

## Računski model za preračun upogibne trdnosti zobnikov

### A Computational Model for Calculating the Bending-Load Capacity of Gears

Srečko Glodež - Jože Flašker - Damir Jelaska - Janez Kramberger

V prispevku je predstavljen računski model za določitev dobe trajanja zobnikov glede na trdnost v zobnem korenu. Potek utrujanja, ki vodi do zloma zoba v korenu, sestoji iz nastanka in širjenja utrujenostne razpoke. Za določitev potrebnega števila obremenitvenih ponovitev  $N_i$  za nastanek utrujenostne razpoke je uporabljen Coffin-Mansonov zakon, pri katerem je predpostavljeno, da je začetna razpoka locirana na mestu največjih napetosti v zobnem korenu. Za nadaljnje širjene razpoke je uporabljen znani Parisov zakon, pri katerem so potrebne materialne veličine določene poprej na podlagi ustreznih testnih preskušancev. Funkcijska odvisnost med faktorjem intenzivnosti napetosti in dolžino razpoke  $K=f(a)$ , ki je potrebna za določitev potrebnega števila obremenitvenih ciklov  $N_p$  za razširitev razpoke od začetne do kritične dolžine, je izračunana numerično z metodo končnih elementov. Skupno število obremenitvenih ponovitev  $N$  za pojav končne poškodbe je vsota  $N = N_i + N_p$ . Čeprav nekateri vplivi (nehomogeni material, gibanje dislokacij) pri preračunih niso upoštevani, je predstavljen računski model zelo primeren za določitev dobe trajanja zobnikov, saj so tukaj predstavljeni numerični postopki hitrejši in cenejši v primerjavi z eksperimentalnim delom.

© 2002 Strojniški vestnik. Vse pravice pridržane.

(Ključne besede: zobniki, procesi utrujanja, doba življenjska, širjenje razpok)

A computational model for determining the service life of gears with regard to bending fatigue in a gear-tooth root is presented. The fatigue process leading to tooth breakage is divided into the crack-initiation and crack-propagation periods. The Coffin-Manson relationship is used to determine the number of stress cycles,  $N_i$ , required for the fatigue crack initiation, where it is assumed that the initial crack is located at the point of the largest stresses in a gear-tooth root. The simple Paris equation is then used for the further simulation of the fatigue crack growth, where the required material parameters have been determined previously with appropriate test specimens. The functional relationship between the stress-intensity factor and the crack length,  $K=f(a)$ , which is needed for determining the required number of loading cycles,  $N_p$ , for a crack propagation from the initial to the critical length, is obtained numerically in the framework of the finite-element method. The total number of stress cycles,  $N$ , for the final failure to occur is then a sum  $N = N_i + N_p$ . Although some influences (non-homogeneous material, travelling of dislocations, etc.) were not taken into account in the computational simulations, the presented model seems to be very suitable for determining the service life of gears because the numerical procedures used here are much faster and cheaper than experimental testing.

© 2002 Journal of Mechanical Engineering. All rights reserved.

(Keywords: gears, bending fatigue, service life, crack propagation)

#### 0 UVOD

Pri zobnikih se lahko zaradi ponavljajoče se obremenitve pri utrujanju pojavita dve poškodbi; jamičenja zobnih bokov in zlom zoba v korenu [1]. V tem prispevku je obravnavan samo zlom zoba v korenu. Predstavljen računski model je uporabljen za preračun upogibne trdnosti v korenu zoba oziroma dobe trajanja zobnika.

Za trdnostni nadzor zobnikov glede na napetost v zobnem korenu se običajno uporabljajo

#### 0 INTRODUCTION

Two kinds of tooth damage can occur on gears under repeated loading due to fatigue: the pitting of gear-tooth flanks and tooth breakage in the tooth root [1]. In this paper only tooth breakage is addressed and the developed computational model is used for calculating the tooth bending strength *i.e.* the service life of the gear tooth root.

Several classical, standardised procedures (DIN, AGMA, ISO, etc.) can be used for the approximate

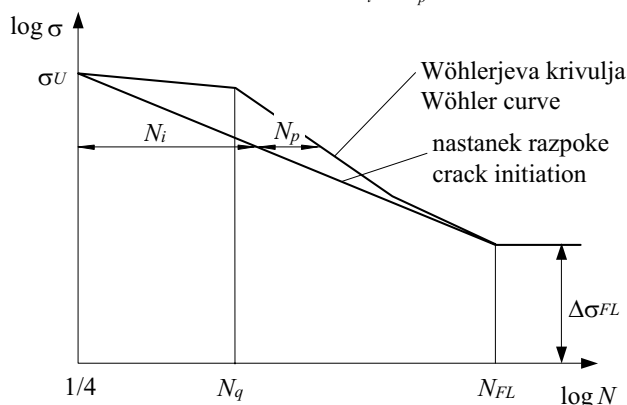
postopki po različnih standardih (DIN, AGMA, ISO itn.). Ti so zasnovani na primerjavi največje upogibne napetosti v zobnem korenu z dopustno upogibno napetostjo [1]. Obe napetosti sta odvisni od številnih vplivnih koeficientov, s katerimi upoštevamo dejanske razmere obratovanja zobnika (dodatne notranje in zunanje dinamične obremenitve, slika nošenja, material zobnika, površinska hrapavost itn.). Omenjeni standardni postopki so zasnovani samo na preskusih na testnih zobniških dvojicah in upoštevajo le zadnjo fazo utrujanja zobnega korena zobnika, to je pojav končne poškodbe.

V splošnem lahko potek nastanka utrujenostnih poškodb na strojnih elementih razdelimo v naslednje faze ([2] do [5]): (1) nastanek mikrorazpoke; (2) širjenje kratke razpoke; (3) širjenje dolge razpoke; in (4) nastanek končne poškodbe. Pri inženirskih analizah sta prvi dve fazi običajno obravnavani kot "faza nastanka razpoke", širjenje dolgih razpok pa kot "faza širjenja razpoke". Čeprav je natančna meja prehoda med nastankom in širjenjem razpoke običajno neznana, v splošnem velja, da pomeni nastanek razpoke pogosto večji delež dobe trajanja, predvsem pri obremenitvi blizu trajne trdnosti materiala (sl. 1). Skupno število obremenitvenih ponovitev  $N$  do pojava poškodbe potem določimo kot vsoto obremenitvenih ponovitev  $N_i$  za nastanek razpoke in obremenitvenih ponovitev  $N_p$  za razširitev razpoke od začetne do kritične dolžine, ko se utrujenostna poškodba tudi dejansko pojavi:

determination of the load capacity of the gear-tooth root. They are commonly based on a comparison of the maximum tooth-root stress with the permissible bending stress [1]. Their determination depends on a number of different coefficients that allow for the appropriate consideration of real working conditions (additional internal and external dynamic forces, contact area of the engaging gears, gear material, surface roughness, etc.). The classical procedures are exclusively based on the experimental testing of the reference gears, and they consider only the final stage of the fatigue process in the gear tooth root, *i.e.* the occurrence of final failure.

However, the complete process of fatigue failure of mechanical elements may be divided into the following stages ([2] to [5]): (1) microcrack nucleation; (2) short crack growth; (3) long crack growth; and (4) occurrence of final failure. In engineering applications the first two stages are usually termed as the "crack-initiation period", while long crack growth is termed as the "crack-propagation period". An exact definition of the transition from the initiation to the propagation period is usually not possible. However, the crack-initiation period generally accounts for most of the service life, especially in high-cycle fatigue (HCF), see Figure 1. The total number of stress cycles  $N$ , can then be determined from the number of stress cycles  $N_i$ , required for the fatigue crack initiation and the number of stress cycles,  $N_p$ , required for a crack to propagate from the initial to the critical crack length, when the final failure can be expected to occur:

$$N = N_i + N_p \quad (1).$$



Sl. 1. Shematska predstavitev dobe trajanja strojnih elementov  
Fig 1. Schematic representation of the service life of machine elements

## 1 NASTANEK UTRUJENOSTNE RAZPOKE

Predstavljen model nastanka utrujenostne razpoke je zasnovan na teoriji mehanike trdnin, pri kateri je predpostavljeno, da je material homogen in izotropen ter brez poškodb in nepravilnosti. V tem primeru so postopki za analize utrujanja materiala običajno zasnovani na Coffin-Mansonovem zakonu, ki podaja razmerje med deformacijami ( $\epsilon$ ), napetostmi ( $\sigma$ ) ter številu ponovitev ( $N_f$ ) v obliki ([6] in [7]):

## 1 FATIGUE CRACK INITIATION

The presented model for the fatigue crack initiation is based on the continuum mechanics approach, where it is assumed that the material is homogeneous and isotropic, *i.e.* without imperfections or damage. Methods for the fatigue analyses are, in that case, usually based on the Coffin-Manson relation between deformations ( $\epsilon$ ), stresses ( $\sigma$ ) and the number of cycles ( $N_f$ ), which can be described as follows ([6] and [7]):

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_{el} + \Delta\varepsilon_{pl} = \frac{\sigma'_f}{E} N_i^b + \varepsilon'_f N_i^c \quad (2),$$

kjer so  $\Delta\varepsilon$  prirastek skupne ter  $\Delta\varepsilon_{el}$  in  $\Delta\varepsilon_{pl}$  prirastek elastične ter plastične deformacije pri utrujanju,  $E$  modul elastičnosti materiala,  $\sigma'_f$  koeficient trdnosti,  $\varepsilon'_f$  koeficient žilavosti,  $b$  eksponent trdnosti in  $c$  eksponent žilavosti materiala. Prirastek deformacije pri utrujanju lahko določimo numerično (običajno po MKE), ali eksperimentalno z merilnimi lističi, ki jih namestimo v zobnem korenu na mestu, kjer pričakujemo nastanek razpoke. Materialne veličine  $\sigma'_f$ ,  $\varepsilon'_f$ ,  $b$  in  $c$  se določijo z ustreznimi preskusi, ločeno za vsak material v odvisnosti od razmerja napetost/deformacija.

V področju obremenitev blizu trajne trdnosti, kateri so v večini primerov izpostavljeni tudi zobniki, je delež plastične deformacije zanemarljivo majhen, tako da se Coffin-Mansonov zakon omeji le na elastični del ([8] in [9]):

$$(\Delta\sigma)^{k_i} \cdot N_i = C_i \quad (3),$$

kjer so  $\Delta\sigma$  prirastek napetosti ter  $k_i$  in  $C_i$  materialni veličini. Če predpostavimo, da se ujema v točki ( $N_{FL}$ ;  $\Delta\sigma_{FL}$ ) Wöhlerjeva krivulja s krivuljo nastanka razpoke (celotno dobo trajanja predstavlja v tej točki faza nastanka razpoke), lahko po enačbi (3) določimo število obremenitvenih ponovitev za nastanek razpoke pri poljubni napetosti  $\Delta\sigma$ :

$$N_i = N_{FL} \cdot \left( \frac{\Delta\sigma_{FL}}{\Delta\sigma} \right)^{k_i} \quad (4),$$

kjer je  $N_{FL}$  število obremenitvenih ponovitev pri trajni dinamični trdnosti  $\Delta\sigma_{FL}$  (sl. 1). Na podlagi enake predpostavke lahko določimo eksponent  $k_i$  po enačbi:

$$k_i = \frac{\log(4N_{FL})}{\log(\sigma_U / \Delta\sigma_{FL})} \quad (5),$$

kjer je  $\sigma_U$  natezna trdnost materiala (sl. 1). Enačba (5) kaže dobro ujemanje z razpoložljivimi eksperimentalnimi rezultati [9].

Pri določevanju števila obremenitvenih ponovitev za nastanek razpoke  $N_i$  po enačbi (4) je najpomembnejša veličina trajna dinamična trdnost  $\Delta\sigma_{FL}$ , ki je tipična materialna veličina in jo določimo z ustreznimi preskusi. Pri zobnikih določimo trajno dinamično trdnost običajno z ustreznimi referenčnimi zobniki. Po standardu ISO [1] so to valjasti zobniki z ravnim ozobjem, modulom  $m_n = 3$  do 5 mm, širino zob  $b = 10$  do 50 mm, površinsko hrapavostjo  $R_z \approx 10 \mu\text{m}$ , faktorjem koncentracije napetosti  $Y_{ST} = 2,0$  itn., ki so obremenjeni z utripno obremenitvijo. Če geometrijska oblika, površinska hrapavost, velikost zobnika in obratovne razmere zobnikov v praksi odstopajo od veličin pri referenčnih zobnikih, se vrednost trajne dinamične trdnosti  $\Delta\sigma_{FL}$  spremeni in jo določimo z ustreznimi vplivnimi koeficienti.

where  $\Delta\varepsilon$  is the strain increment,  $\Delta\varepsilon_{el}$  and  $\Delta\varepsilon_{pl}$  are the elastic and plastic strain increment,  $E$  is the Young's modulus of the material and  $\sigma'_f$ ,  $\varepsilon'_f$ ,  $b$  and  $c$  are the strength coefficient, ductility coefficient, strength exponent and ductility exponent for crack initiation, respectively. The strain increment can be obtained numerically (usually by FEM), or by strain-gauge measuring in the area of tooth root, where the crack initiation is expected. The material constants  $\sigma'_f$ ,  $\varepsilon'_f$ ,  $b$  and  $c$  are obtained for each material and stress/strain ratio, from strain controlled tests.

In the HCF region commonly applied for gears, where the plastic strain can be neglected, the Coffin-Manson relation reduces only to the elastic part and so transforms to an equation of the Basquin type ([8] and [9]):

where  $\Delta\sigma$  is the applied stress increment and  $k_i$  and  $C_i$  are the material constants. It is easy to obtain the crack initiation life,  $N_i$ , using this relation, if we assume that the crack initiation curve passes the same point ( $N_{FL}$ ;  $\Delta\sigma_{FL}$ ) as the Wöhler curve, it means at the fatigue limit level the whole fatigue life consists of the crack-initiation period:

where  $N_{FL}$  is the number of cycles at the knee of the Wöhler curve, see Figure 1. On the basis of the same assumption, the exponent  $k_i$  can be obtained as:

where  $\sigma_U$  is the ultimate strength, see Figure 1. This relation was found to be in good agreement with available experimental results [9].

The most important parameter when determining the crack-initiation life,  $N_i$ , according to equation (4), is the fatigue limit  $\Delta\sigma_{FL}$ , which is a typical material parameter and is determined using an appropriate test specimen. When determining the fatigue limit for gears, the reference test gears are usually used as the test specimens. According to the ISO standard [1], they are spur gears with a normal module  $m_n = 3$  to 5 mm, face width  $b = 10$  to 50 mm, surface roughness  $R_z \approx 10 \mu\text{m}$ , stress concentration factor  $Y_{ST} = 2.0$ , etc, which are loaded with repeated pulsating tooth loading. If the geometry, surface roughness, gear size and loading conditions of the real gears in practice deviate from the reference testing, the previously determined fatigue limit  $\Delta\sigma_{FL}$  must be modified by the appropriate correlation factors.

## 2 ŠIRJENJE UTRUJENOSTNE RAZPOKE

Pri analizi širjenja utrujenostne razpoke z uporabo linearno elastične mehanike loma (LELM) je hitrost širjenja razpoke  $da/dN$  funkcija faktorja intenzivnosti napetosti pri utrujanju  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ , kjer sta  $a$  dolžina razpoke in  $N$  število obremenitvenih ponovitev. V prispevku je za analizo širjenja razpoke uporabljen Parisov zakon [10]:

$$\frac{da}{dN} = C [\Delta K(a)]^m \quad (6)$$

kjer sta  $C$  in  $m$  materialni veličini. Z integracijo enačbe (6) sledi ob upoštevanju potrebnega števila ponovitev za širjenje razpoke  $N_p$  po enačbi (1):

$$\int_0^{N_p} dN = \frac{1}{C} \cdot \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{[\Delta K(a)]^m} \quad (7)$$

Enačba (7) pove, da lahko eksplicitno določimo potrebno število obremenitvenih ponovitev  $N_p$  za razširitev razpoke od začetne dolžine  $a_0$  do kritične dolžine  $a_c$ , če so znane veličine  $C$ ,  $m$  in  $\Delta K(a)$ .  $C$  in  $m$  sta materialni veličini in ju določimo eksperimentalno, običajno s tritočkovnimi preskušanci po standardu ASTM E 399-80 [11]. Odvisnost med faktorjem intenzivnosti napetosti in dolžino razpoke  $K = f(a)$  lahko za preproste primere razpok določimo po postopkih, navedenih v [10] in [11], pri zahtevnejših geometrijskih oblikah elementov in obremenitvenih primerih pa moramo uporabiti druge metode. V tem prispevku je za analizo širjenja utrujenostne razpoke uporabljena metoda končnih elementov v okviru programskega paketa FRANC2D [12]. Z uporabo te metode je določitev faktorja intenzivnosti napetosti zasnovana na načelu odvisnosti pomikov z uporabo singularnih četrtinskih končnih elementov (sl. 2). Za ravninsko deformacijsko stanje in kombinirano obremenitev sledita faktorja intenzivnosti napetosti:

$$K_I = \frac{2G}{(3-4\nu)+1} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \cdot [4v_d - v_e - 4v_b + v_c] \quad (8)$$

$$K_{II} = \frac{2G}{(3-4\nu)+1} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \cdot [4u_d - u_e - 4u_b + u_c]$$

kjer so  $G$  strižni modul materiala,  $\nu$  Poissonovo število,  $L$  dolžina končnih elementov okrog razpoke ter  $u$  in  $v$  vzdolžni pomiki elementov okrog razpoke. Skupni faktor intenzivnosti napetosti je potem:

$$K = \sqrt{(K_I^2 + K_{II}^2) \cdot (1-\nu^2)} \quad (9)$$

Opisan računski postopek temelji na majhnih prirastkih razpoke, pri katerih je velikost prirastka v posameznem koraku vnaprej predpisana. Za določitev smeri širjenja razpoke je uporabljen kriterij največjih nateznih napetosti. Pri tem je predpostavljeno, da se razpoka razširi radialno glede na vrh razpoke v ravnini, ki je pravokotna na smer

## 2 FATIGUE CRACK PROPAGATION

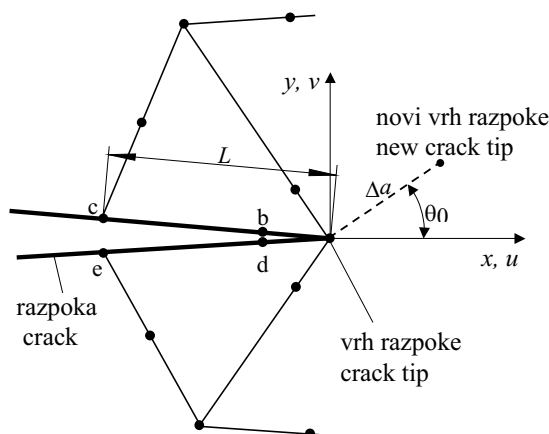
The application of linear elastic fracture mechanics (LEFM) to fatigue is based upon the assumption that the fatigue-crack growth rate,  $da/dN$ , is a function of the stress intensity range  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ , where  $a$  is the crack length and  $N$  is the number of load cycles. In this study the simple Paris equation is used to describe of the crack growth rate [10]:

where  $C$  and  $m$  are the material parameters. In respect to the crack propagation period,  $N_p$ , according to eq. (1), and with the integration of eq. (6) one can obtain:

Equation (7) indicates that the required number of loading cycles,  $N_p$ , for a crack to propagate from the initial length  $a_0$  to the critical crack length  $a_c$  can be explicitly determined if  $C$ ,  $m$  and  $\Delta K(a)$  are known.  $C$  and  $m$  are material parameters and can be obtained experimentally, usually by means of a three-point bending test, in accordance with the standard procedure ASTM E 399-80 [11]. For simple cases the dependence between the stress-intensity factor and the crack length  $K = f(a)$  can be determined using the methodology given in [10] and [11]. For more complicated geometry and loading cases it is necessary to use alternative methods. In this paper the finite-element method in the framework of the programme package FRANC2D [12] was used for the simulation of the fatigue crack growth. In this paper the determination of the stress-intensity factor is based on the displacement-correlation method using singular quarter-point elements, Figure 2. The stress-intensity factor in the mixed-mode plane-strain condition can then be determined as:

where  $G$  is the shear modulus of the material,  $\nu$  is the Poisson ratio,  $L$  is the finite-element length on the crack face, and  $u$  and  $v$  are displacements of the crack-tip elements. The combined stress-intensity factor is then:

The computational procedure is based on incremental crack extensions, where the size of the crack increment is prescribed in advance. In order to predict the crack extension angle the maximum tensile stress criterion (MTS) is used. In this criterion it is proposed that the crack propagates from the crack tip in a radial direction in the plane per-



Sl. 2. Trikotni četrtinski elementi okrog vrha razpoke  
 Fig. 2. Triangular quarter-point elements around crack tip

največjih nateznih napetosti. Kot širjenja razpoke lahko na temelju te predpostavke izračunamo po enačbi (sl. 2):

$$\theta_0 = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{4} \cdot \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right] \quad (10).$$

Za vsak korak je treba okrog novega vrha razpoke načrtovati novo mrežo končnih elementov. Postopek ponavljamo toliko časa, dokler faktor intenzivnosti napetosti ne doseže kritične vrednosti  $K_c$ , ko se pojavi tudi zlom zoba v korenu. Na ta način lahko določimo funkcijsko odvisnost  $K = f(a)$ .

pendicular to the direction of greatest tension. The predicted crack-propagation angle can be calculated by, see Figure 2:

A new local remeshing around the new crack tip is then required. The procedure is repeated until the stress-intensity factor reaches the critical value  $K_c$ , when the complete tooth fracture is expected. Following the above procedure, one can numerically determine the functional relationship  $K = f(a)$ .

### 3 PRAKTIČNI PRIMER

Predstavljen model je uporabljen za določitev dobe trajanja dejanskega zobnika z ravnim ozobjem in osnovnimi podatki iz preglednice 1. Material zobnika je zelo trdno legirano jeklo 42CrMo4 (0,43 %C, 0,22 %Si, 0,59 %Mn, 1,04 %Cr, 0,17 %Mo) z modulom elastičnosti  $E=2,1 \cdot 10^5$  MPa in Poissonovim številom  $\nu = 0,3$ . Toplotna obdelava zobnika je naslednja: segrevanje na 810°C; 2 min, kaljeno v olju; 3 min in popuščano na 180°C; 2 h.

### 3 PRACTICAL EXAMPLE

The presented model has been used for the computational determination of the service life of a real spur gear with the complete data set given in Table 1. The gear is made of high-strength alloy steel 42CrMo4 (0.43 %C, 0.22 %Si, 0.59 %Mn, 1.04 %Cr, 0.17 %Mo) with a Young's modulus  $E = 2.1 \cdot 10^5$  MPa and a Poisson's ratio  $\nu = 0.3$ . The gear material is thermally treated as follows: flame heated at 810°C, 2 min; hardened in oil, 3 min, and tempered at 180°C, 2 h.

Preglednica 1. Poglavitni podatki obravnavanega zobnika z ravnim ozobjem  
 Table 1. Basic data of a treated spur gear

modul module	$m_n = 4,5$ mm
število zob number of teeth	$z = 39$
ubirni kot na razdelnem krogu pressure angle on pitch circle	$\alpha_n = 24^\circ$
koeficient profilne premaknitve coefficient of profile displacement	$x = 0,06$
širina zoba face width	$b = 28$ mm
material zobnika gear material	42CrMo4
površinska hrapavost surface roughness	$R_z = 10$ $\mu$ m

### 3.1 Nastanek utrujenostne razpoke

Računski postopek, opisan v poglavju 1 je uporabljen za določitev števila obremenitvenih ponovitev  $N_i$  za nastanek utrujenostne razpoke. Natezna trdnost  $\sigma_u=1100$  MPa, trajna trdnost  $\Delta\sigma_{FL}=550$  MPa in število obremenitvenih ponovitev na pregibu Wöhlerjeve krivulje  $N_{FL}=3\cdot 10^6$  so uporabljeni iz virov [1], [13] in [14] za enak material kakor je material obravnavanega zobnika. Izračuni so izvedeni za različne vrednosti normalne utripne obremenitve  $F$ , ki deluje v zunanji točki enojnega ubiranja zobnika (sl. 3). Največja glavna napetost v zobnem korenu  $\Delta\sigma$  kot posledica delovanja obremenitve  $F$  je izračunana numerično po metodi končnih elementov, pri čemer je uporabljen numerični model na sliki 3. Rezultati izračunov so prikazani v preglednici 2.

### 3.2 Širjenje utrujenostne razpoke

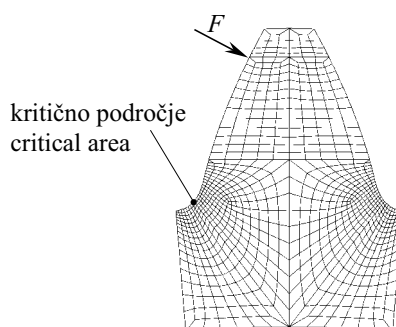
Za analizo širjenja utrujenostne razpoke je uporabljena metoda končnih elementov v okviru programskega paketa FRANC2D (poglavje 2). Začetna razpoka je locirana pravokotno na površino na mestu največje glavne napetosti na natezni strani zobnega korena (sl. 4).

### 3.1 Fatigue crack initiation

The procedure as described in Section 1 has been used to determine the number of stress cycles,  $N_i$ , required for the fatigue crack initiation. The ultimate tensile strength  $\sigma_u=1100$  MPa, fatigue limit  $\Delta\sigma_{FL}=550$  MPa and number of cycles at the knee of the Wöhler curve  $N_{FL}=3\cdot 10^6$  have been taken from [1], [13] and [14] for the same material as used in this paper. The computational analysis was done for different values of the normal pulsating force  $F$ , which is acting at the outer point of the single-tooth contact, see Figure 3. As a consequence of  $F$  the maximum principal stress  $\Delta\sigma$  in a gear-tooth root has been determined numerically with the finite-element method, where the FE model shown in Figure 3 has been used. The results are summarised in Table 2.

### 3.2 Fatigue crack propagation

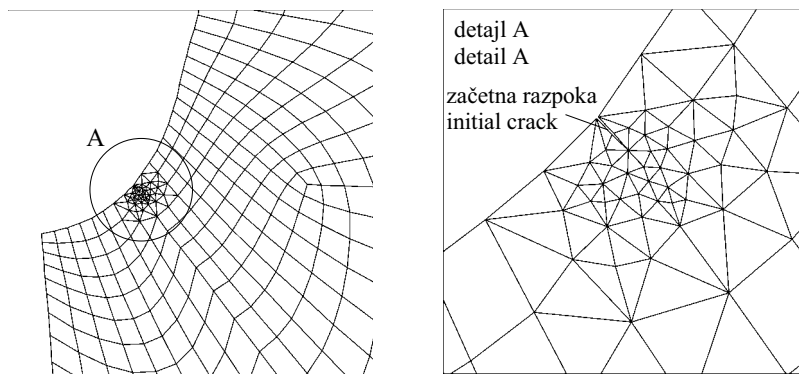
The FEM programme package FRANC2D as described in Section 2 was used for the numerical simulation of the fatigue crack growth. The initial crack was located perpendicular to the surface at the point of the maximum principal stress on the tensile side of the gear tooth, see Figure 4.



Sl. 3. Model končnih elementov  
Fig. 3. Finite element model

Preglednica 2. Računski rezultati nastanka utrujenostne razpoke  
Table 2. Computational results for the fatigue crack initiation

Obremenitev Loading $F$ N/mm	Največja glavna napetost v zobnem korenu zobnika Maximum principal stress in a gear tooth root $\sigma$ MPa	Število ponovitev Number of cycles $N_i$
800	527	$8,192\cdot 10^6$
900	593	$5,109\cdot 10^5$
1000	659	$4,271\cdot 10^4$
1100	725	$4,526\cdot 10^3$
1200	790	$6,010\cdot 10^2$
1300	857	$8,861\cdot 10^1$
1400	922	$1,588\cdot 10^1$
1500	988	$3,087\cdot 10^0$



Sl. 4. Mreža končnih elementov okrog začetne razpoke v korenu zoba  
 Fig. 4. Finite element mesh around initial crack in a gear tooth root

Pri numeričnih izračunih je predpostavljeno, da ustreza dolžina začetne razpoke  $a_o$  mejni dolžini  $a_{th}$ , pod katero ne moremo uporabiti zakonitosti LEFM. Mejno dolžino razpoke lahko približno določimo po enačbi [15]:

$$a_{th} \approx \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Delta K_{th}}{\Delta \sigma_{FL}} \right)^2 \quad (11),$$

kjer je  $\Delta \sigma_{FL}$  trajna dinamična trdnost in  $\Delta K_{th}$  mejni faktor intenzivnosti napetosti pri utrujanju. V strokovni literaturi najdemo širok spekter vrednosti za  $a_{th}$ , ki pa so za jekla običajno med 0,05 in 1 mm, pri čemer se manjše vrednosti nanašajo na zelo trdna jekla. Z upoštevanjem materialnih veličin  $\Delta \sigma_{FL} \approx 550$  MPa in  $K_{th} \approx 269$  MPa $\sqrt{\text{mm}}$ , vzetih iz virov [13] in [14], znaša mejna dolžina razpoke za obravnavani primer  $a_{th} \approx 0,1$  mm. Lomna žilavost  $K_{Ic} \approx 2620$  MPa $\sqrt{\text{mm}}$  in materialni veličini  $C = 3,31 \cdot 10^{-17}$  mm/cycl/(MPa $\sqrt{\text{mm}})^m$  in  $m = 4,16$  so bile za tukaj uporabljen material določene poprej s tritočkovnimi upogibnimi preskušanci po ASTM E 399-80 [14].

Pri analizi širjenja utrujenostne razpoke je upoštevana enaka obremenitev kakor pri nastanku (poglavje 3.1). Pri numeričnih analizah je znašal prirastek razpoke  $\Delta a = 0,2$  mm do dolžine razpoke  $a = 4$  mm, in nato  $\Delta a = 0,4$  mm do kritične dolžine razpoke  $a_c$  (sl. 2). Za določitev potrebnega števila obremenitvenih ponovitev  $N_p$  za razširitev razpoke od začetne dolžine  $a_{th}$  do kritične dolžine  $a_c$  po enačbi (7), je treba poznati funkcijsko odvisnost  $\Delta K = f(a)$ . Slika 5 prikazuje funkcijsko odvisnost med skupnim faktorjem intenzivnosti napetosti  $K$  in dolžino razpoke  $a$ , kjer je  $K$  izračunan po enačbi (9) na podlagi numerično izračunanih vrednosti za  $K_I$  in  $K_{II}$ . Numerični izračuni kažejo, da je faktor intenzivnosti napetosti  $K_I$  prevladujoč v primerjavi s  $K_{II}$  ( $K_{II}$  znaša manj ko 5 %  $K_I$  za vse obremenitvene primere in vse dolžine razpok). To dejansko pomeni, da lahko upoštevamo lomno žilavost  $K_{Ic}$  kot kritično vrednost faktorja intenzivnosti napetosti  $K$ , pripadajočo dolžino razpoke pa za kritično dolžino razpoke  $a_c$ . Potrebno število obremenitvenih ponovitev  $N_p$  za

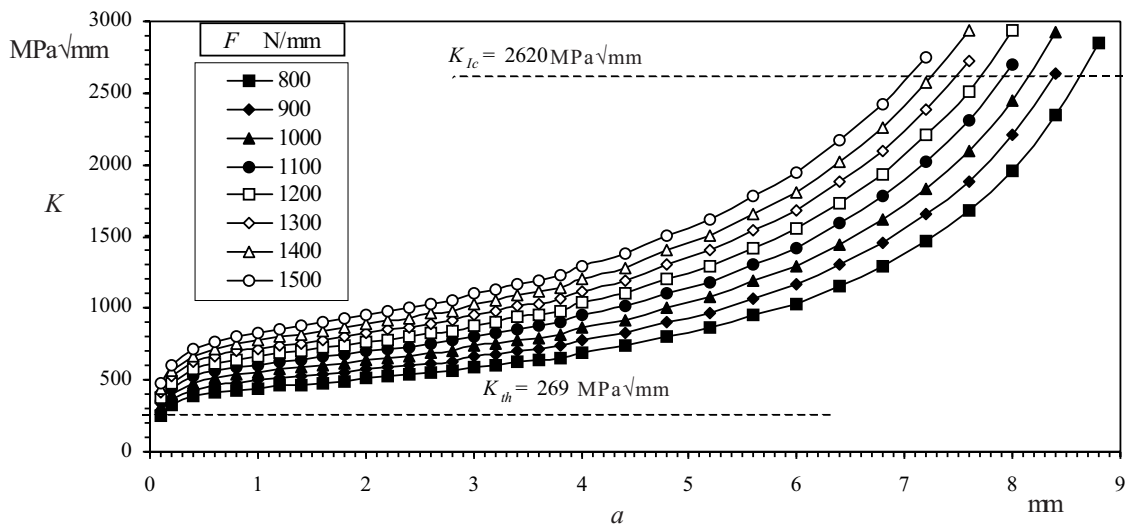
In numerical computations it was assumed that the initial crack,  $a_o$ , corresponds to the threshold crack length,  $a_{th}$ , below which LEFM is not valid. The threshold crack length may be estimated approximately as [15]:

where  $\Delta \sigma_{FL}$  is the fatigue limit and  $\Delta K_{th}$  is the threshold stress-intensity range. However, a wider range of values was selected for  $a_{th}$  in the literature, usually between 0.05 and 1 mm for steels, where high-strength steels take the smallest values. Considering the material parameters  $\Delta \sigma_{FL} \approx 550$  MPa and  $K_{th} \approx 269$  MPa $\sqrt{\text{mm}}$  available in [13] and [14] the threshold crack length is equal to  $a_{th} \approx 0.1$  mm. The fracture toughness  $K_{Ic} \approx 2620$  MPa $\sqrt{\text{mm}}$ , and the material parameters  $C = 3.31 \cdot 10^{-17}$  mm/cycl/(MPa $\sqrt{\text{mm}})^m$  and  $m = 4.16$  were determined previously using three-point bending samples according to the ASTM E 399-80 standard and for the same material as used in this paper [14].

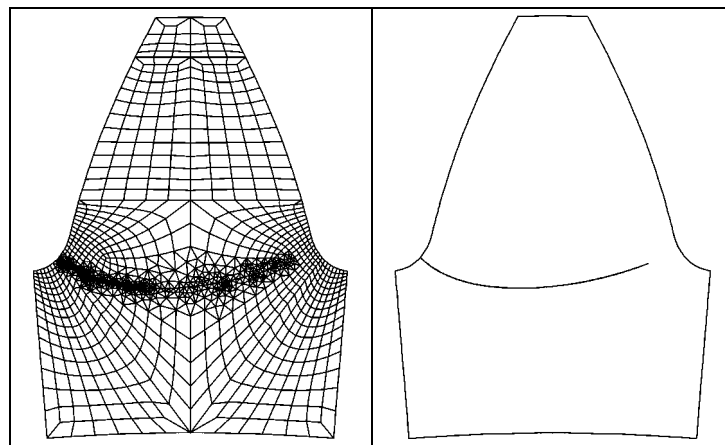
The tooth loading was equal to the computational analysis of the fatigue crack initiation, see Section 3.1. During numerical simulations the crack increment size,  $\Delta a$ , was 0.2 mm, up to the crack length  $a = 4$  mm, and after this, 0.4 mm up to the critical crack length  $a_c$ , see Figure 2. To be able to determine the number of loading cycles,  $N_p$ , required for the crack to propagate from the initial crack length,  $a_{th}$ , to the critical crack length,  $a_c$ , according to equation (7), it is necessary to determine the dependence  $\Delta K = f(a)$  first. Figure 5 shows the functional relationship between the combined stress-intensity factor,  $K$ , and crack length,  $a$ , where  $K$  is obtained with equation (9) using numerically determined values of  $K_I$  and  $K_{II}$ . Numerical analysis has shown that the  $K_I$  stress-intensity factor is much higher than  $K_{II}$  ( $K_{II}$  was less than 5 % of  $K_I$  for all load cases and crack lengths). Therefore, the fracture toughness,  $K_{Ic}$ , can be considered as the critical value of  $K$  and the appropriate crack length can be taken as the critical crack length,  $a_c$ . The loading cycles,  $N_p$ , for the crack propagation to the critical crack length can

razširitev razpoke do kritične dolžine potem izračunamo po enačbi (7), (preglednica 3). Slika 6 prikazuje pot širjenja razpoke v korenu zoba.

then be estimated using equation (7), see Table 3. Figure 6 shows the numerically determined crack-propagation path in a gear-tooth root.



Sl. 5. Funkcijska odvisnost med faktorjem intenzivnosti napetosti in dolžino razpoke  
Fig. 5. Functional relationship between the stress intensity factor and crack length



Sl. 6. Pot širjenja razpoke v zobnem korenu zobnika  
Fig. 6. Crack propagation path in a gear tooth root

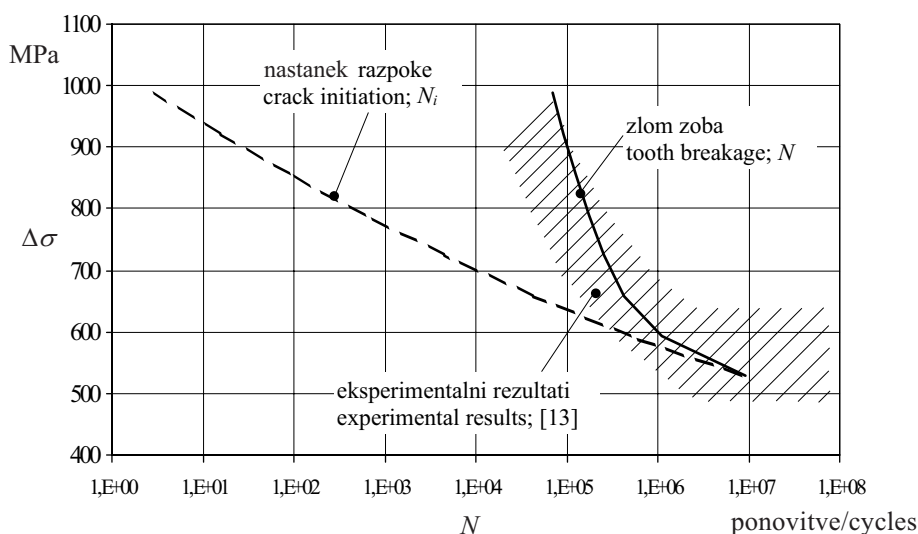
Preglednica 3. Računski rezultati širjenja utrujenostne razpoke  
Table 3. Computational results for the fatigue crack propagation

Obremenitev Loading $F$ N/mm	Kritična dolžina razpoke Critical crack length $a_c$ mm	Število ponovitev Number of cycles $N_p$
800	8,6	$9,473 \cdot 10^5$
900	8,4	$5,845 \cdot 10^5$
1000	8,2	$3,768 \cdot 10^5$
1100	7,9	$2,534 \cdot 10^5$
1200	7,7	$1,773 \cdot 10^5$
1300	7,5	$1,264 \cdot 10^5$
1400	7,3	$9,322 \cdot 10^4$
1500	7,1	$6,993 \cdot 10^4$



Na temelju dobijenih rezultata za nastanak razpoke ( $N_i$ ) in širjenje razpoke ( $N_p$ ) iz preglednic 2 in 3 lahko določimo skupno dobo trajanja zoba zobnika po enačbi (1) (sl. 7). S slike 7 je razvidno, da je razmerje med fazo nastanka razpoke in koncem širjenja razpoke (zlomom zoba) odvisno od ravni napetosti v korenu zoba. Pri majhnih napetostih blizu trajne trdnosti pomeni faza nastanka razpoke skoraj celotno dobo trajanja zobnika, pri večjih napetostih je zelo pomembna predvsem faza širjenja razpoke. Dobljeni računski rezultati dobe trajanja kažejo dobro ujemanje z razpoložljivimi eksperimentalnimi rezultati, uporabljenimi iz vira [13].

On the basis of the computational results for the crack-initiation ( $N_i$ ) and crack-propagation ( $N_p$ ) periods in Tables 2 and 3 the total service life of the gear-tooth root can be obtained according to equation (1), see Figure 7. It is clear from Figure 7 that the ratio among the periods of initiation and of the end of propagation (i.e. final breakage) depends on the stress level. At low stress levels almost all the service life is spent in crack initiation, but at high stress levels a significant part of the life is spent in the crack propagation. The computational results for total service life are in a good agreement with the available experimental results, which are taken from [13].



Sl. 7. Izračun dobe trajanja obravnavanega zobnika  
 Fig. 7. The computed service life of treated gear

4 SKLEPI

4 CONCLUSIONS

V prispevku je predstavljen računski model za določitev dobe trajanja zobnikov glede na trdnost v zobnem korenu. Potek utrujanja zobnika, ki vodi do končnega zloma zoba v korenu, je razdeljen v fazo nastanka razpoke ( $N_i$ ) in fazo širjenja razpoke ( $N_p$ ). Skupna doba trajanja zobnika je definirana kot  $N = N_i + N_p$ . Za izračun števila ponovitev za nastanek razpoke  $N_i$  je uporabljena preprosta Basquinova enačba. V modelu je predpostavljeno, da je začetna razpoka na mestu največje glavne napetosti v korenu zoba, ki je določena numerično z MKE. Funkcijska odvisnost med faktorjem intenzivnosti napetosti in dolžino razpoke  $K = f(a)$ , potrebna za analizo širjenja razpoke in določitev števila ponovitev  $N_p$ , je določena numerično z metodo odvisnosti pomikov v okviru metode končnih elementov.

This paper presents a computational model for determining the service life of gears in regard to bending fatigue in a gear-tooth root. The fatigue process leading to tooth breakage in a tooth root is divided into the crack-initiation ( $N_i$ ) and crack-propagation ( $N_p$ ) periods, which enables the determination of total service life as  $N = N_i + N_p$ . The simple Basquin equation is used to determine the number of stress cycles,  $N_i$ . In the model it is assumed that the crack is initiated at the point of the maximum principal stress in a gear-tooth root, which is calculated numerically using the FEM. The displacement-correlation method is then used for the numerical determination of the functional relationship between the stress-intensity factor and crack length  $K = f(a)$ , which is necessary for a subsequent analysis of fatigue crack growth, i.e. determination of the stress cycles  $N_p$ .

Predstavljen model je uporabljen za določitev dobe trajanja realnega zobnika iz zelo trdnega legiranega jekla 42CrMo4. Rezultate računskih analiz prikazuje slika 7, kjer sta predstavljeni dve krivulji: krivulja nastanka razpoke in krivulja zloma zoba, ki hkrati pomeni skupno dobo trajanja zobnika. Rezultati kažejo, da pomeni faza

The model is used to determine the complete service life of a spur gear made from high-strength alloy steel 42CrMo4. The final results of the computational analysis are shown in Figure 7, where two curves are presented: the crack-initiation curve and the curve of tooth breakage, which at the same time represents the

nastanka razpoke pri majhnih napetostih blizu trajne trdnosti skoraj celotno dobo trajanja zobnika. To je zelo pomembna ugotovitev pri izračunavanju dobe trajanja zobniških dvojic v praksi, ki v večini primerov dejansko obratujejo v obremenitvenih razmerah blizu trajne dinamične trdnosti.

Dobljeni računski rezultati za skupno dobo trajanja zobnika se dobro ujemajo z razpoložljivimi eksperimentalnimi rezultati. Kljub temu velja model v prihodnje še izboljšati na področju teoretičnih spoznanj in numeričnih analiz, prav tako pa bodo potrebne dodatne eksperimentalne raziskave za določitev potrebnih materialnih veličin.

total service life. The results show that at low stress levels near the fatigue limit, almost all service life is spent in crack initiation. It is a very important knowledge for the determination of the service life of real gear drives in practice, because the majority of them really operate with loading conditions close to the fatigue limit.

The computational results for total service life are in a good agreement with the available experimental results. However, the model can be further improved with additional theoretical and numerical research, although additional experimental results will be required to provide the required material parameters.

## 5 LITERATURA

## 5 REFERENCES

- [1] ISO 6336, Calculation of load capacity of spur and helical gears, *International Standard*, 1993
- [2] Shang, D.G., W.X. Yao, D.J. Wang (1998) A new approach to the determination of fatigue crack initiation size, *Int. J. Fatigue*, 20, 683-687.
- [3] Glodež, S., J. Flašker, Z. Ren (1997) A new model for the numerical determination of pitting resistance of gear teeth flanks, *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, 71-83.
- [4] Glodež, S., H. Winter, H.P. Stüwe (1997) A fracture mechanics model for the wear of gear flanks by pitting, *Wear*, 208, 177-183.
- [5] Cheng, W., H. S. Cheng, T. Mura, L. M. Keer (1994) Micromechanics modeling of crack initiation under contact fatigue, *ASME J. Tribology*, 116, 2-8.
- [6] Manson, S. (1953) "Proc. Heat Transfer Symp.", Univ. Michigan, Eng. Res. Inst., 9-75.
- [7] Tavernelli, J.F., L. F. Coffin (1959) A compilation and interpretation of cyclic strain fatigue tests on metals, *Trans. Amer. Soc. of Metals*, 51, 438-450.
- [8] Nicholas, T. J. R., J. R. Zuiker (1996) On the use of the Goodman diagram for high cycle fatigue design, *Int. J. Fracture*, 80, 219-235
- [9] Jelaska, D. (2000) Crack initiation life at combined HCF/LCF loading, *Proc. Int. Conf. Life Assessment and Management for Structural Components*, Kiev 2000, 239-246.
- [10] Ewalds, H.L., R.J. Wanhill (1989) *Fracture Mechanics*, Edward Arnold Publication, London.
- [11] ASTM E 399-80, American standard.
- [12] FRANC2D, User's Guide, Version 2.7, Cornell University.
- [13] Niemann, G., H. Winter (1983) *Maschinenelemente - Band II*, Springer Verlag.
- [14] Aberšek, B. (1993) Analysis of short fatigue crack on gear teeth, Ph.D. thesis, University of Maribor, Faculty of Mechanical Engineering, Maribor.
- [15] Bhattacharya, B., B. Ellingwood (1998) Continuum damage mechanics analysis of fatigue crack initiation, *Int. J. Fatigue*, 20, 631-639.

Naslova avtorjev: prof. dr. Srečko Glodež  
prof. dr. Jože Flašker  
dr. Janez Kramberger  
Fakulteta za strojništvo  
Univerza v Mariboru  
Smetanova 17  
2000 Maribor  
joze.flasker@uni-mb.si  
jkramberger@uni-mb.si

prof. dr. Damir Jelaska  
Fakulteta za elektrotehniko,  
strojništvo in ladjarstvo  
Univerza v Splitu  
R. Boškovića b.b.  
21000 Split, Hrvaška  
damir.jelaska@fesb.hr

Authors' Addresses: Prof. Dr. Srečko Glodež  
Prof. Dr. Jože Flašker  
Dr. Janez Kramberger  
Faculty of Mechanical Eng.  
University of Maribor  
Smetanova 17  
2000 Maribor, Slovenia  
joze.flasker@uni-mb.si  
jkramberger@uni-mb.si

Prof. Dr. Damir Jelaska  
Faculty of Electrical Eng.,  
Mech. Eng. and Naval Architecture  
University of Split  
R. Boškovića b.b.  
21000 Split, Croatia  
damir.jelaska@fesb.hr

Prejeto: 13.12.2001  
Received:

Sprejeto: 23.5.2002  
Accepted: