

DK 53:512.3

Veličine, enote in enačbe

MARIJAN BREZINŠČAK

Članek obravnava osnovne pojme: fizikalno veličino, mersko enoto in mersko število. Vrsta konkretnih računskih primerov kaže prednosti veličinskih enačb, ki so univerzalne, to je neodvisne od izbire merskih enot, ki veljajo torej za katere koli merske enote. Razen tega so pregledne, pedagoško poučne in preproste za računanje. Članek dalje navaja primere številskih enačb, v katerih označujejo simboli merska števila, ne pa veličine. Ostale slabe strani številskih enačb so nepreglednost, pomanjkanje fizikalne nazornosti, pri računanju z njimi pa se kaj lahko greši. Konkretni primeri iz nauka o toploti in mehanike kažejo, kako je mogoče priti od številskih enačb na veličinske.

1. Veličine, merske enote in merska števila

Pri opisovanju kakega naravnega pojava ali preračunavanju kake tehnične naprave uporabljamo poseben način izražanja: enačbe. Težo G nekega telesa, ki ima maso m , izračunamo n. pr. tako, da maso m pomnožimo s pospeškom g zemljine teže, ki deluje na to maso, torej: $G = mg$. Črke G , m , g , pomenijo fizikalne veličine, kajti enačba $G = mg$ je le poenostavljena oblika razmerja, ki bi ga z besedami in matematičnimi znaki izrazili tako:

$$\text{teža} = \text{masa} \times \text{pospešek}.$$

Kaj so veličine? Na to vprašanje ni mogoče odgovoriti nedvoumno, ne da bi zašli na področje filozofije. Ker pa potrebujemo pojem »fizikalna veličina« (kratko: veličina) pri vsakodnevem praktičnem delu, se zadovoljujemo z odgovorom, da imenujemo »veličino« tiste lastnosti fizikalnih objektov, pojavov in stanj, ki se dajo meriti. Veličine so n. pr. čas (t), dolžina (l), površina (A), masa (m), sila (F), hitrost (v), energija (W), temperatura (T), tlak (p). Črke v oklepajih so mednarodne in tudi v Jugoslaviji standardizirane označbe za navedene veličine. Veličine torej niso same konkretne stvari, pojavi ali stanja, temveč lastnosti, posebnosti ali pridevki naše predstave o svetu okrog nas.

Merske enote (kratko: enote) so dogovorjeni iznosi veličin. Tako je n. pr. enota »kilogram« z mednarodnim sporazumom določen iznos fizikalne veličine »masa«. Materialni vzorec te merske enote hrani laboratorij Mednarodnega urada za mere in uteži v Parizu v betonski celici [1].

Označba veličine še ne pove, kolikšna je ta veličina. Če rečemo »dolžina l «, ne mislimo vedno na določeno velikost dolžine. Vzemimo pa, da pomeni l_h dolžino hiše (indeks h !). Velikost te dolžine je povsem določena šele tedaj, če napišemo $l_h = 10$ metrov. V praksi navadno ne delamo razlike med pojmom »veličina« in »velikost veličine«, temveč

označujemo n. pr. z l tako »veličino« kakor »velikost veličine«.

Mersko število je razmerje med veličino in enoto. To pomeni, da je mersko število tisto število, s katerim je treba pomnožiti enoto, da izrazimo veličino. N. pr. v enačbi $l = 10$ m pomeni črka l veličino, 10 je mersko število, m pa je kratica za enoto dolžine — meter. Govorimo, da je:

$$\text{veličina} = \text{mersko število} \times \text{merska enota} \quad (1.1)$$

Dolžino že omenjene hiše lahko izrazimo tudi z drugimi enotami, n. pr. centimetri. V tem primeru pišemo $l = 1000$ centimetrov = 1000 cm. Ker je meter = 100 cm, je $l = 10$ m = $l = 1000$ cm. Ta primer kaže, da je pri stokrat manjši enoti mersko število stokrat večje. Z drugimi besedami: veličina je od izbire merske enote neodvisna, je invariantna glede izbire merskih enot.

V rabi je, da se v tiskanih delih označujejo veličine s kurzivnimi črkami, v Nemčiji to celo priporočajo standardi [3]. Kurzivna črka p n. pr. označuje tlak, U električno napetost, Q toploto itd. Kratice za enoto pa se tiskajo s pokončnimi črkami, n. pr. N označuje enoto sile newton, m meter, s sekundo. Tudi splošne simbole merskih števil tiskajo s pokončnimi črkami. N. pr. v je mersko število veličine hitrost v , c je mersko število veličine specifična toplota c . Včasih se označujejo merska števila tudi tako, da se simbol za veličino postavi med zavita oklepaja n. pr. $\{v\}$, $\{c\}$.

Najprikladnejši je verjetno tretji način. Ker je po enačbi (1.1):

$$\text{mersko število} = \text{veličina} : \text{enota} \quad (1.2)$$

se lahko piše tudi $v/(m/s)$ namesto v ali $\{v\}$, pri čemer pomeni m/s mersko enoto za hitrost »meter na sekundo«. Pri tem zaznamujemo z v ali $\{v\}$ mersko število hitrosti v , izražene v m/s . Torej lahko

vse tri načine pisanja izenačimo: $v = \{v\} = v / (\text{m/s})$.

V nekih posebnih primerih potrebujemo pojem splošna enota. To je enota, ki še ni definirana. N. pr. meter (m) je specialna enota, [l] pa označba splošne enote. Govorimo, da pomeni označba [l] enoto dolžine. Ta je lahko meter, lahko pa tudi centimeter ali yard. Vendar [l]_M, kjer opozarja indeks M na mednarodni sistem enot (imenovan tudi merski sistem MKSA ali Giorgijev sistem) [1], ni več splošna enota, ker vemo, da je enota za dolžino v mednarodnem merskem sistemu [l]_M = meter. Naj mimogrede omenim, da simbol veličine v oglatem oklepaju, n. pr. [l], ne predstavlja tako imenovane dimenzije. Pojma dimenzija pri računanju sploh ne potrebujemo.

2. Veličinske enačbe

Veličinske enačbe so enačbe, v katerih predstavljajo splošne označbe veličine, pri čemer je vsaka veličina zmnožek merskega števila in uporabljene merske enote. Ker pa so veličine neodvisne od izbire merskih enot, torej glede nanje invariantne, so od merskih enot neodvisne tudi veličinske enačbe. Pravimo, da so veličinske enačbe univerzalne, ker veljajo za katere koli enote. Veličinska je n. pr. enačba za površino pravokotnika $A = ab$, ki pravi, da dobimo ploščino pravokotnika, če zmnožimo dolžini a in b stranic pravokotnika.

Zamislimo si, da sta hotela izračunati površino A nekega takega pravokotnika z merjenjem stranic en Evropejec in en Anglež. Prvi je s svojim merilom izmeril eno stranico in ugotovil da meri $a = 2$ m, drugi pa s svojim merilom drugo stranico in zapisal da meri $b = 1$ foot. Potem pa sta se oba spravila izračunati površino, in sicer tako:

$$A = a \cdot b = 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ foot}, \quad (2.1)$$

to je, namesto simbola za veličino a sta napisala 2 m, namesto simbola za veličino b pa 1 foot.

V resnici pomeni 2 m dvakrat po en meter, torej $2 \cdot 1 \text{ m} = 2 \times \text{m} = 2 \cdot \text{m}$, to pa se ujema z vsebino enačbe (1.1). Analogno temu je $1 \text{ foot} = 1 \times 1 \text{ foot} = 1 \cdot \text{foot}$. Torej lahko pišemo enačbo (2.1) tudi:

$$A = 2 \cdot \text{m} \cdot 1 \cdot \text{foot} = 2 \cdot \text{m foot} = 2 \text{ m foot}, \quad (2.2)$$

pri čemer smo namesto $2 \cdot 1$ pisali 2, ker je $2 \cdot 1 = 2$. V skrajnem desnem delu enačbe (2.2) smo izpustili piko kot znak množenja, ker smo tiho sprejeli dogovor, da pomenijo kratice, razvrščene ena ob drugi, njihov zmnožek.

Skrajne desne strani izraza (2.2) ni nobeden od merilcev priznal kot končni rezultat, ker meri Evropejec površino s kvadratnimi metri (m^2), Anglež pa s kvadratnimi čevlji (square foot = sq. ft.). Ta čas uporablja 2 400 milijonov prebivalcev Zemlje metrski merski sistem, anglo-ameriškega pa samo 500 milijonov. Zato je Anglež pristal, da se rezultat izrazi v kvadratnih metrih. Da bi

mogla površino A iz enačbe (2.2) izraziti metrsko, sta morala merilca pogledati v neki priročnik, da sta videla, v kakšnem razmerju sta enoti dolžine meter in foot. Našla sta, da je:

$$1 \text{ foot} = 0,3048 \text{ metra} \quad (2.3)$$

Zato sta izraz (2.2) pisala dalje:

$$A = 2 \cdot \text{m} \cdot \text{foot} = 2 \cdot \text{m} \cdot 0,3048 \text{ m}, \quad (2.4)$$

to je namesto enote foot sta zapisala 0,3048 m, ker tako predpisuje »enačba med enotama« (2.3).

Kakor smo računali od enačbe (2.2) dalje, zmnožimo v enačbi (2.4) številke pa tudi enote. Dobimo:

$$A = 2 \cdot 0,3048 \cdot \text{m} \cdot \text{m} = 0,6096 \text{ m}^2,$$

ker je $2 \cdot 0,3048 = 0,6096$, ter $\text{m} \cdot \text{m} = \text{m}^2$.

Evropejec pa ni verjel sicer natančnemu Angležu. Na skrivaj je pozneje s svojim merilom izmeril stranico b pravokotnika. Nameril je $b = 0,3048 \text{ m}$. Ker je dolžino $a = 2 \text{ m}$ izmeril že prej, je sedaj računal po veličinski enačbi:

$$A = a \cdot b = 2 \text{ m} \cdot 0,3048 \text{ m} = 0,6096 \text{ m}^2.$$

Dobil je torej isti rezultat kakor prej oba skupaj.

Ta karikirani primer nam je pokazal, kako se računa z veličinskimi enačbami: enostavno in naravno, zanesljivo in pregledno, z možnostjo kontrole na vsaki stopnji računanja. Pozneje bomo videli, da so razen takih še drugačne enačbe, ki jih ne krasi te odlike.

Izračunajmo še nekoliko primerov z veličinskimi enačbami! Izračunajmo hitrost v gibanja nekega telesa, ki je v pol ure opravilo pot 2000 metrov. Torej je (h pomeni uro):

$$l = 2000 \text{ m}, \quad t = 0,5 \text{ h}.$$

Hitrost enakomernega gibanja je definirana z izrazom:

$$v = l/t, \quad (2.5)$$

ki je veličinska enačba, torej uporabna za katere koli enote. Če vstavimo v (2.5) $l = 2000 \text{ m}$ in $t = 0,5 \text{ h}$, dobimo:

$$v = \frac{l}{t} = \frac{2000 \text{ m}}{0,5 \text{ h}} = 4000 \frac{\text{m}}{\text{h}}. \quad (2.6)$$

Za vsakodnevno rabo je bolj znana enota za hitrost kilometer na uro (km/h). Ker pa je kilometer = $\text{km} = 1000 \text{ m}$, je meter = $\text{m} = 0,001 \text{ km}$, kar vstavimo v desno stran enačbe (2.6) in dobimo:

$$v = 4000 \text{ m/h} = 4000 \cdot 0,001 \text{ km/h} = 4 \text{ km/h}.$$

Namesto enote m/h iz (2.6) bi mogli uporabiti mednarodni sistem enot [1] in rezultat izraziti z enoto »meter na sekundo« = m/s . Z desne strani enačbe (2.6) pridemo do tako izraženega rezultata,

če namesto kratice za uro (h) napišemo ustrezno vrednost v sekundah, to je $h = 3600 \text{ s}$:

$$v = 4000 \frac{\text{m}}{\text{h}} = 4000 \frac{\text{m}}{3600 \text{ s}} = 1,111 \text{ m/s.}$$

Seveda so vsi trije rezultati pravilni in med seboj enaki:

$$v = 4000 \text{ m/h} = 4 \text{ km/h} = 1,111 \text{ m/s.}$$

Kako enostavno in zanesljivo je računanje z univerzalnimi veličinskimi enačbami, dobro pokaže primer veličinske enačbe

$$P = F v, \quad (2.7)$$

kjer je veliki P moč, F sila, v hitrost. Vzemimo, da gre za železniško lokomotivo, ki s silo $F = 10000 \text{ kp}$ vleče kompozicijo s hitrostjo $v = 40 \text{ km/h}$. Želimo zvedeti, kolikšno moč P mora pri tem razvijati lokomotiva? Računajmo analogno kakor prej:

$$P = F v = 10000 \text{ kp} \cdot 40 \text{ km/h} = 400000 \text{ kp km/h.} \quad (2.8)$$

S produktom enot kp km/h na desni strani si ničesar ne predstavljamo, ker na tako enoto za moč nismo navajeni. Zato jo bomo »pretvorili« v enoto za moč kilowatt (kW). Vemo, da je:

$$\text{kW} = 1000 \text{ W} = 1000 \text{ J/s} = 1000 \text{ Nm/s.} \quad (2.9)$$

Enoti za silo kp in N sta v razmerju [1]:

$$\text{kp} = 9,80665 \text{ N.}$$

S tem razmerjem lahko izrazimo enoto kp km/h na koncu enačbe (2.8) tako:

$$\frac{\text{kp} \cdot \text{km}}{\text{h}} = \frac{9,80665 \text{ N} \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 2,73 \text{ W,}$$

ker je $\text{Nm/s} = \text{W}$. Če uvrstimo v (2.8) $\text{kp km/h} = 2,73 \text{ W}$, dobimo:

$$P = 400000 \cdot 2,73 \text{ W} = 1\,091\,000 \text{ W} = 1\,091 \text{ kW,}$$

ker je $\text{kW} = 1000 \text{ W}$.

Na teh primerih smo lahko spoznali vrsto dobrih strani računanja po veličinskih enačbah: z enotami se računa kakor s števili, to je lahko se množijo ali delijo, lahko pa bi pokazali, da veljajo zanje tudi pravila potenciranja, korenjenja, diferenciranja itd. [1]. Zato je računanje z veličinskimi enačbami nazorno, zanesljivo in pregledno. Ker veljajo za katere koli enote, lahko rezultate navedemo — kakor smo pokazali zgoraj — v tistih enotah, ki jih želimo. Vrsta primerov za uporabo veličinskih enačb je objavljena v delih [1], [2].

3. Prilagojene veličinske enačbe

Pri zaporednem ponavljanju istovrstnih računov je včasih dobro, uporabljati tako imenovane »prilagojene veličinske enačbe«. V teh enačbah predstavljajo simboli veličine (torej zmnožek merskega števila in enote), toda ti simboli so obenem

že deljeni z določenimi enotami. Poglejmo nekoliko primerov!

V prejšnjem poglavju smo imeli univerzalno veličinsko enačbo za površino pravokotnika:

$$A = a b. \quad (3.1)$$

Po drugi strani pa vemo, da je

$$\text{m}^2 = \text{m} \cdot \text{m}. \quad (3.2)$$

Enačbi (3.1) in (3.2) lahko med seboj delimo tako:

$$\frac{A}{\text{m}^2} = \frac{a b}{\text{m m}}, \quad (3.3)$$

kjer seveda pomenijo *kurzivne* črke A , a , b , veličine. Izraz (3.3) je »prilagojena veličinska enačba«, ki jo je včasih bolje pisati v obliki

$$A = \frac{a b}{\text{m m}} \text{ m}^2, \quad (3.4)$$

to je m^2 smo prenesli iz imenovalca leve strani (3.3) v števec desne strani enačbe (3.4), tako kakor bi to napravili s kakim številom.

Vzemimo, da smo izmerili stranici a in b vrste pravokotnikov in pri tem dobili naslednje rezultate:

$$\text{za } a: \quad 1 \text{ m} \quad 2 \text{ m} \quad 4 \text{ m}$$

$$\text{za } b: \quad 0,5 \text{ m} \quad 1 \text{ m} \quad 1 \text{ m}$$

Računanje po enačbi (3.4) daje zaporedoma tele površine:

$$A = \frac{1 \text{ m} \cdot 0,5 \text{ m}}{\text{m m}} \text{ m}^2 = 0,5 \text{ m}^2,$$

$$A = \frac{2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}}{\text{m m}} \text{ m}^2 = 2 \text{ m}^2,$$

$$A = \frac{4 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}}{\text{m m}} \text{ m}^2 = 4 \text{ m}^2.$$

Strokovnjak za lokomotive bo morda uporabljal prilagojeno veličinsko enačbo

$$\frac{P}{\text{KS}} = 0,0037 \frac{F}{\text{kp}} \frac{v}{\text{km/h}}, \quad (3.5)$$

ki jo po že opisanem načinu lahko izvedemo iz univerzalne veličinske enačbe (2.6) (glej poglavje 4).

Za hitrost krožnega gibanja se včasih uporablja prilagojena veličinska enačba

$$\frac{v}{\text{m/s}} = \frac{\pi D}{60 \text{ m}} \frac{n}{1/\text{min}}, \quad (3.6)$$

kjer pomeni D premer krožnice rotacije, n pa vrtilno hitrost. Uporabljamo enačbo (3.6), v kateri pomenijo *kurzivni* simboli v , D in n veličine, za primer, da je $D = 1,2 \text{ m}$ in $n = 60/\text{min}$; tu je $\text{min} = 60 \text{ sekund}$. Račun daje:

$$\frac{v}{\text{m/s}} = \frac{\pi}{60} \frac{1,2 \text{ m}}{\text{m}} \frac{60/\text{min}}{1/\text{min}} = \frac{\pi \cdot 1,2 \cdot 60}{60} = 3,76$$

Iz tega rezultata za v : $(\text{m/s}) = 3,76$ dobimo takoj iznos hitrosti $v = 3,76 \text{ m/s}$.

Veličinska enačba za to gibanje je enostavno [1]:

$$v = \pi D n \quad (3.7)$$

in je seveda neodvisna od enot, ki jih bomo uporabili za D in n . Preračunajmo isti primer z $D = 1,2 \text{ m}$, $n = 60/\text{min}$ z veličinsko enačbo (3.7):

$$v = \pi \cdot 1,2 \text{ m} \cdot (60/\text{min}) = 226 \text{ m/min} \quad (3.8)$$

Hitrost je tedaj 226 metrov na minuto. Ker je minuta = 60 s (sekund) in to uvrstimo, dobimo po (3.8):

$$v = 226 \frac{\text{m}}{\text{min}} = 226 \frac{\text{m}}{60 \text{ s}} = 3,76 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Lahko pa bi že predtem vrtilno hitrost n izrazili v enoti $1/\text{s}$, torej $n = 60/\text{min} = 1/\text{s}$, pa bi šel račun po enačbi (3.7) hitreje:

$$v = \pi \cdot 1,2 \text{ m} \cdot 1/\text{s} = 3,76 \text{ m/s}.$$

Vidimo, da gre v obeh primerih veličinskega računanja po povsem varni poti, ker imamo poleg števil stalno prisotne tudi enote. V rezultatu se seveda pojavijo tiste enote, ki smo jih vnesli v veličinsko enačbo. Če nam tako izražen rezultat iz katerega koli razloga ni všeč (n. pr. 226 m/min), uporabimo enačbo med enotami (n. pr. minuta = 60 sekund) in dobimo željeno obliko (n. pr. 3,76 m/s).

Na tem mestu lahko nekaj pripomnimo k enoti $1/\text{min} = \text{min}^{-1}$ za veličino »vrtilna hitrost« n . Ko telo v krožnem gibanju zaključi en krog, opravi pot $l = \pi D$, torej obseg kroga. To pot je telo opravilo v času t . Hitrost telesa je tedaj:

$$v = l/t = \pi D/t \quad (3.9)$$

Recipročno veličino od t , torej $n = 1/t$, imenujemo »vrtilno hitrost«. Veličinska enačba (3.9) preide tedaj v obliko $v = \pi D n$, kar smo že imeli v (3.7).

Veličino t merimo z enotami za čas (sekunda, minuta, ura itd.), zato bomo seveda veličino $n = 1/t$ merili z recipročno enoto časa, torej z $\text{s}^{-1} = 1/\text{s}$, $\text{min}^{-1} = 1/\text{min}$ itd. Nekateri uporabljajo enoto »vrtilaj na minuto«, ker mislijo na definicijo veličine n : »število vrtilajev v enoti časa« in pišejo vrt/min. Po zgornjem izvajanju (izraz 3.9) je $1/\text{min} = \text{vrt}/\text{min}$; kratica »vrt« tu samo nadomešča številko 1. Zato se »vrtilaj« imenuje tudi opisna enota, ker z besedo opisuje številko. Podobno je tudi z enoto »odstotek« = %. Znak % je samo kratica za $1/100$, torej $\% = 1/100 = 0,01$.

Mnenja o koristnosti prilagojenih veličinskih enačb so različna. Nekateri mislijo, da so za rutinsko računanje zelo koristne. Avtor se ne strinja povsem s tem naziranjem, ker je prišel po izkušnjah do prepričanja, da je normalni račun z veličinskimi enačbami (poglavje 2) absolutno zanesljiv, medtem

ko terja računanje s prilagojenimi enačbami določeno previdnost in včasih povzroča nemir, ker se človek ne more povsem zanesti, ali ni morda kje kaka tiskarska napaka (n. pr. v enačbi 3.5). Pri veličinskih enačbah te nevarnosti skorajda ni, kajti vsak tehnik ve, da je univerzalni izraz za kinetično energijo $W = 0,5 m v^2$, za hitrost pri prostem padu $h = 0,5 g t^2$ itd.

4. Številске enačbe

Številске enačbe so enačbe, v katerih predstavljajo simboli merska števila (enačba 1.2).

Številске enačbe so vedno omejene, veljajo namreč samo za natančno dogovorjene enote. N. pr. številska enačba

$$l = 0,278 v t, \quad (4.1)$$

kjer označujejo pokončne črke l , v in t merska števila veličin l , v in t , velja samo v primeru, če vstavimo namesto simbola l število metrov, namesto simbola v število km/h, namesto t pa število sekund. Vzemimo primer, da je $v = 3,6 \text{ km/h}$; $t = 2 \text{ s}$. Tu so ustrezna merska števila $v = \{v\} = v: (\text{km/h}) = 3,6$; $t = \{t\} = t/\text{s} = 2$. Številska enačba (4.1) daje mersko število dolžine

$$l = 0,278 \cdot 3,6 \cdot 2 = 2.$$

Izraz $l = 2$ nič ne pomeni, dokler se ne spomnimo, da izraža številski izraz (4.1) število metrov, če namesto v vstavimo število km/h, namesto t pa število sekund!

Prilagojeno veličinsko enačbo (3.5) lahko napišemo v številski obliki, in sicer tako:

$$P = 0,0037 F v, \quad (4.2)$$

kjer pomenijo pokončne črke P , F , v zaporedoma: število konjskih moči, število kilopondov in število kilometrov na uro. Avtorji knjig in člankov pogosto pozabljajo napisati, da velja enačba (4.2) samo za merska števila v KS, kp in km/h, pa delajo zato začetniki napake, če uporabljajo druge merske enote. To pomeni, da so številске enačbe nezanesljive in razen tega nepregledne, ker ni nikake fizikalne utemeljitve za obstoj parazitnega koeficienta 0,0037 v enačbi (4.2). Ta je prišel v to številsko enačbo samo zaradi razmerja med izbranimi merskimi enotami.

Naravna je samo veličinska enačba (2.7) $P = F v$, ki jo lahko pregledno in mimogrede izvedemo iz samih definicij za posamezne veličine. Moč P je odvod dela W po času t , torej $P = dW/dt$. Diferencial dela je $dW = F dl$, zato je dalje $P = F dl/dt = F v$, ker je hitrost definirana z $v = dl/dt$.

Nekateri avtorji dopolnjujejo številске enačbe s posebnim dodatkom, ki navaja, na katere merske enote se nanašajo posamezni simboli merskih števil.

Tako bi se n. pr. številska enačba (4.2) v tem smislu dopolnila z:

$$P = 0,0037 F v; \quad [KS, kp, km/h].$$

S tem je povedano isto, kar smo v stavku povedali za številsko enačbo (4.2). Podobno dobimo številsko enačbo krožnega gibanja iz (3.6) tako, da izpustimo merske enote, simbole za veličine v , D , n pa zamenjamo z ustreznimi simboli merskih števil v , D , n :

$$v = \pi D n / 60 \quad [m/s, m, 1/min],$$

Angleži bi morali svojo številsko enačbo napisati v obliki:

$$v = 0,01745 D n \quad [yd/s, ft, 1/min],$$

kjer je $yd = yard = 0,9144 m$; $ft = foot = 0,3048 m$.

Zaradi naštetih in še drugih slabih strani se številske enačbe zdaj vse manj uporabljajo, pa še tam, kjer se, se v glavnem zaradi nepoučenosti. N. pr. v termodinamiki pogosto zadevamo na številsko enačbo za idealni tok par:

$$v = 91,5 \sqrt{\Delta i}, \quad (4.3)$$

kjer je v mersko število hitrosti, izražene s številom m/s , Δi pa mersko število entalpijskega padca, izraženega s številom $kcal/kg$. N. pr. če je $\Delta i = 100 kcal/kg$, je mersko število $\Delta i = \Delta i / (kcal/kg) = 100$. Potem daje številska enačba (4.3):

$$v = 91,5 \sqrt{100} = 915.$$

Ker je mersko število veličine hitrost v v m/s , je torej $v = v (m/s) = 10$, t. j. $v = v \cdot m/s = 10 \cdot m/s = 10 m/s$. Univerzalna veličinska enačba za idealni tok, ki velja za katere koli enote, pa se glasi:

$$v = \sqrt{2 \Delta i}, \quad (4.4)$$

izvesti pa se dá neposredno iz zakona o ohranitvi energije:

$$m \Delta i = \frac{1}{2} m v^2$$

če predpostavimo idealno pretvarjanje toplotne energije v kinetično. V tej enačbi predstavlja črka m opazovano maso pare ali konstantni tok pare.

Tudi v anglo-ameriški literaturi dobimo številske enačbe tipa (4.3), ki so uporabne samo za anglo-ameriške merske enote. Naša enačba se n. pr. glasi:

$$v = 223,85 \sqrt{\Delta i}. \quad (4.5)$$

Tu označuje simbol merskega števila v število enot za hitrost ft/s (foot per second), Δi število enot specifične entalpije BTU/lb ($BTU = 1055,8$ joule; $lb = pound = 0,45359 kg$). Torej lahko izrazimo merski števili v in Δi z razmerjem veličin in uporabljenih enot

$$v = \frac{v}{ft/s}, \quad \Delta i = \frac{\Delta i}{BTU/lb}, \quad (4.6)$$

Z uvrstitvijo teh razmerij v številsko enačbo (4.5) dobimo prilagojeno veličinsko enačbo

$$v = 223,85 \sqrt{\Delta i / (BTU/lb)} ft/s. \quad (4.7)$$

5. Prehod s številskih enačb na veličinske

Pisci tehničnih besedil se zatikajo ob navidezne ovire, ko želijo preiti z omejenih številskih enačb, uporabnih samo za natančno predpisane enote, na univerzalne veličinske enačbe, pa zategadelj včasih opuščajo ta namen. Zato bomo na nekaj primerih pokazali, kako se ta prehod izvede praktično. Poglejmo najprej primer anglo-ameriške številske enačbe (4.5). Tam smo tudi že nakazali smernice za ta prehod: na mesta simbolov merskih števil (4.5) je treba vstaviti razmerja simbola veličine in enote po enačbi (4.6). Tako dobimo prilagojeno veličinsko enačbo (4.7), v kateri označujejo seveda simboli veličine.

Dobljeni izraz (4.7) se v našem primeru najenostavneje razreši tako, da se postavi vsa desna stran enačbe (4.7) pod znak korena:

$$v = \sqrt{\Delta i \cdot 223,85^2 \frac{1b \cdot ft^2}{BTU \cdot s^2}}. \quad (5.1)$$

Ker je $BTU/lb = 1055,8 J / (0,45359 kg)$ in $ft/s = 0,3048 m/s$, izhaja pod korenem (5.1):

$$223,85^2 \frac{0,45359 kg}{1055,8 J} \left(0,3048 \frac{m}{s} \right)^2 = 2 \frac{kg \cdot m^2}{J \cdot s^2}.$$

Tako ostane samo še, da razrešimo razmerje enot $kg \cdot m^2 / (J \cdot s^2)$. Vemo, da je $J = Nm$. Ker je enota za silo N v mednarodnem merskem sistemu definirana kot sila, ki daje masi 1 kilograma pospešek $1 m/s^2$, je $N = kg \cdot m/s^2$ in dalje $J = Nm = kg \cdot m^2/s^2$. Torej je:

$$2 \frac{kg \cdot m^2}{J \cdot s^2} = 2 \frac{kg \cdot m^2}{(kg \cdot m^2/s^2) \cdot s^2} = 2.$$

Tako dobimo iz enačbe (5.1) končno univerzalno veličinsko enačbo

$$v = \sqrt{2 \Delta i},$$

ki smo jo v prejšnjem poglavju označili s številko (4.4).

Dodali bomo še en primer prehoda od številskih enačb na veličinske s področja nauka o toploti. V mnogih učbenikih tehnične termodinamike in parnih strojev dobimo tele številske enačbe za energetski opis delovanja parnih strojev:

$$AL_0 D = 632 \quad (5.2)$$

$$W = \frac{632 q}{L_0 A} \quad (5.3)$$

Enačba (5.2) povezuje med seboj merska števila mehanskega ekvivalenta toplote A , specifičnega mehanskega dela pare L_0 in specifične porabe pare D . Enačba (5.3) povezuje merska števila porabe toplote za enoto proizvedenega mehanskega dela W z merskim številom specifične porabe toplote q ter z L_0 in A .

V učbenikih, v katerih so zgornje enačbe, piše, da je treba vstaviti za L_0 mersko število v kpm/kp, D pa v kp/KSh. Torej se nanašajo specifične veličine na enoto sile (teže) kp tehniškega merskega sistema, ker je enota za maso v tem sistemu skoraj neznana ($hyl = 9,80665 \text{ kg}$) [1].

Za mersko število ekvivalenta navajajo avtorji $A = 1/427$, ker je $\text{kcal} = 427 \text{ kpm}$.

V skladu z enačbo (1.2) lahko pri prehodu od številske enačbe (5.2) na veličinsko pišemo:

$$A = \frac{1}{427}, \quad L_0 = \frac{L_0}{\text{kpm/kp}}, \quad D = \frac{D}{\text{kp/KSh}}$$

Pri tem pomenijo kurzivni znaki veličine, pokončni pa merska števila. Srednji izraz lahko pišemo kot $L_0 = L_0/m$, ker smo krajšali kp. Tudi tretji izraz lahko poenostavimo, ker je $\text{KS} = 75 \text{ kpm/s}$ pa je zato tudi $\text{KSh} = 75 \text{ kpm s}^{-1} \cdot 3600 \text{ s} = 270000 \text{ kpm}$ oziroma $\text{KSh/kp} = 270000 \text{ m}$, torej je

$$A = 1/427, \quad L_0 = L_0/m, \quad D = D \cdot 270000 \text{ m}.$$

Če vstavimo ta razmerja v številske enačbe (5.2), dobimo:

$$\frac{1}{427} \frac{L_0}{m} D 270000 \text{ m} = 632,$$

iz česar takoj izhaja lepa univerzalna veličinska enačba

$$L_0 D = 1 \text{ ali } D = 1/L_0 \text{ ali } L_0 = 1/D. \quad (5.4)$$

To kaže, da je specifična poraba pare D recipročna veličina specifičnega dela L_0 . To je razumljivo, saj sta D in L_0 dejansko tako definirana (te definicije vzemimo na naravnejšo maso, ne pa na težo!). V nekem določenem času preteče skozi stroj količina pare z maso m ; v tem času bo pri enakomernem delovanju stroj opravil delo L . Specifična poraba pare D je določena z razmerjem mase pare m in opravljenim delom L torej $D = m/L$. S specifičnim (dobljenim) mehanskim delom L_0 razumemo razmerje koristnega dela L in parnega masnega toka m , torej $L_0 = L/m$. Če množimo tako definirana D in L_0 , dobimo $L_0 D = 1$, torej enačbo (5.4).

Od tod izhaja še nekaj drugega: ena od obeh specifičnih veličin je odveč. To, kar nam pove n. pr. L_0 , nam recipročno izraža tudi D .

Analizirajmo še številske enačbe (5.3)! Pri razlagi takih enačb navadno piše, da je treba za črko q uvrstiti število kcal/kp in za L_0 število kp/KSh, pa se za simbol merskega števila specifične porabe to-

plote W dobi število kcal/KSh. Zato lahko pišemo v skladu z osnovno enačbo (1.2):

$$W = \frac{W}{\text{kcal/KSh}}, \quad q = \frac{q}{\text{kcal/kp}}, \quad L_0 = \frac{L_0}{\text{kpm/kp}},$$

$$A = \frac{1}{427},$$

kjer predstavljajo kurzivni simboli veličine, pokončni pa merska števila za našete merske enote. Če vstavimo zgornja razmerja v (5.3), dobimo:

$$\frac{W}{\text{kcal/KSh}} = \frac{632 \frac{q}{\text{kcal/kp}}}{\frac{L_0}{\text{kpm/kp}} \frac{1}{427}}$$

Iz ureditve zgornje enačbe izhaja:

$$W = \frac{q}{L_0} \frac{632 \cdot 427 \text{ kpm}}{\text{KSh}} = \frac{q}{L_0},$$

ker je $632 \cdot 427 \text{ kpm} = 270000 \text{ kpm} = \text{KSh}$.

Vidimo, da je specifična poraba toplote razmerje med porabljeno specifično toploto q in dobljenim specifičnim delom L_0 ; to pa ni nič drugega kakor recipročna veličina toplotnega izkoristka η , ki je definiran z razmerjem koristnega skupnega dela $L = m L_0$ in porabljene toplote $Q = m q$, torej

$$\eta = \frac{L}{Q} = \frac{m L_0}{m q} = \frac{L_0}{q} = \frac{1}{W}.$$

To je seveda univerzalna veličinska enačba. Toplotni izkoristek η po večini že tako uporabljamo pri toplotnih proračunih, zato je W povsem nepotrebna veličina, ker je samo recipročna vrednost od η . To lahko ilustriramo s praktičnim primerom. Vzemimo Rankinov krožni proces s tlaki $p_1 = 10 \text{ at}$, $p_2 = 0,1 \text{ at}$ in temperaturo $T_1 = 623 \text{ K}$ ($\text{K} \dots$ stopinja Kelvina). Za posamezne točke procesa dobimo iz $i-s$ diagrama karakteristične specifične entalpije; $i_2 = 3160 \text{ kJ/kg}$, $i_3 = 2310 \text{ kJ/kg}$, $i_4 = 190 \text{ kJ/kg}$. Koristno delo na enoto mase je $L_0 = i_2 - i_3 = 850 \text{ kJ/kg}$, medtem ko je porabljena specifična toplota $q = i_2 - i_4 = 2970 \text{ kJ/kg}$. Toplotni izkoristek procesa je:

$$\eta = \frac{L_0}{q} = \frac{850 \text{ kJ/kg}}{2970 \text{ kJ/kg}} = 0,284.$$

Izračunajmo še ostali dve odvečni veličini:

$$W = q/L_0 = 1/\eta = 3,62;$$

$$D = 1/L_0 = 0,001177 \text{ kg/kJ}.$$

Vzemimo še en koristen primer iz primenjene mehanike! V priročnikih in učbenikih za mehaniko in strojništvo najdemo tole enačbo za določanje

momenta pospeševanja ali pojemanja rotirajočih mas:

$$M = \frac{GD^2}{375} \cdot \frac{dn}{dt} \quad (5.5)$$

Enačbo smo tiskali s pokončnimi in ne s kurzivnimi znaki. S tem smo že na pogled poudarili, da predstavljajo označbe merska števila, ne pa veličine.

V resnici beremo med besedilom pri tej enačbi, da dobimo moment v kpm, če vstavimo težo rotirajočega predmeta v kp, reducirani premer v metrih, hitrost vrtenja v $1/\text{min} = \text{min}^{-1}$, čas pa v sekundah. To pomeni, da je treba razumeti označbe merskih števil v enačbi (5.5) kot razmerja veličin in naštetih enot, torej:

$$M = M/\text{kpm}; G = G/\text{kp}; n = n/\text{min}^{-1}; t = t/\text{s}.$$

Da dobimo prilagojeno veličinsko enačbo, vstavimo sprednja razmerja v številsko enačbo (5.5):

$$\frac{M}{\text{kpm}} = \frac{1}{375} \frac{G}{\text{kp}} \left(\frac{D}{\text{m}} \right)^2 \frac{dn/\text{min}^{-1}}{dt/\text{s}} \quad (5.6)$$

Po prestavitvi enot na desno stran zgornje enačbe izhaja:

$$M = GD^2 \frac{dn}{dt} \cdot Z, \quad (5.7)$$

pri čemer je

$$Z = \frac{\text{kpm} \cdot \text{min} \cdot \text{s}}{375 \text{ kp} \cdot \text{m}^2},$$

iz česar dobimo po krajšanju kp in m v števcu in imenovalcu in po zamenjavi $\text{min} = 60 \text{ s}$:

$$Z = \frac{60}{375 \text{ m/s}^2} = \frac{1}{6,25 \text{ m/s}^2}$$

Tu nas iznenadi pojav enote m/s^2 v konstanti Z. Če pa pomislimo, da se s to enoto po eni strani meri pospešek in hkrati navedena enačba vključuje težo (ki je po $G = mg$ odvisna od pospeška zemljine teže), pridemo do zaključka, da vsebuje konstanta Z pospešek zemljine teže g .

Standardni pospešek zemljine teže je $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$. Zato je $6,25 \text{ m/s}^2 \approx g \cdot 0,637$ in dalje $Z = 1/(g \cdot 0,637) = 1,57/g$. Število 1,57 je približno enako $\pi/2$, kar daje končno $Z = \pi/(2g)$.

Uvrstimo tako dobljeni Z v enačbo (5.7):

$$M = \frac{\pi}{2g} GD^2 \frac{dn}{dt}, \quad (5.8)$$

kar je prava univerzalna veličinska enačba, v kateri označuje vsaka kurzivna črka veličino. Ker je masa rotirajočega telesa $m = G/g$, se izraz (5.8) lahko nadalje poenostavi v:

$$M = \frac{\pi}{2} mD^2 \frac{dn}{dt}, \quad (5.9)$$

oziroma — upoštevajoč definicijo za kotno hitrost $\omega = 2\pi n$ in $D = 2r$ (kjer je r polmer, na katerega si zamislimo reducirano celotno maso) tudi:

$$M = mr^2 d\omega/dt. \quad (5.10)$$

Ta zadnja enačba je že čisto blizu povsem splošne zveze med vrtilnim momentom M in (dinamičnim) vztrajnostnim momentom J :

$$M = J d\omega/dt.$$

Dejansko je po definiciji vztrajnostnega momenta:

$$J = \int r^2 dm.$$

V našem primeru je $J = m r^2 = m D^2/4$. Zaradi $\omega = 2\pi n$ dobimo enačbo (5.9), iz nje pa preko $m = G/g$ izraz (5.8).

Za praktično delo je enačba (5.9) enostavnejša od enačbe (5.10) iz tehle vzrokov:

Pri merjenju spremembe vrtilne hitrosti dn/dt se navadno v posameznih momentih lažje izmeri vrtilna hitrost n kakor kotna hitrost ω . Razen tega je lažje natančno izmeriti D kakor r , če delamo z reducirano maso in ne z reduciranim polmerom ali premerom.

Tehniški vztrajnostni moment bo še nekaj časa pomemben. GD^2 po enačbi (5.8) daje namreč preizkuševalcem strojev neko predstavo o vztrajnostnem momentu tistega stroja, medtem ko mislijo glede dejanske vztrajnosti $J = mr^2 = mD^2/4$, da se preveč nagiba k fiziki. Seveda je to samo stvar navade, »čut za mero« pa je v tehniki že prevečkrat zavedel na napačna pota. Toda — če hočemo upoštevati ta subjektivni moment, se moramo ozirati na omenjeni čut za mero tudi pri uporabi mednarodnega merskega sistema pri enačbi (5.8). To osvetljuje naslednji praktični primer:

Reducirana masa rotorja nekega stroja naj bo $m = 2000 \text{ kg}$, premer $D = 1,2 \text{ m}$; zato je po enačbi (5.9):

$$mD^2 = 2000 \text{ kg} \cdot 1,2^2 \text{ m}^2 = 2880 \text{ kgm}^2.$$

Hkrati je na površini Zemlje teža tega rotorja $G = 2000 \text{ kp}$, tako da bomo v enačbo (5.8) uvrstili:

$$GD^2 = 2000 \text{ kp} \cdot 1,44 \text{ m}^2 = 2880 \text{ kpm}^2.$$

To pomeni, da so številčne vrednosti za mD^2 , če se meri v kgm^2 , in za GD^2 , če se meri v kpm^2 , med seboj enake [1] (toda same številčne vrednosti!), ker je $m/\text{kg} = G/\text{kp}$. Fizikalno sta veličini mD^2 in GD^2 med seboj bistveno različni!

Prava karakteristika dinamične vztrajnosti rotorja je samo:

$$J = mr^2 = mD^2/4 = 720 \text{ kgm}^2.$$

to je masni vztrajnostni moment. Ta veličina je neodvisna od pospeška teže g in neodvisna od tega, ali je stroj na Zemlji, na luni ali v rudniškem dvigalu. Z GD^2 ni tako, ker je zaradi $G = mg$ tudi

$GD^2 = mgD^2$. Zaradi različnih vrednosti za g veličina GD^2 ni invariantna glede na pospešek sile teže g .

Zaključek

6.1. Veličinske enačbe so najpreglednejše, nazorne in se lahko naučimo z njimi zanesljivo računati, neutrudljiva kontrola pa je možna na vsaki stopnji računanja. So univerzalne, ker veljajo za kateri koli sistem enot, pa tudi za nesistematično skupino enot. Te prednosti veličinskih enačb so vzrok, da se njihova uporaba čedalje bolj širi. Ta razvoj podpira marsikje tudi standardizacija [3].

6.2. Številске enačbe, v katerih pomenijo simboli merska števila, so uporabne samo za določene enote. Z njimi avtor primora bralca, da mora računati prav s tistimi enotami, ki jih avtor najraje uporablja. V teh enačbah se pojavljajo tako imenovani »paraziti koeficienti«, ki zamegljujejo preglednost in napravljajo enačbe nenazorne, pri računu konkretnih primerov pa je treba zelo paziti,

da se ne prikrajajo računske napake. Po pedagoški plati so številске enačbe slabe, ker navajajo dijak, da se učijo zakonitosti v naravi v odvisnosti od enot, medtem ko veličinski račun temu nasproti zahteva proučevanje razmerij med veličinami ne glede na enote. To je naravno, kajti naravni procesi niso odvisni od tega, s čim jih ljudje merijo.

6.3. Prilagojene veličinske enačbe utegnejo biti morda kdaj koristne, če se ista enačba zaporedoma uporablja za preračunavanje cele vrste velikosti veličin.

Literatura:

- [1] Brezinščak, M.: Mjere i sistemi jedinica, Tehnička knjiga, Zagreb 1961.
- [2] Brezinščak, M.: Pouzdano računanje pomoću veličinskih jednadžbi, Elektrotehnički vjesnik (u tisku).
- [3] Hochrainer, A.: Schreibweise physikalischer Gleichungen (Entwurf, DIN 1313), Elektronorm 51 (1961), No. 1—2, str. 31—34.

Avtor: ing. Marijan Brezinščak, Zagreb, Elektrotehnički institut poduzeća Rade Končar, Fallerovo šetalište 22, p. p. 304.

Popravek

V članku Đ. Taubkina: Nov preračun domaćih klinastih jermenov, priobčenem v SV 1961 — 4/5, je treba na strani 93, v desni koloni, popraviti 22. vrsto od spodaj, v kateri mora biti pravilno: »za temperaturo okolice do + 40 °C«.

DK 621.822.8

Iglični ležaji — dandanes

FRANCI STARIHA

(Nadaljevanje in konec)

VPLIV TEMPERATURE NA OBRATOVANJE IGLIČNIH LEŽAJEV

Temperatura mesta, na katerem obratuje določen iglični ležaj, vpliva na več načinov. V glavnem je vsako prekomerno povečevanje temperature nezaželeno, ker predvsem zmanjšuje radialni zrak, vrh tega pa tudi neugodno vpliva na mazanje ležaja zaradi spremembe viskoznosti maziva, kar ima zopet druge posledice, posebno še, če se vse to dogaja pri velikih mehaničnih obremenitvah ležajnega sklopa in veliki vrtilni hitrosti.

Obratne temperature nad 100 °C zmanjšujejo nosilnost ležaja takole:

pri 125 °C	za 5 %
pri 150 °C	za 10 %
pri 175 °C	za 15 %
pri 200 °C	za 20 %

Pri temperaturah nad 200 °C se nosilnost ležaja hitro zmanjšuje.

Pri višjih temperaturah in v težjih obratovalnih pogojih nastajajo lahko resne posledice, zlasti popuščanje trdnosti materiala, kar povzroča hitro porušitev ležaja. V takih primerih je treba skrbeti za izdatno hlajenje ležajnega sklopa. Samo z odvajanjem toplote zmanjšujemo temperaturo na vrednosti, pri katerih ležaj lahko normalno obratuje.

UPORABNOST IGLIČNIH LEŽAJEV

Cepprav je iglični ležaj eden izmed najmlajših članov v družini kotalnih ležajev, saj je bil patentiran šele leta 1922 v Nemčiji, se je zdaj že tako prerinil v ospredje, da izpodriva vse ostale vrste kotalnih ležajev celo tam, kjer so do sedaj imeli popolno prednost. To morda ne velja toliko za Jugoslavijo, kjer so ti ležaji dandanes v primeri z drugimi malo v rabi, kar pa je mogoče nekako opravičiti. Naša industrija je razmeroma še zelo mlada, saj je bil pretežen del zgrajen tik pred vojno, med njo in po njej in sicer

v pogojih, ko ni bilo niti časa niti sredstev za kakršno koli eksperimentiranje. Dandanes pa so se razmere obrnile toliko na bolje, da so ustvarjeni vsi pogoji ne samo za smotno uvajanje in uporabo teh ležajev v lahki in težki industriji, temveč celo za njihovo domačo proizvodnjo, ki naj bi zadovoljevala glavne potrebe pri nas.

Kakšne pa so znatne prednosti igličnih ležajev pred ostalimi, ki omogočajo, da se njihova uporaba čedalje bolj širi po vseh panogah strojne tehnike? Te so:

1. majhne dimenzije in majhna teža nasproti ostalim ležajem, kar pomeni manjšo porabo prostora za vgraditev (sl. 3),
2. velika nosilnost in daljša življenjska doba,
3. velika dopustna vrtilna hitrost,
4. velika obratna varnost pri spremenljivem režimu obratovanja,
5. enostavna konstrukcija,
6. enostavna uporaba, vzdrževanje, montaža in demontaža,
7. možnost regulacije radialnega zraka in celo med obratovanjem (sl. 9),
8. velika izbira dimenzij, kar daje konstrukterju velike možnosti pri uporabi,
9. majhni stroški vzdrževanja in predvsem manjša poraba maziva,
10. sorazmerno enostavnejša proizvodnja sestavnih delov za ležaj,
11. možnost uporabe v vseh panogah strojne tehnike, od najbolj preciznih ležajnih sklopov raznih strojev in naprav do ležajnih sklopov za težko industrijo.

Te prednosti igličnih ležajev pred ostalimi kotalnimi ležaji, da ne govorimo o drsnih, omogočajo dandanes prehod na enostavnejše in funkcionalno boljše konstrukcije ležajnih sklopov pri raznih strojih in napravah.

Odlični uspehi z uporabo igličnih ležajev so bili doslej doseženi za delovna vretena in menjalnice nor-