravnost kolobarja, največja razlika*

Table 1. *Relative initial unevenness, greatest difference*

Pr.	r=a mm	r=b mm	w <sub>izb</sub> mm
1.	0,65	0,56	11,0
2.	0,38	0,25	12,0
3.	0,26	0,20	13,5
4.	0,33	0,29	13,2
5.	0,35	0,25	13,0
6.	0,11	0,27	12,8

Preglednica 3. *Izračunane kritične obremenitve in izbočitveni koeficienti, linearno utrjevalni reološki model*

Table 3. *Calculated buckling loads and buckling coefficients, linearly hardening rheological model*

	KNDZ FSSR	DNDZ DSSR
$p_{cr}/\sigma_{pl}$	0,5179	0,5186
$(p_{cr}/\sigma_{pl})^{el}$	0,5542	0,5542
$P_{cr}$ N/mm	20,699	20,730
$P_{cr}^{el}$ N/mm	22,153	22,153
$\Delta P_{cr}$	-6,6%	-6,4%
$\kappa$	1,6134	1,6146
$\kappa_{el}$	1,6691	1,6691
$\Delta \kappa$	-3,3%	-3,3%

$P_{z,cr} = 23,15$  N/mm oziroma izbočitvenemu koeficientu  $\kappa = 1,706$ . Ugotovljeni absolutni odstopok merjenja zunanje enotske obremenitve znaša  $\pm 1,03$  N/mm, kar pri izmerjeni zunanji enotski obremenitvi  $P_{z,cr} = 23,15$  N/mm ustreza relativnemu odstopku meritve  $\pm 4,5\%$ .

#### 4 IZRACUNI PRESKUŠANCEV

Za geometrijsko obliko in mehanske lastnosti preskušancev  $a=59,017$  mm,  $b=150,5$  mm,  $h=3,997$  mm  $E=30800$  MPa,  $\nu=0,3$ ,  $\sigma_{pl}=10$  MPa) izvedemo primerjalne izračune z matematičnim modelom ([6] in [7]). Pri tem upoštevamo linearni utrjevalni reološki model materiala s faktorjem utrjevanja  $f=0,4$ , za primerjavo pa izvedemo izračune tudi z upoštevanjem izmerjenega diagrama  $\sigma-\varepsilon$  (sl. 4, 5). Upoštevamo dve teoriji plastičnosti, in sicer končne napetostno deformacijske zveze (**KNDZ**, Hencky—jeve enačbe) ter diferencialne napetostno deformacijske zveze (**DNDZ**, Reuss—Prandtlove enačbe).

Rezultati izračunov so prikazani v preglednicah 3 in 4, kjer je podana tudi primerjava elasto-plastičnih kritičnih obremenitev in izbočitvenih koeficientov z elastičnimi kritičnimi obremenitvami in izbočitvenimi koeficienti. Razlike izračunov po eni oziroma drugi teoriji plastičnosti so majhne, pri čemer izračuni z upoštevanjem diferencialnih napetostno deformacijskih zvez dajejo nekoliko višje kritične obremenitve kakor v primeru končnih napetostno deformacijskih zvez. Če primerjamo izračunane vrednosti z izmerjenim izbočitvenim koeficientom  $\kappa=1,706$ ,  $\pm 4,5\%$ , ugotovimo, da znaša razlika 5,5%.

Preglednica 2. *Izmerjene kritične obremenitve in izbočitveni koeficienti*

Table 2. *Measured buckling loads and buckling coefficients*

Pr.	$p_{h,cr}$ MPa	$P_{z,cr}$ N/mm	$\kappa$
1.	10,02	19,77	1,577
2.	11,49	22,85	1,695
3.	13,40	26,85	1,838
4.	11,77	23,44	1,717
5.	14,06	28,24	1,884
6.	11,64	22,16	1,707

Preglednica 4. *Izračunane kritične obremenitve in izbočitveni koeficienti, dejanski diagram  $\sigma-\varepsilon$*

Table 4. *Calculated buckling loads and buckling coefficients, actual  $\sigma-\varepsilon$  diagram*

	KNDZ FSSR	DNDZ DSSR
$p_{cr}/\sigma_{pl}$	0,5200	0,5226
$(p_{cr}/\sigma_{pl})^{el}$	0,5542	0,5542
$P_{cr}$ N/mm	20,783	20,889
$P_{cr}^{el}$ N/mm	22,153	22,153
$\Delta P_{cr}$	-6,2%	-5,7%
$\kappa$	1,6167	1,6208
$\kappa_{el}$	1,6691	1,6691
$\Delta \kappa$	-3,1%	-2,9%

the outer unit buckling load  $P_{z,cr} = 23.15$  N/mm or the buckling coefficient  $\kappa = 1.706$ . The established absolute measuring error of the outer load is  $\pm 1.03$  N/mm, which gives, at the measured outer load of  $P_{z,cr} = 23.15$  N/mm, a relative measuring error of  $\pm 4.5\%$ .

#### 4 THEORETICAL PREDICTIONS

Comparative calculations were carried out for the geometry and the mechanical properties of the specimens ( $a=59.017$  mm,  $b=150.5$  mm,  $h=3.997$  mm,  $E=30800$  MPa,  $\nu=0.3$ ,  $\sigma_{pl}=10$  MPa) using a mathematical model ([6] and [7]). A linearly hardening rheological model with the hardening coefficient  $f=0.4$  was used. For comparison, calculations considering the measured  $\sigma-\varepsilon$  diagram, Fig. 4 and 5, were also carried out. Two theories of plasticity, the finite stress-strain relations (**FSSR**, Hencky equations) and the differential stress-strain relations (**DSSR**, Reuss—Prandtl equations), were used.

The calculated results are shown in tables 3 and 4, where a comparison of the elasto-plastic and elastic buckling loads and coefficients can be seen. The differences between the two theories of plasticity are minimal where the differential stress-strain relations give slightly greater buckling loads compared to the finite stress-strain relations. If the calculated buckling coefficients are compared to the measured  $\kappa=1.706$ ,  $\pm 4.5\%$ , a difference of 5.5% is obtained.

## 5 SKLEP

Glede na predhodne eksperimentalne raziskave stabilnosti krožnih kolobarjev v elastičnem področju, pri katerih so prehod iz stabilnega v nestabilno stanje določali z metodo prevojnne točke ali s Southwellovo metodo, so preskusi, pri katerih je prišlo do elasto-plastične izbočitve, pokazali drugačno obnašanje. Kolobar preide v nestabilno stanje skoraj v trenutku pri relativno majhnem prečnem pomiku, ki se nato poveča do velikega trajnega pomika pri skoraj nespremenjeni obremenitvi. Ta lastnost omogoča neposredno določanje kritične obremenitve iz diagrama meritve. Eksperimentalno določeni izbočitveni koeficienti so 5,5% večji od izračunanih, pri čemer znaša ugotovljena merilna natančnost eksperimentalnih rezultatov  $\pm 4,5\%$ . Ocenjujemo, da je ujemanje rezultatov zadovoljivo, čeprav bi z uporabo natančnejšega merilnika sile pri določanju zveze med silo valja in hidravličnim tlakom merilno natančnost eksperimentalnih rezultatov lahko še povečali. Pri izračunih, pri katerih smo upoštevali linearno utrjevalni reološki model ter izmerjeni diagram  $\sigma$ - $\varepsilon$  materiala, vidimo, da približek z linearnim utrjevalnim modelom daje primerljive rezultate.

## 5 CONCLUSION

Considering the previous experimental buckling investigations of circular annular plates in the elastic region, where the buckling load must be determined using the inflection-point method or by Southwell's method, the elasto-plastic buckling experiments showed a different behavior. The annular plate buckles almost immediately at a small lateral deflection, which afterwards increases to a large, permanent lateral deflection at almost constant load. This characteristic allows a direct determination of the buckling load from the measurement diagram. The experimentally determined buckling coefficients are 5.5% greater than the calculated, where the measuring accuracy is  $\pm 4.5\%$ . It is estimated that the agreement between the results is satisfactory, although the measuring accuracy could be improved by using a more accurate force transducer for the determination of the force-to-hydraulic-pressure relation. The calculations, where the linearly hardening rheological model and the measured  $\sigma$ - $\varepsilon$  diagram of the material was used, showed that the approximation with a linear model yields comparable results.

6 LITERATURA  
6 REFERENCES

- [1] Kumelj, T. (1977) Stabilnost ploskovnih elementov. Master's thesis, *Fakulteta za strojništvo*, Univerza v Ljubljani.
- [2] Baebler, M. (1979) Eksperimentalno določanje stabilnosti ploskovnih elementov. Master's thesis, *Fakulteta za strojništvo*, Univerza v Ljubljani.
- [3] Baebler, M., F. Kosel (1982) Experimental investigation of the stability of a plate with hole. In *Anton Kuhelj memorial volume*, 205–214. SAZU, Ljubljana.
- [4] Kosel, F., Jin Chen (1997) Buckling of a thin annular plate subjected to two apposite locally acting pressures and supported at two opposite points. *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(12):1325–1343.
- [5] Timoshenko, S.P., J.M. Gere (1961) Theory of elastic stability. *Mc-Graw Hill*, New York.
- [6] Bremec, B., F. Kosel (2001) Izbočitev krožnega kolobarja v elastičnem-plastičnem področju z upoštevanjem utrjevalne karakteristike. In Leopold Škerget, editor, *Zbornik del – Kuhljevi dnevi '01*, pages 65–72. Slovensko društvo za mehaniko.
- [7] Bremec B., F. Kosel (2001) Buckling of a circular annular plate in the elastic–plastic region: an elastic linear hardening rheological model. *Journal of Mechanical Engineering–Strojniški vestnik*, 47(9):554–565.

Naslov avtorjev: Boštjan Bremec  
 prof.dr. Franc Kosel  
 Univerza v Ljubljani  
 Fakulteta za strojništvo  
 Aškerčeva 6  
 1000 Ljubljana  
 bostjan.bremec@fs.uni-lj.si  
 franc.kosel@fs.uni-lj.si

Author's Address: Boštjan Bremec  
 Prof.Dr. Franc Kosel  
 Faculty of Mechanical Eng.  
 University of Ljubljana  
 Aškerčeva 6  
 1000 Ljubljana, Slovenia  
 bostjan.bremec@fs.uni-lj.si  
 franc.kosel@fs.uni-lj.si

Prejeto: 20.1.2003  
 Received:

Sprejeto: 31.1.2003  
 Accepted: