

## Modeliranje padavinskih\* matrik z mešanico Gaussovih funkcij

### The Modelling of Rainflow Matrices with a Mixture of Gaussian Functions

Jernej Klemenc - Matija Fajdiga

Za vrednotenje dinamično obremenjenih konstrukcij z vidika utrujanja, je treba poznati dinamične obremenitve konstrukcije, ki jih dobimo z meritvami ali simulirani. Tako dobljene časovne poteke obremenitev nato spremenimo v obliko, ki je primerna za napoved utrujenostne poškodbe. Ker je utrujenostna poškodba odvisna od obremenitvenih ponovitev, ki so vsebovani v časovnem poteku obremenitev, iz časovnega poteka obremenitev najprej izločimo obremenitvene ponovitve z uporabo števnih metod. V ta namen se v avtomobilski industriji pogosto uporablja padavinska števna metoda, katere rezultat je matrika relativnih frekvenc obremenitvenih ponovitev. Z aproksimacijo padavinske matrike z ustrezno zvezno funkcijo gostote porazdelitve verjetnosti izločimo naključne fluktuacije relativnih frekvenc v matriki in omogočimo ekstrapolacijo verjetnosti v področje obremenitvenih ponovitev, ki se niso pojavili v izmerjeni ali simuliranem časovnem poteku obremenitev. V prispevku je prikazana metoda modeliranja padavinskih matrik z mešanico Gaussovih funkcij. Ocena neznanih parametrov mešanice Gaussovih funkcij je izvedena z metodo največje verjetnosti. Uspešnost te metode je ocenjena na primerih realnih časovnih potekov obremenitev.

© 2001 Strojniški vestnik. Vse pravice pridržane.

**(Ključne besede: funkcije Gauss, gostota porazdelitve verjetnosti, metode maksimalne verjetnosti, algoritem EM)**

To evaluate the fatigue damage of a dynamically loaded structure, a time history of the structure load should be acquired first. This can be done by means of experiments or simulations. When the time history of the loads is known, it should be transformed into a form that is suitable for the prediction of the fatigue damage. This fatigue damage of the structure depends heavily on the load cycles that are included in the load time history. Load cycles are extracted from the load time history with different counting methods. A rainflow counting method is widely used in the automotive industry. The rainflow counting method results in a matrix of the relative frequencies of the load cycles, which are included in the load time history. With an approximation of the rainflow matrix by a continuous probability density function, random fluctuations of the relative frequencies are reduced and an extrapolation of the probability of the load cycles that were not actually recorded is made possible. In our paper a method of modelling the rainflow matrices by means of a mixture of Gaussian functions will be presented. Unknown parameters of the normal mixture will be estimated with a maximum-likelihood method. The effectiveness of this method will be presented and discussed with an example of the load time histories of a real structure.

© 2001 Journal of Mechanical Engineering. All rights reserved.

**(Keywords: Gaussian functions, probability density, maximum likelihood methods, EM algorithm)**

#### 0 UVOD

Doba obstojnosti konstrukcij je odvisna od obremenitvenih stanj konstrukcij in zadržljivosti materiala. Splošen postopek napovedi dobe trajanja dinamično obremenjenih konstrukcij je tak, da v razvojnem postopku skušamo oceniti povezavo med zadržljivostjo materiala in dobo trajanja konstrukcije [8]. Zdržljivost materiala je navadno podana v obliki krivulj zadržljivosti za primer dinamičnega obremenjevanja z nespremenljivo amplitudo

\* v angleščini: rainflow

#### 0 INTRODUCTION

The fatigue life of structures depends on load states and material endurance. A general approach to the fatigue-life prediction of random loaded structures is that a correlation between the fatigue life, the random load states and the endurance of the material is determined [8]. The endurance of materials is generally known and is usually given in the form of  $S-N$  (stress-number of rever-

obremenitvenih ponovitev in je v splošnem poznana. Obremenitvena stanja konstrukcij v splošnem predstavljajo neznanko, zato jih je treba ovrednotiti, bodisi s preskusi, bodisi s simuliranjem. Napoved dobe trajanja dinamično obremenjenih konstrukcij nato poteka tako, da najprej izločimo obremenitvene ponovitve iz časovnega poteka obremenitev naše konstrukcije, nakar z ustrežno hipotezo o akumulaciji poškodb in podatkov o zdržljivosti materiala ocenimo poškodbo, ki jo povzročijo posamezne obremenitvene ponovitve. Celotna poškodba je enaka vsoti poškodb, ki jo povzročijo posamezne obremenitvene ponovitve.

Za napoved poškodb dinamično obremenjenih konstrukcij pogosto uporabljamo Palmgren-Minerjevo hipotezo o akumulaciji poškodb. Čeprav je Palmgren-Minerjeva hipoteza ena izmed najbolj uporabljenih metod za napoved poškodbe dinamično obremenjenih konstrukcij, je natančnost te metode sorazmerno majhna. Zato jo uporabljamo predvsem v zgodnejših fazah razvojnega postopka. Natančnejšo oceno dobe trajanja izvajamo v kasnejših fazah razvojnega postopka z dinamičnimi preskusi konstrukcij. Če za napoved poškodbe uporabljamo Palmgren-Minerjevo hipotezo, ponavadi izločimo obremenitvene ponovitve iz časovnih potekov obremenitev z padavinsko števno metodo, ker tako izločene obremenitvene ponovitve ustrezajo sklenjenim histereznim zankam v diagramu  $\sigma$ - $\epsilon$  [6].

V praksi uporabljamo več različic Palmgren-Minerjeve hipoteze o akumulaciji poškodb. Najpreprostejši način ocene dobe trajanja je, da poškodbo izračunamo na podlagi amplitude obremenitvenih ponovitev  $S_a$ . Tak način ocene dobe trajanja je primeren, če lahko vpliv srednjih vrednosti obremenitvenih ponovitev zanemarimo. V primeru, ko se poškodba pojavi zaradi velikega števila obremenitvenih ponovitev z majhnimi amplitudami in različnimi srednjimi vrednostmi, vpliva srednjih vrednosti ne smemo zanemariti [7]. Tedaj je treba izločiti obremenitvene ponovitve iz časovnega poteka obremenitev z dvoparametrično padavinsko števno metodo. V tem primeru je obremenitvena ponovitev predstavljena z vektorsko spremenljivko  $\mathbf{S}=(S_a, S_m)$ , ki ima dve komponenti: amplitudo obremenitvene ponovitve  $S_a$  in srednjo vrednost obremenitvene ponovitve  $S_m$ . Rezultat štetja z dvoparametrično padavinsko metodo je tako matrika relativnih frekvenc obremenitvenih ponovitev. Poškodba, ki jo povzroči ena obremenitvena ponovitev, je odvisna od amplitude  $S_a$  in srednje vrednosti  $S_m$  obremenitvene ponovitve.

V primeru naključnih obremenitvenih stanj, ki so opisana z razmeroma kratkimi časovnimi poteki obremenitev, je treba za bolj zanesljivo napoved dobe trajanja izvesti ekstrapolacijo v področje obremenitvenih ponovitev z majhno verjetnostjo realizacije. Tega ni mogoče storiti s sedanjo padavinsko matriko. Zato smo se odločili, da porazdelitev obremenitvenih ponovitev v padavinski domeni opišemo z zvezno gostoto porazdelitve verjetnosti (GPV)  $f(\mathbf{S})$  obremenitvenih ponovitev  $\mathbf{S}$ . Velikost poškodbe  $D$ , ki jo povzroči  $N_{tot}$  obremenitvenih

sals) curves for constant-amplitude loading. The load states of structures are generally unknown and need to be evaluated by means of experiments or simulations. In the process of fatigue-life prediction, load cycles are first extracted from time-dependent load histories. Next, a proper damage rule is chosen and the damage caused by individual load cycles is calculated. The total damage equals the sum of the damages resulting from individual load cycles.

One of the most widely used damage rules is the Palmgren-Miners linear damage rule. However, though this method is one of the most widely used, its accuracy can be quite poor. That is why it tends to be used in earlier phases of the R&D process. A more accurate fatigue-life prediction is achieved in the final phases of the R&D process by testing the structures dynamically. When the Palmgren-Miners damage rule is used for the fatigue damage estimation, a rainflow counting method is generally used for extracting the load cycles from the load histories, because the load cycles extracted in this manner correspond to closed hysteresis loops in the  $\sigma$ - $\epsilon$  diagram [6].

In practice many different forms of the Palmgren-Miners damage rule are used. In its most simple variation the fatigue damage is estimated only on the basis of load-cycle amplitudes  $S_a$ . Such an approach is appropriate when the influence of the load cycle means that  $S_m$  can be neglected. However, if the fracture occurs due to a large number of load cycles with small amplitudes and very different means, the influence of load-cycle means should not be underestimated [7]. When load-cycle means also need to be considered in the estimation of the fatigue damage, the extraction of the load cycles from the load histories is performed with a two-parametric rainflow method. A load cycle is then represented as a vector  $\mathbf{S}=(S_a, S_m)$  with two components: a load-cycle amplitude  $S_a$  and a load-cycle mean  $S_m$ . Cycle counting with the two-parametric rainflow method results in a matrix of load-cycle relative frequencies. The damage caused by individual load-cycles then depends on a load cycle amplitude and a load-cycle mean.

In the case of random load states that are composed of relatively short random load histories, it is necessary to extrapolate the distribution of load cycles to the region where there are no measured data for a more reliable assessment of the fatigue life. This cannot be done with the rainflow matrix that relates to the extracted load cycles. So a decision was made to model the distribution of the load cycles in a rainflow domain with a continuous multivariate probability density function (PDF)  $f(\mathbf{S})$  of load cycles  $\mathbf{S}$ . The total damage caused by  $N_{tot}$  load cycles with

ponovitev z zvezno gostoto porazdelitve  $f(\mathbf{S})$  lahko v splošnem izračunamo z integralom po območju možnih realizacij obremenitvenih ponovitev ([4] in [7]):

$$D = \iint_{\mathbf{S}} N_{tot} \cdot f(\mathbf{S}) / N_f(\mathbf{S}) dS_a dS_m \quad (1).$$

Zdržljivost materiala  $N_f(\mathbf{S})$  je poznana, treba pa je oceniti zvezno večdimenzionalno GPV obremenitvenih ponovitev  $f(\mathbf{S})$  obremenitvenih ponovitev, ki so bile izločene iz časovnih potekov obremenitev s padavinsko števno metodo. Večdimenzionalna GPV  $f(\mathbf{S})$  mora ustrezati porazdelitvi izločenih obremenitvenih ponovitev in omogočati ekstrapolacijo v področje obremenitvenih ponovitev z majhno verjetnostjo realizacije.

## 1 NASTAVEK ZA REŠITEV PROBLEMA

Namen raziskave je določitev takšne zvezne večvariantne GPV obremenitvenih ponovitev  $f(\mathbf{S})$ , da bo le-ta izpolnila zahtevi, podani v uvodu. Zato smo se odločili, da bomo zvezno GPV obremenitvenih ponovitev  $f(\mathbf{S})$  modelirali z mešanico dvodimenzionalnih Gaussovih funkcij [1]:

$$f(\mathbf{S}) = f(S_a, S_m) = \sum_{k=1}^K U_k \cdot N(\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k) \quad (2),$$

$$N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = (2 \cdot \pi)^{-d/2} \cdot \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma}^{-1})} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{S} - \boldsymbol{\mu})^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \cdot (\mathbf{S} - \boldsymbol{\mu}) \right] \quad (3).$$

Pri tem pomenijo:  $U_k$  - utež,  $\boldsymbol{\mu}_k$  - vektor srednjih vrednosti,  $\boldsymbol{\Sigma}_k$  - kovariančno matriko,  $d$  = dvodimenzionalna  $k$ -te večdimenzionalne Gaussove funkcije v mešanici.  $\mathbf{S}$  je naključna spremenljivka, ki pomeni obremenitvene ponovitve.

Ko smo izbrali funkcionalno obliko zvezne GPV obremenitvenih ponovitev  $f(\mathbf{S})$ , moramo oceniti njene neznane parametre. Ocenovanje parametrov funkcije  $f(\mathbf{S})$  izvedemo z metodo največje verjetnosti, ki jo dopolnimo z algoritmom matematičnega pričakovanja (EM). Z izbrano metodo je mogoče neznane parametre funkcije  $f(\mathbf{S})$  oceniti bodisi na podlagi izločenih obremenitvenih ponovitev, bodisi na podlagi matrike relativnih frekvenc obremenitvenih ponovitev. V prispevku bosta prikazana oba postopka ocene neznanih parametrov.

Kriterij za ovrednotenje uspešnosti ocene neznanih parametrov funkcije  $f(\mathbf{S})$  je ujemanje izmerjenih in modeliranih obrobni GPV in ustreznih obrobni obremenitvenih kolektivov (OK) amplitud in srednjih vrednosti obremenitvenih ponovitev.

## 2 PRIPRAVA PODATKOV ZA MODELIRANJE ZVEZNE FUNKCIJE GPV OBREMITVENIH PONOVITEV

Za prikaz uspešnosti ocene neznanih parametrov mešanice Gaussovih funkcij z metodo

the probability density function  $f(\mathbf{S})$  can be calculated by integrating over the domain of possible realisations of the load cycles ([4] and [7]):

The endurance of material  $N_f(\mathbf{S})$  is generally known. What is needed is an estimation of the continuous multivariate PDF  $f(\mathbf{S})$  of the load cycles. The estimation of the function  $f(\mathbf{S})$  should be based on the distribution of the load cycles  $\mathbf{S}=(S_a, S_m)$ , extracted from the load histories by the two-parametric rainflow method. The multivariate PDF  $f(\mathbf{S})$  must adequately represent the probability distribution of the load cycles and must allow extrapolation to the region where there are no measured data.

## 1 THE BASIS FOR THE SOLUTION OF THE PROBLEM

The goal of the research was to define a functional structure of the multivariate PDF of the load cycles  $f(\mathbf{S})$  that will fulfil both requirements that were introduced at the end of section 0. That is why a decision was made to model the continuous multivariate PDF of the load cycles  $f(\mathbf{S})$  with a mixture of two-dimensional Gaussian functions [1]:

Where  $U_k$  is a weight factor of the  $k$ -th multivariate Gaussian function;  $\boldsymbol{\mu}_k$  and  $\boldsymbol{\Sigma}_k$  are its mean vector and covariance matrix, respectively.  $\mathbf{S}$  is a random variable that represents load cycles.

After the functional structure of the multivariate PDF of the load cycles  $f(\mathbf{S})$  has been determined, its unknown parameters must be estimated. This is done by means of the maximum-likelihood method, supplemented with an Expectation Maximization (EM) algorithm. With this method it is possible to estimate unknown parameters of the normal mixture  $f(\mathbf{S})$  on the basis of the extracted load cycles or their corresponding rainflow matrix. Both variants of the estimation of the normal mixture parameters will be presented in this paper.

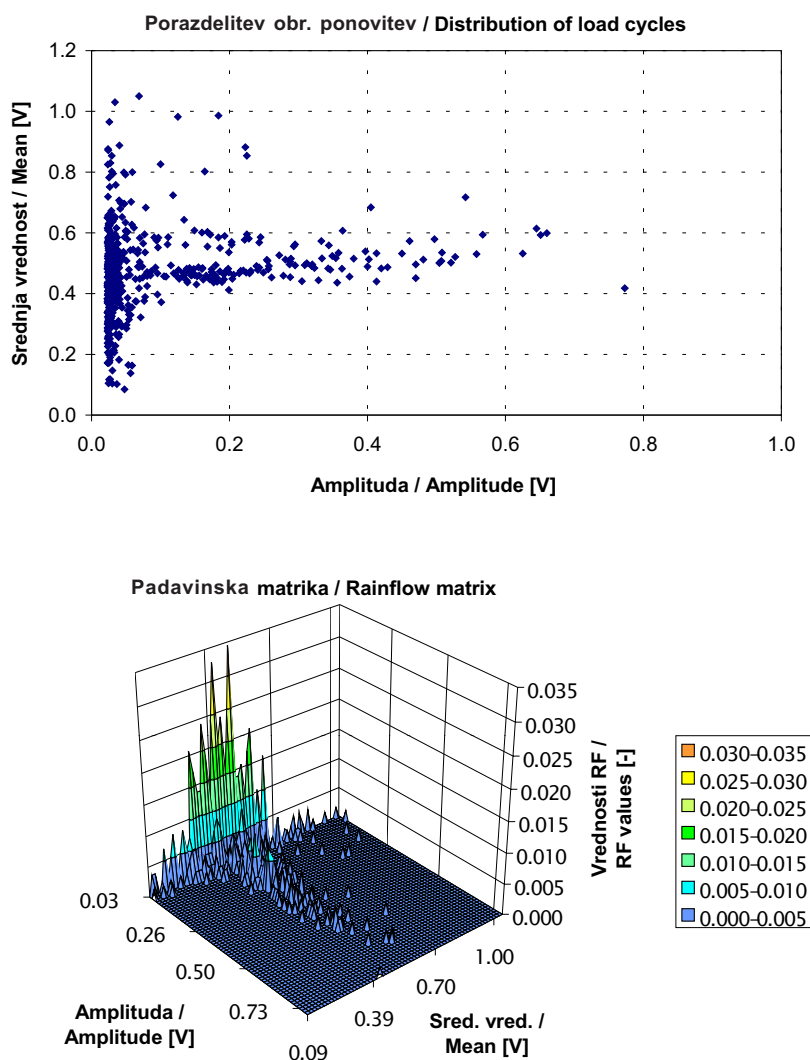
The criterion for the assessment of the efficiency of the unknown parameter estimation is the agreement of marginal probability density functions and the loading spectra (LS) that belong to numerically modelled and experimentally obtained multivariate PDFs, respectively.

## 2 PREPARATION OF THE DATA FOR MODELLING THE CONTINUOUS PDF OF THE LOAD CYCLES

Both variants of the maximum-likelihood method, used for the estimation of the unknown pa-

največje verjetnosti je bilo izbrano realno obremenitveno stanje viličarja z nosilnostjo 2500 kg. Izbrano obremenitveno stanje je predstavljeno z naborom šestih časovnih potekov obremenitev sile v nagibnem hidravličnem valju  $F_{vhn}$ . Vseh šest časovnih potekov obremenitev je bilo izmerjenih pri stalnih obratovalnih razmerah: vožnja naprej z največjo hitrostjo, masa bremena je enaka polovični nosilnosti viličarja. Dolžine posameznih časovnih potekov obremenitev so enake 10 s [9]. Obremenitvenih ponovitev z amplitudo, manjšo od ene dvaintridesetine amplitude največje obremenitvene ponovitve, nismo upoštevali. Porazdelitev obremenitvenih ponovitev, izločenih iz vseh šestih časovnih potekov obremenitev, in pripadajoča matrika relativnih frekvenc (RF), sta prikazani na sliki 1.

Parameters of the normal mixture, will be applied to the example of a real load state: a forklift truck with a load capacity of 2500 kg. The load state of the forklift truck is composed of a group of six real load histories of a normal force  $F_{vnh}$  in a hydraulic cylinder, which is used for the adjustment of the inclination of a lifting mechanism. The load histories under consideration were measured during the operation of the forklift under constant operating conditions: straight forward drive with a maximum speed and a load of one half of the maximum load capacity. The duration of each load history in a group is 10 s [9]. Load cycles with an amplitude lower than 1/32 of the maximum measured amplitude were filtered out. The distribution of load cycles, extracted from six filtered load histories, and the corresponding matrix of relative frequencies (RF), are presented in Fig. 1.



Sl. 1. Padavinske obremenitvene ponovitve in pripadajoča matrika relativnih frekvenc za silo v nagibnem hidravličnem valju  $F_{vhn}$ ; kaliber 1 V = 26.5 kN

Fig. 1. Distribution of rainflow load cycles and the corresponding rainflow matrix of the normal force  $F_{vnh}$ ; calibre: 1 V = 26.5 kN

### 3 MODELIRANJE ZVEZNE FUNKCIJE GPV OBREMITVENIH PONOVITEV

#### 3.1 Ocena parametrov mešanice Gaussovih funkcij z metodo največje verjetnosti na podlagi izločenih obremenitvenih ponovitev

Naj  $\{\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_N\}$  pomeni množico  $N$  obremenitvenih ponovitev  $\mathbf{S}_i = (S_{a,i}, S_{m,i})$ , izločenih iz časovnih potekov obremenitev, ki sestavljajo naključno obremenitveno stanje. Če metodo največje verjetnosti za oceno neznanih parametrov gostote porazdelitve verjetnosti dopolnimo z EM postopkom, tedaj neznanne parametre mešanice Gaussovih funkcij  $U_k$ ,  $\mu_k$  in  $\Sigma_k$  ocenimo na podlagi množice obremenitvenih ponovitev  $\{\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_N\}$  z naslednjim sistemom iteracijskih enačb ([1] do [5]):

$$U_i(t+1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho(\mathbf{S}_i, \boldsymbol{\mu}_i(t), \boldsymbol{\Sigma}_i(t), U_i(t)) \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\mu}_i(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^N \rho(\mathbf{S}_i, \boldsymbol{\mu}_i(t), \boldsymbol{\Sigma}_i(t), U_i(t)) \cdot \mathbf{S}_i}{\sum_{i=1}^N \rho(\mathbf{S}_i, \boldsymbol{\mu}_i(t), \boldsymbol{\Sigma}_i(t), U_i(t))} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_i(t+1) = \frac{\sum_{i=1}^N \rho(\mathbf{S}_i, \boldsymbol{\mu}_i(t), \boldsymbol{\Sigma}_i(t), U_i(t)) \cdot \|\mathbf{S}_i - \boldsymbol{\mu}_i(t+1)\|^2}{\sum_{i=1}^N \rho(\mathbf{S}_i, \boldsymbol{\mu}_i(t), \boldsymbol{\Sigma}_i(t), U_i(t))} \quad (6)$$

Pri tem velja:

$$\rho(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i, U_i) = \frac{U_i \cdot \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1})} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{S} - \boldsymbol{\mu}_i)^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \cdot (\mathbf{S} - \boldsymbol{\mu}_i)\right]}{\sum_{k=1}^K U_k \cdot \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1})} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{S} - \boldsymbol{\mu}_k)^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \cdot (\mathbf{S} - \boldsymbol{\mu}_k)\right]} \quad (7)$$

$$\mathbf{S}_i = (S_{a,i}, S_{m,i}) \quad (8)$$

$t$  je indeks iteracije. Število Gaussovih funkcij v mešanici  $K$  je treba izbrati vnaprej pred začetkom iteracijskega postopka. Z večanjem števila Gaussovih funkcij v mešanici v splošnem izboljšujemo ujemanje izmerjene in modelirane GPV. Nasprotno pa z zmanjševanjem števila Gaussovih funkcij v mešanici izboljšujemo ekstrapolacijske zmožnosti modelirane GPV. Zato je treba pri izbiri števila Gaussovih funkcij v mešanici narediti kompromis med dobrim ujemanjem izmerjene in modelirane GPV in dobrimi ekstrapolacijskimi zmožnostmi modelirane GPV. Začetne pogoje za iteracijo lahko izberemo poljubno ali tako, da že upoštevamo nekatere značilnosti porazdelitve obremenitvenih ponovitev.

Mešanica treh Gaussovih funkcij, ki ustreza porazdelitvi obremenitvenih ponovitev na sliki 1, je prikazana na sliki 2. Primerjava ustreznih obrobni izmerjenih in modeliranih porazdelitev verjetnosti je prikazana na sliki 3. Mešanica petih Gaussovih funkcij, ki ustreza isti porazdelitvi obremenitvenih ponovitev, je prikazana na sliki 4.

### 3 MODELLING OF THE CONTINUOUS PDF OF THE LOAD CYCLES

#### 3.1 Estimation of Parameters of the Normal Mixture with the Maximum-Likelihood method on the Basis of the Extracted Load Cycles

Let  $\{\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_N\}$  represent a set of  $N$  load cycles  $\mathbf{S}_i = (S_{a,i}, S_{m,i})$ , extracted from the load histories that make up the load state under consideration. If the maximum-likelihood method, supplemented with the EM algorithm, is applied for the estimation of the unknown parameters of the normal mixture and the set of load cycles  $\{\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_N\}$  is used as the basis for this estimation, then parameters  $U_k$ ,  $\mu_k$  and  $\Sigma_k$  can be estimated with the following system of iterative equations ([1] to [5]):

where  $t$  is the index of an iteration. The number  $K$  of the Gaussian functions in the normal mixture must be chosen before the start of the iterative process. Good adaptation is generally achieved by increasing the number of Gaussian functions in the normal mixture. In contrast, a good extrapolation ability is usually achieved by decreasing the number of Gaussian functions in the normal mixture. So when choosing the number of Gaussian functions in the normal mixture, a compromise between good adaptation of the normal mixture to the distribution of load cycles and a good extrapolation ability of the normal mixture must be made. Initial conditions for the iterative process can be chosen randomly or systematically, based on some preliminary knowledge about the distribution of load cycles.

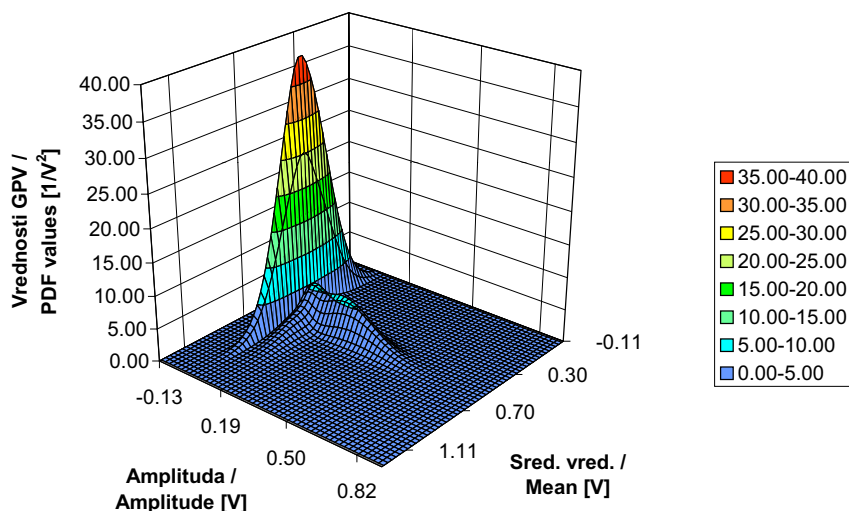
A normal mixture with three Gaussian functions, which correspond to the distribution of load cycles presented in Fig. 1, is presented in Fig. 2. A comparison of its marginal probability distributions and measured marginal probability distributions is presented in Fig. 3. A normal mixture with five Gaussian functions that correspond to the same distri-



Primerjava ustreznih modeliranih in izmerjenih obrobni porazdelitev verjetnosti je prikazana na sliki 5. V obeh primerih so bili neznani parametri mešanice Gaussovih funkcij ocenjeni na podlagi množice  $N=579$  obremenitvenih ponovitev. Začetni pogoji za iteracijski postopek so bili v obeh primerih izbrani tako, da smo začetne vektorje srednjih vrednosti Gaussovih funkcij postavili v območje večje gostote obremenitvenih ponovitev.

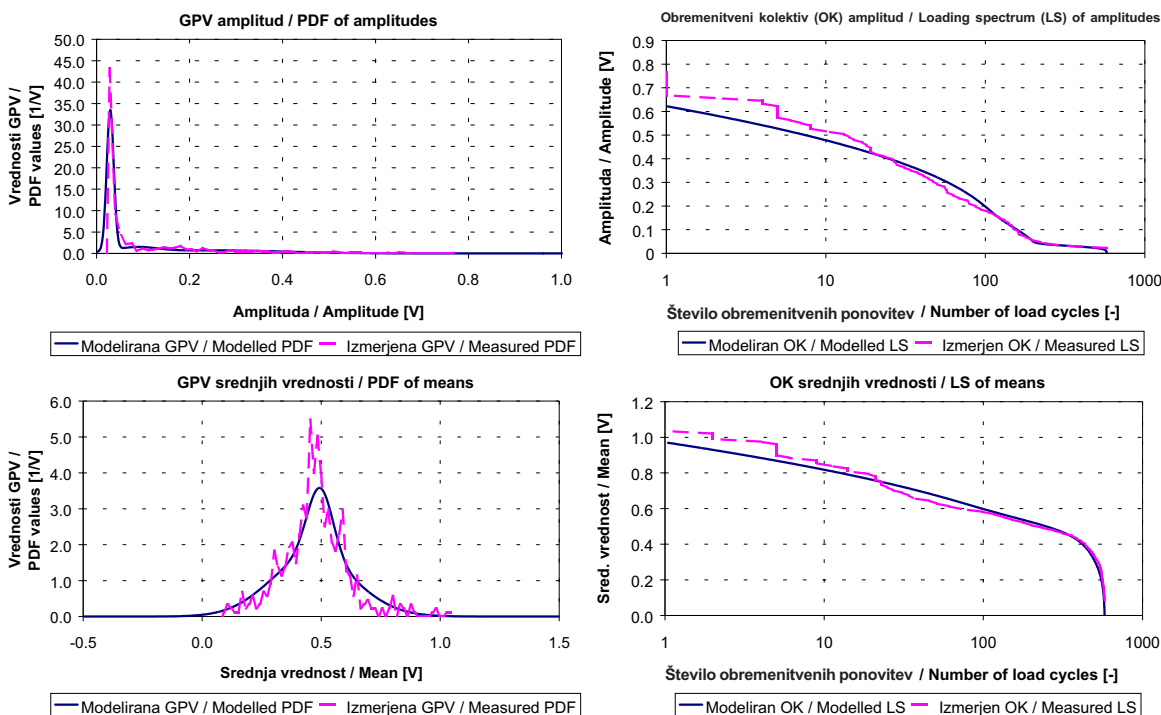
tribution of load cycles is presented in Fig. 4. A comparison of its marginal probability distributions and measured marginal probability distributions is presented in Fig. 5. The unknown parameters of the normal mixtures were, in both cases, estimated on the basis of  $N=579$  extracted load cycles. Initial conditions for the iterative process were, in both cases, determined systematically by setting up initial mean vectors of Gaussian functions in regions of higher densities of load cycles.

GPV obremenitvenih ponovitev / PDF of load cycles



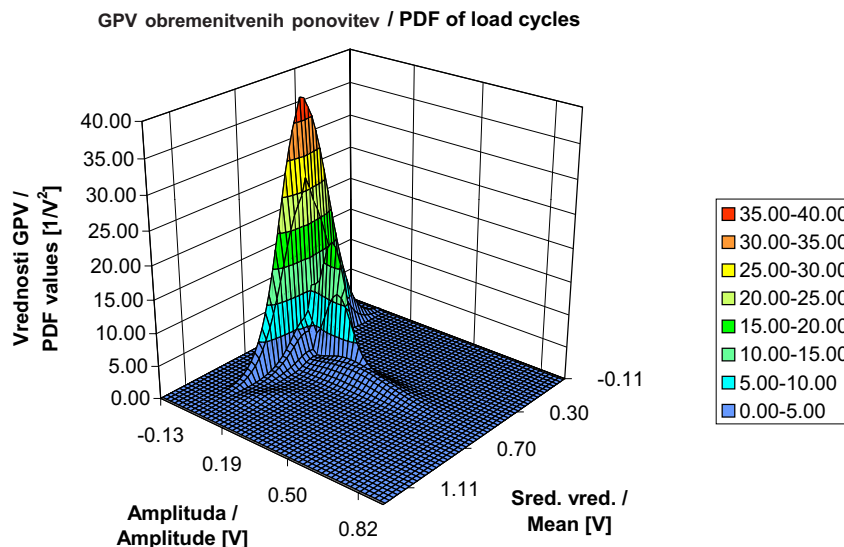
Sl. 2. Mešanica treh večdimenzionalnih Gaussovih funkcij; parametri mešanice, ocenjeni na podlagi izločenih obremenitvenih ponovitev; kaliber:  $1 V = 26,5 \text{ kN}$

Fig. 2. A normal mixture with three Gaussian functions; unknown parameters of the normal mixture are estimated on the basis of extracted load cycles; calibre:  $1 V = 26.5 \text{ kN}$



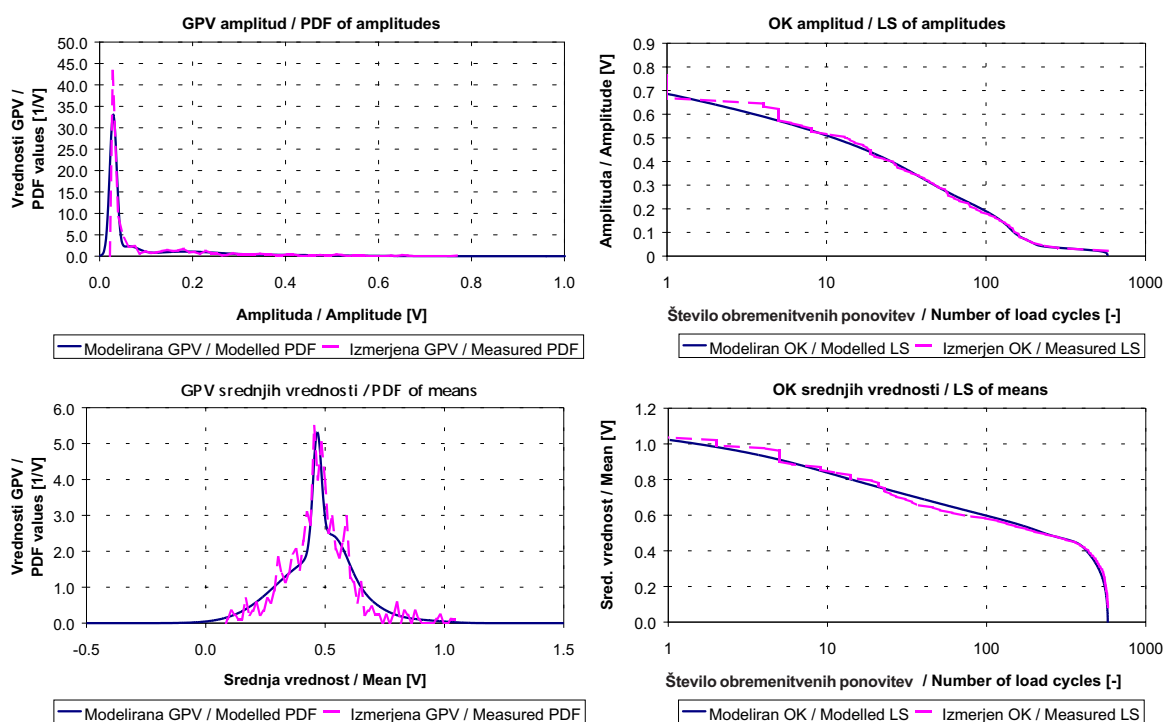
Sl. 3. Primerjava obrobni porazdelitev verjetnosti za mešanico treh Gaussovih funkcij; parametri mešanice, ocenjeni na podlagi izločenih obremenitvenih ponovitev; kaliber:  $1 V = 26,5 \text{ kN}$

Fig. 3. Comparison of marginal probability distributions for the mixture of three Gaussian functions; unknown parameters of the normal mixture are estimated on the basis of extracted load cycles; calibre:  $1 V = 26.5 \text{ kN}$



Sl. 4. Mešanica petih večdimenzionalnih Gaussovih funkcij; parametri mešanice, ocenjeni na podlagi izločenih obremenitvenih ponovitev; kaliber:  $1 V = 26,5 \text{ kN}$

Fig. 4. A normal mixture with five Gaussian functions; unknown parameters of the normal mixture are estimated on the basis of extracted load cycles; calibre:  $1 V = 26.5 \text{ kN}$



Sl. 5. Primerjava obrobni porazdelitev verjetnosti za mešanico petih Gaussovih funkcij; parametri mešanice, ocenjeni na podlagi izločenih obremenitvenih ponovitev; kaliber:  $1 V = 26,5 \text{ kN}$

Fig. 5. Comparison of marginal probability distributions for the mixture of five Gaussian functions; unknown parameters of the normal mixture are estimated on the basis of extracted load cycles; calibre:  $1 V = 26.5 \text{ kN}$

### 3.2 Ocena parametrov mešanice Gaussovih funkcij z metodo največje verjetnosti na podlagi matrike relativnih frekvenc obremenitvenih ponovitev

Porazdelitev obremenitvenih ponovitev  $S=(S_a, S_m)$ , izločenih iz časovnih potekov obremenitev, ki sestavljajo naključno obremenitveno stanje, je sedaj predstavljena z matriko relativnih frekvenc:

### 3.2 Estimation of the Parameters of the Normal Mixture with the Maximum-Likelihood method on the Basis of the Rainflow Matrix, Corresponding to the Extracted Load Cycles

The distribution of rainflow load cycles  $S=(S_a, S_m)$ , extracted from load histories, is now represented with a matrix of relative frequencies:

$$p_{ij} = p(S_{a,i}, S_{m,j}) \quad ; \quad i = 1, \dots, M_a; j = 1, \dots, M_m \quad (9),$$

$$S_{a,i} = S_{a,\min} + i \cdot \Delta S_a \quad (10),$$

$$S_{m,j} = S_{m,\min} + j \cdot \Delta S_m \quad (11),$$

kjer sta  $M_a$  - število razredov matrike relativnih frekvenc v smeri amplitud  $S_a$ ,  $M_m$  - število razredov matrike relativnih frekvenc v smeri srednjih vrednosti  $S_m$ . Sistem iteracijskih enačb za oceno neznanih parametrov mešanice Gaussovih funkcij  $U_k$ ,  $\mu_k$  in  $\Sigma_k$  dobimo z modifikacijo sistema iteracijskih enačb, ki je bil predstavljen v poglavju 3.1 – (glej tudi [1] do [5]):

with  $M_a$  being the number of classes of the rainflow matrix in the direction of load-cycle-amplitudes  $S_a$ , and  $M_m$  being the number of classes of the rainflow matrix in the direction of load-cycle-means  $S_m$ . The system of iterative equations for the estimation of normal mixture parameters  $U_k$ ,  $\mu_k$  and  $\Sigma_k$  can be obtained with a modification of the system of iterative equations that was presented in section 3.1 – see also [1] to [5]:

$$U_i(t+1) = \sum_{j=1}^{M_m} \sum_{i=1}^{M_a} p_{ij} \cdot \rho(\mathbf{S}_{ij}, \boldsymbol{\mu}_i(t), \boldsymbol{\Sigma}_i(t), U_i(t)) \quad (12),$$

$$\boldsymbol{\mu}_i(t+1) = \frac{\sum_{j=1}^{M_m} \sum_{i=1}^{M_a} p_{ij} \cdot \rho(\mathbf{S}_{ij}, \boldsymbol{\mu}_i(t), \boldsymbol{\Sigma}_i(t), U_i(t)) \cdot \mathbf{S}_{ij}}{\sum_{j=1}^{M_m} \sum_{i=1}^{M_a} p_{ij} \cdot \rho(\mathbf{S}_{ij}, \boldsymbol{\mu}_i(t), \boldsymbol{\Sigma}_i(t), U_i(t))} \quad (13),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_i(t+1) = \frac{\sum_{j=1}^{M_m} \sum_{i=1}^{M_a} p_{ij} \cdot \rho(\mathbf{S}_{ij}, \boldsymbol{\mu}_i(t), \boldsymbol{\Sigma}_i(t), U_i(t)) \cdot \|\mathbf{S}_{ij} - \boldsymbol{\mu}_i(t+1)\|^2}{\sum_{j=1}^{M_m} \sum_{i=1}^{M_a} p_{ij} \cdot \rho(\mathbf{S}_{ij}, \boldsymbol{\mu}_i(t), \boldsymbol{\Sigma}_i(t), U_i(t))} \quad (14).$$

Pri tem velja:

Here:

$$\rho(\mathbf{S}, \boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i, U_i) = \frac{U_i \cdot \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1})} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{S} - \boldsymbol{\mu}_i)^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \cdot (\mathbf{S} - \boldsymbol{\mu}_i)\right]}{\sum_{k=1}^K U_k \cdot \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma}_k^{-1})} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{S} - \boldsymbol{\mu}_k)^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1} \cdot (\mathbf{S} - \boldsymbol{\mu}_k)\right]} \quad (7),$$

$$\mathbf{S}_{ij} = (S_{a,\min} + i \cdot \Delta S_a, S_{m,\min} + j \cdot \Delta S_m) \quad ; \quad i = 1, \dots, M_a, j = 1, \dots, M_m \quad (15).$$

Izpeljava sistema iteracijskih enačb (12), (13) in (14) prav tako temelji na metodi največje verjetnosti, ki smo jo dopolnili z EM postopkom. Pri tem pomenita:  $t$  - indeks iteracije,  $K$  - število Gaussovih funkcij v mešanici. Tudi v tem primeru imamo pri izbiri števila Gaussovih funkcij v mešanici enak problem, kakor v primeru, ko so neznan parametri mešanice ocenjeni na podlagi porazdelitve obremenitvenih ponovitev, ker je število  $K$  Gaussovih funkcij v mešanici spet treba izbrati vnaprej. Zato je ponovno treba narediti kompromis med dobrim ujemanjem izmerjene in modelirane GPV in dobrimi ekstrapolacijskimi zmožnostmi modelirane GPV. Začetne pogoje za iteracijo lahko ponovno izberemo poljubno ali tako, da že upoštevamo nekatere značilnosti porazdelitve obremenitvenih ponovitev.

Mešanica treh Gaussovih funkcij, ki ustreza porazdelitvi obremenitvenih ponovitev na sliki 1, je prikazana na sliki 6. Primerjava ustreznih obrobni izmerjenih in modeliranih porazdelitev verjetnosti je prikazana na sliki 7. Mešanica petih Gaussovih funkcij, ki ustreza isti porazdelitvi obremenitvenih ponovitev, je prikazana na sliki 8. Primerjava ustreznih

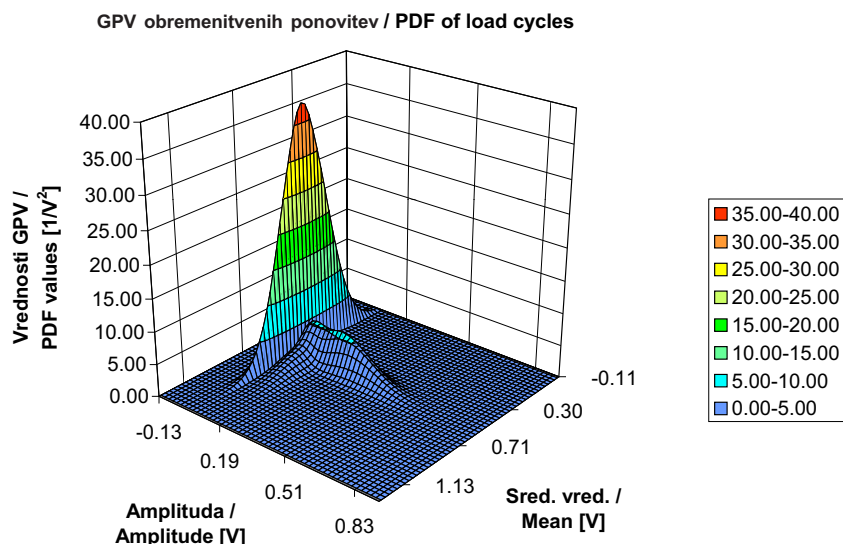
The derivation of the system of iterative equations (12), (13) and (14) is also based on the maximum-likelihood method, supplemented with an EM algorithm.  $t$  is an iteration index and  $K$  is the number of Gaussian functions in the normal mixture. The problem of choosing a suitable number of Gaussian functions is the same as it was in the case of the estimation of the normal mixture parameters, based on extracted load cycles, because the number  $K$  of the Gaussian functions in the normal mixture must again be chosen in advance. So a compromise between good adaptation of the normal mixture to the distribution of load cycles and a good extrapolation ability of the normal mixture must be made again. Initial conditions can be chosen randomly or systematically, based on some preliminary knowledge about the distribution of load cycles.

A normal mixture with three Gaussian functions, which correspond to the distribution of load cycles, presented in Fig. 1, is presented in Fig. 6. A comparison of its marginal probability distributions and measured marginal probability distributions is presented in Fig. 7. A normal mixture with five Gaussian functions that correspond to the same distribution of



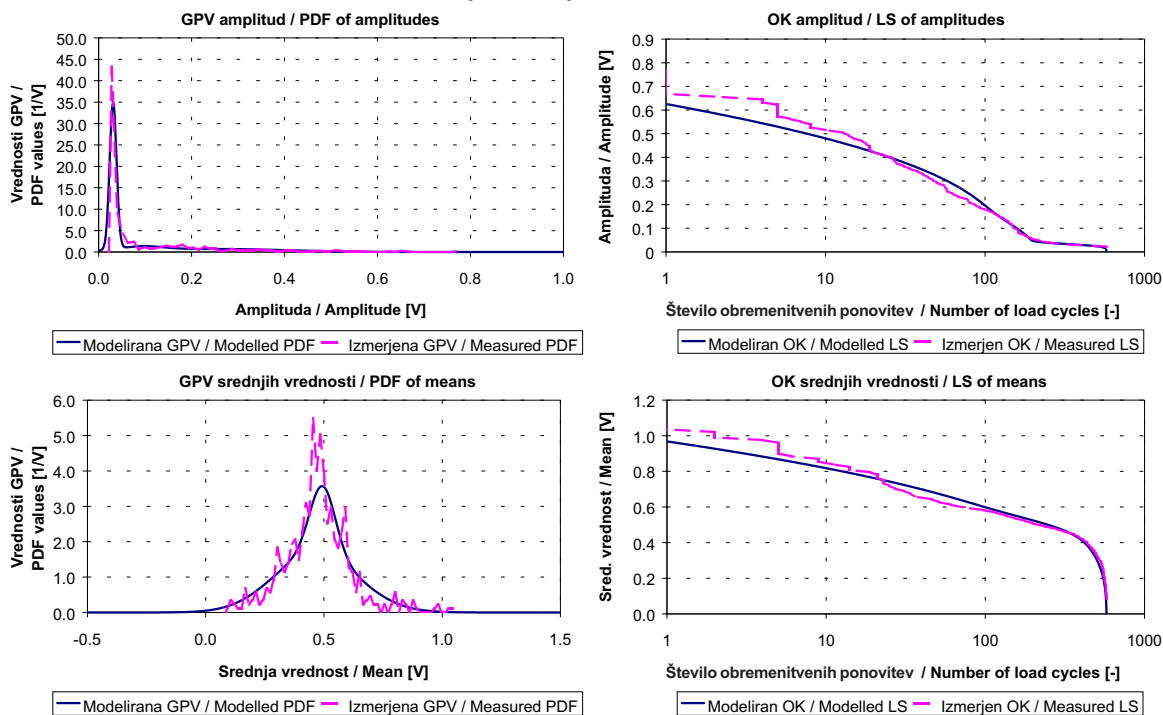
modeliranih in izmerjenih obrobni porazdelitev verjetnosti je na sliki 9. V obeh primerih so bili neznan parametri mešanice Gaussovih funkcij ocenjeni na podlagi matrike relativnih frekvenc, ki ima število razredov v smeri amplitud in srednjih vrednosti enako  $M_a=M_m=64$  in pripada obremenitvenemu stanju, opisanem v poglavju 2. Začetni pogoji za iteracijski postopek so bili v obeh primerih izbrani tako, da smo začetne vektorje srednjih vrednosti Gaussovih funkcij

load cycles is presented in Fig. 8. A comparison of its marginal probability distributions and measured marginal probability distributions is presented in Fig. 9. Unknown parameters of both normal mixtures were estimated on the basis of the rainflow matrix of relative frequencies, with an equal number of classes in the direction of load-cycle amplitudes and load-cycle means:  $M_a=M_m=64$ . Initial conditions for the iterative process were again determined systematically by set-



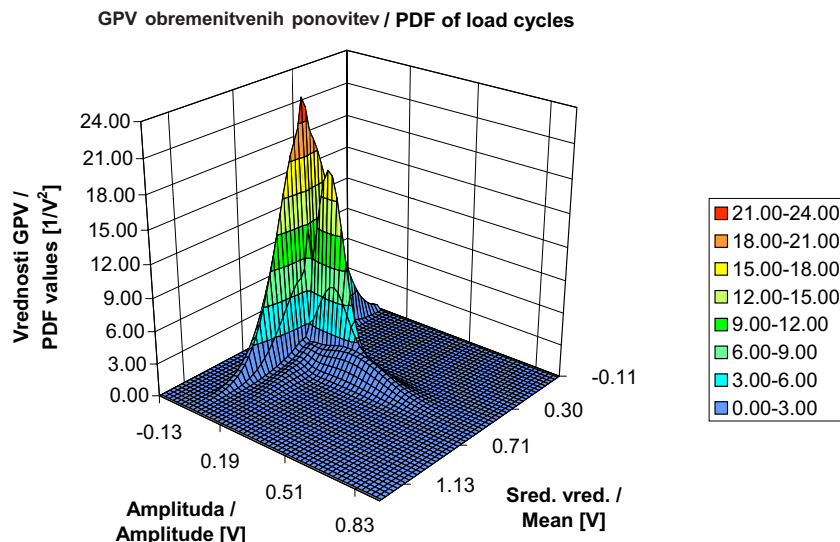
Sl. 6. Mešanica treh večdimenzionalnih Gaussovih funkcij; parametri mešanice, ocenjeni na podlagi matrike relativnih frekvenc; kaliber: 1 V = 26,5 kN

Fig. 6. A normal mixture with three Gaussian functions; unknown parameters of the normal mixture are estimated on the basis of the rainflow matrix; calibre: 1 V = 26.5 kN



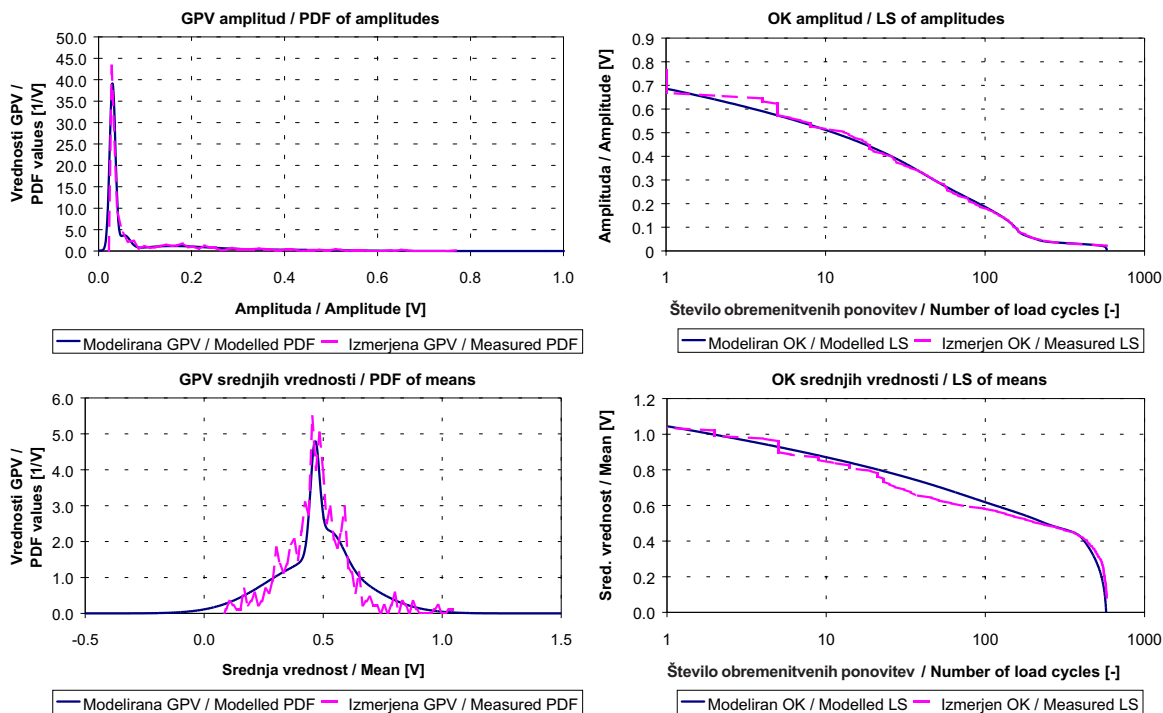
Sl. 7. Primerjava obrobni porazdelitev verjetnosti za mešanico treh Gaussovih funkcij; parametri mešanice, ocenjeni na matrike relativnih frekvenc; kaliber: 1 V = 26,5 kN

Fig. 7. Comparison of marginal probability distributions for the mixture of three Gaussian functions; unknown parameters of the normal mixture are estimated on the basis of the rainflow matrix; calibre: 1 V = 26.5 kN



Sl. 8. Mešanica petih večdimenzionalnih Gaussovih funkcij; parametri mešanice, ocenjeni na podlagi matrike relativnih frekvenc; kaliber:  $1 V = 26,5 kN$

Fig. 8. A normal mixture with five Gaussian functions; unknown parameters of the normal mixture are estimated on the basis of the rainflow matrix; calibre:  $1 V = 26.5 kN$



Sl. 9. Primerjava obrobni porazdelitev verjetnosti za mešanico petih Gaussovih funkcij; parametri mešanice, ocenjeni na matrike relativnih frekvenc; kaliber:  $1 V = 26,5 kN$

Fig. 9. Comparison of marginal probability distributions for the mixture of five Gaussian functions; unknown parameters of the normal mixture are estimated on the basis of the rainflow matrix; calibre:  $1 V = 26.5 kN$

postavili v območje večje gostote obremenitvenih ponovitev. Njihove komponente so enake kakor v primeru ocene neznanih parametrov na temelju izločenih obremenitvenih ponovitev.

ting up initial mean vectors of Gaussian functions in regions of higher densities of load cycles and are the same as in the case of the estimation of the normal mixture parameters on the basis of extracted load cycles.

#### 4 SKLEP

#### 4 CONCLUSION

Če primerjamo ujemanje izmerjenih in modeliranih GPV, vidimo, da je ujemanje bistveno

It can be seen from the comparison of the measured and the modelled marginal probability

boljše, če je GPV modelirana s petimi namesto s tremi Gaussovimi funkcijami. Ta sklep velja tako za primer ocene neznanih parametrov mešanice Gaussovih funkcij na podlagi porazdelitve obremenitvenih ponovitev kakor tudi za primer ocene neznanih parametrov mešanice Gaussovih funkcij na temelju matrike relativnih frekvenc obremenitvenih ponovitev. Tak rezultat je logičen, saj je mešanica Gaussovih funkcij, ki vsebuje več Gaussovih funkcij, bolj prilagodljiva, če so izmerjene porazdelitve obremenitvenih ponovitev močno razgibane. Izkazalo se je tudi, da ekstrapolacijske zmožnosti mešanice petih Gaussovih funkcij ne zaostajajo bistveno za ekstrapolacijskimi zmožnostmi treh Gaussovih funkcij. Zatorej lahko sklepamo, da je izbira mešanice petih Gaussovih funkcij v tem primeru bolj upravičena.

Iz rezultatov je tudi razvidno, da praktično ni razlike, če neznane parametre GPV ocenimo na podlagi izločenih obremenitvenih ponovitev ali na podlagi matrike relativnih frekvenc obremenitvenih ponovitev. To pomeni, da se je rešitev pri obeh postopkih približala k istemu lokalnemu vrhu funkcije verjetnosti, kar je tudi posledica enakih začetnih pogojev pri obeh postopkih. Kljub temu, da smo dobili enake rezultate, pa hitrost konvergence pri posameznih postopkih ni enaka. Hitrost konvergence pri izbrnem številu Gaussovih funkcij v mešanici je odvisna od števila izločenih obremenitvenih ponovitev, če neznane parametre GPV ocenjujemo na temelju izločenih obremenitvenih ponovitev, oziroma od števila od nič različnih elementov v matriki relativnih frekvenc, če neznane parametre GPV ocenjujemo na podlagi matrike relativnih frekvenc. Z večanjem števila izločenih obremenitvenih ponovitev ali števila od nič različnih elementov padavinske matrike se hitrost iteracijskega postopka zmanjšuje. Nasvet za izbiro ustreznega postopka bi bil takšen: če je red velikosti števila izločenih obremenitvenih ponovitev enak redu velikosti števila od nič različnih elementov v matriki relativnih frekvenc, tedaj neznane parametre GPV ocenimo na temelju izločenih obremenitvenih ponovitev, sicer pa neznane parametre GPV ocenimo na temelju matrike relativnih frekvenc.

Ujemanje izmerjenih in modeliranih GPV je zadovoljivo v vseh štirih prikazanih primerih, iz česar je mogoče sklepati, da je metoda največje verjetnosti, dopolnjena z EM algoritmom, primerna metoda za modeliranje zvezne GPV obremenitvenih ponovitev. Morebitna pomanjkljivost te metode je, da so rezultati iteracijskega postopka včasih odvisni od začetnih vrednosti parametrov GPV. Vendar lahko to pomanjkljivost odpravimo, če začetnih vrednosti za iteracijski postopek ne izbiramo na slepo, ampak upoštevamo nekatere značilnosti porazdelitve naključne spremenljivke.

densities that better agreement between the measured and the modelled PDFs can be obtained if the PDF of the load cycles is modelled with the normal mixture consisting of five instead of three Gaussian functions. This is true for the estimation of normal mixture parameters based on extracted load cycles as well as for the estimation of normal mixture parameters based on the rainflow matrix. Such a result is logical, because of the better adaptation ability of the normal mixture with five Gaussian functions when compared to the normal mixture with three Gaussian functions. At the same time it turned out that the extrapolation abilities of normal mixtures with five and three Gaussian functions are almost the same for our example of load state. So it can be concluded that the normal mixture with five Gaussian functions is a better choice in this case.

The results appertaining to normal mixtures consisting of the same number of Gaussian functions are similar, if the estimation of the normal mixture parameters was made on the basis of the extracted load cycles or on the basis of the rainflow matrix. This is a consequence of the fact that solutions of the system of the iterative equation have converged to the same local maximum of the likelihood function, regardless of the variant of the estimation of the normal mixture parameters. The reason for this can be found in the same initial conditions for the iterative process in both variants of the estimation of the normal mixture parameters. However, the speed of convergence for different variants of the estimation was not the same. If the number of Gaussian functions in the normal mixture is fixed to some specified value, then the speed of convergence depends only on the number of load cycles, when the estimation is done on the basis of extracted load cycles, or on the number of nonzero elements of the rainflow matrix when the estimation is done on the basis of the rainflow matrix. The greater the number of extracted load cycles or the number of nonzero elements of the rainflow matrix, the lower the speed of the iterative process. So when the number of extracted load cycles is of the same order of magnitude as the number of non-zero elements of the rainflow matrix, the estimation of the normal mixture parameters should be made on the basis of the extracted load cycles, otherwise it should be made on the basis of the rainflow matrix.

Nevertheless, good agreement between the measured and the modelled probability distribution can be seen in all the presented results. This means that the maximum-likelihood method, supplemented with the EM algorithm, is a good method for modelling the PDF of the load cycles. In spite of all that, one drawback of this method should be mentioned at the end. Namely, the result of the iterative process for the parameter estimation sometimes depends on the initial conditions of the iterative process. But this can be overcome if the initial conditions are chosen systematically, based on some preliminary knowledge of the distribution of the load cycles.

5 LITERATURA

5 REFERENCES

- [1] Kokol, M., I. Grabec (1994) Training of elliptical basis function NN, World Congress on Neural Networks, San Diego, California, Vol. II, editor: Erlbaum L., *INNS Press*, New Jersey, 379-384.
- [2] Duda, R. O., P.E. Hart (1973) Pattern classification and scene analysis, *John Willey and Sons*, New York.
- [3] Bishop, C. M. (1996) Neural networks for pattern recognition, *Clarendon Press*, Oxford.
- [4] Klemenc, J.(2000) Description of statistical dependencies of parameters of random load state (Dependency of random load parameters), *International Journal of Fatigue*, Vol. 22, No. 5, Elsevier Science Ltd, Oxford, 357-367.
- [5] Klemenc, J. (1999) Popis zveze med parametri naključnih obremenitvenih stanj konstrukcij, Magistrsko delo, *Fakulteta za strojništvo*, Ljubljana.
- [6] Amzallag, C., J.P. Gerey, J.L. Robert., J. Bauhaud (1994) Standardization of the rainflow counting method for fatigue analysis, *Fatigue*, Vol. 16, No. 6, Butterworth-Heinemann Ltd, 287-293.
- [7] Billy, M. (1989) Dependability of mechanical systems, *Elsevier*, New York, Amsterdam.
- [8] Fajdiga, M., T. Jurejevčič, J. Kernc (1996) Reliability prediction in early phases of product design, *Journal of Engineering Design*, Vol. 7, No. 2, 107-128.
- [9] Fajdiga, M., M. Nagode (1997) Analiza obremenitvenega stanja viličarja INDOS nosilnosti 2500 kg, Poročilo, *Fakulteta za strojništvo*, Ljubljana.

Naslov avtorjev: mag. Jernej Klemenc  
prof.dr. Matija Fajdiga  
Fakulteta za strojništvo  
Univerza v Ljubljani  
Aškerčeva 6  
1000 Ljubljana

Authors' Address: Mag. Jernej Klemenc  
Prof. Dr. Matija Fajdiga  
University of Ljubljana  
Faculty of Mechanical Eng.  
Aškerčeva 6  
SI-1000 Ljubljana, Slovenia

Prejeto: 12.7.2001  
Received:

Sprejeto: 7.12.2001  
Accepted: