YU — ISSN 0039—2480

# STROJNIŠKI VESTNIK

LETNIK 22 LJUBLJANA, NOVEMBER—DECEMBER 1976 ŠTEVILKA 11—12

UDK 533.6.011:621.43:681.32

## Uporaba metode karakteristik za grafično-numerično reševanje nestacionarnih plinskih tokov pri motorjih z notranjim zgorevanjem

FERDINAND TRENC

### 1. Uvod

Kadar obravnavamo vstopne in izstopne sisteme motorjev z notranjim zgorevanjem, naletimo navadno na probleme s področja dinamike plinov. Največkrat preračunavamo in oblikujemo kanale, po katerih se pretakajo plini na osnovi stacionarnega opazovanja, prehodne pojave in vplive raznih motilnih veličin (ki se s časom spreminjajo) pa zanemarimo. Za optimalno oblikovanje cevovodov in izkoriščanje dinamičnih pojavov je potrebna analiza, pri kateri upoštevamo spremembe veličin stanja po kraju in času. Neposredno integriranje osnovnih enačb dinamike plinov je praktično nemogoče, zato rešujemo takšne probleme numerično. Po letu 1950 so izpopolnili grafično metodo karakteristik. Bistvo metode je v tem, da poiščemo družine krivulj — karakteristik sistema nelinearnih parcialnih enačb. Na ta način preidemo na sistem navadnih diferencialnih enačb. Integracijo teh enačb pa lahko izvedemo grafično ali numerično [1, 2, 3, 5]. Po letu 1970 so večje industrijske družbe izdelale nekaj obsežnih računalniških programov, ki sicer rešujejo probleme s področja plinskih tokov, vendar nam zaradi industrijske vrednosti v celoti žal niso dostopni [10]. Pri obravnavanem problemu je avtor konstruiral osnovne mreže karakteristik grafično, komplicirane robne pogoje in nekatere motilne veličine pa je reševal s hitrim digitalnim računalnikom. S tem je postopek grafične integracije, ki je izredno zamuden, precej skrajšal.

### 2. Označbe in enote

$a$ — hitrost zvoka [m/s]

$\boldsymbol{a} = \frac{a}{a_o}$ — brezdimenzijska oblika $a$ [—]

$A$ — površina prereza cevi [m²]

$c_p$ — specifična toplota pri konstantnem tlaku [J/kgK]

$c_v$ — specifična toplota pri konstantni prostornini [J/kgK]

$d$ — premer cevi [m]

$D = M\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M^2\right)^{-(\varkappa+1)/2(\varkappa-1)}$ — funkcija Machovega števila [—]

$f$ — vsota vseh prostorninskih sil trenja itd. na enoto mase [N/kgk]

$F = \frac{f \cdot l_o}{a_o^2}$ — brezdimenzijska oblika $f$ [—]

$l$ — dolžina [m]

$M$ — Machovo število toka [—]

$M_s$ — Machovo število udarnega tlačnega vala [—]

$p$ — tlak [Pa]

$P = \frac{2}{\varkappa - 1}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u}$

$Q = \frac{2}{\varkappa - 1}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{u}$

} Riemannovi spremenljivki [—]

$R$ — plinska konstanta [J/kgK]

$s$ — specifična entropija [J/kgK]

$S = \frac{s}{c_p(\varkappa - 1)}$ — brezdimenzijska oblika $s$ [—]

$t$ — čas [s]

$T$ — temperatura [K]

$u$ — hitrost toka (glede na cev) [m/s]

$\boldsymbol{u} = \frac{u}{a_o}$ — brezdimenzijska oblika [—]

$x$ — koordinata lege [m]

$\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ — razmerje specifičnih toplot [—]

$\xi = \frac{x}{L_o}$ — brezdimenzijska oblika $x$ [—]

$\varrho$ — gostota [kg/m³]

$\tau = \frac{a_o \cdot t}{L_o}$ — brezdimenzijska oblika $t$ [—]

$\psi$ — masni tok, ki izstopa skozi stene cevi (na enoto dolžine) [kg/ms]

$\Psi = \frac{L_o a_o \cdot \psi}{\varkappa \cdot A \cdot p_o}$ — brezdimenzijska oblika $\psi$ [—]

Indeksi:

o — primerjalno (referenčno) stanje

e — stanje na vstopnem (izstopnem) robu cevi

E — stanje v neposredni okolici, ki obkroža odprt konec cevi

L, D — indeks se nanaša na levo ali desno stran navidezne površine, v kateri se pojavlja nezvezna sprememba funkcije

R. V. — Riemannovi spremenljivki
Z. M. L. — zgornja mrtva lega
S. M. L. — spodnja mrtva lega
R. G. — ročična gred

Operatorji:

$$\left.\begin{aligned}\frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{D}{D\tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau} + \boldsymbol{u}\frac{\partial}{\partial \xi}\end{aligned}\right\}$$ odvod v smeri poti delca toka (substancialni odvod)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta \pm}{\delta t} &= \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a)\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\delta \pm}{\delta \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau} + (\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{a})\frac{\partial}{\partial \xi}\end{aligned}\right\}$$ odvod v smeri karakteristik

$\Delta( )$ — končna sprememba poljubne spremenljivke v smeri poti delca toka

$\Delta \pm ( )$ — končna sprememba poljubne spremenljivke v smeri karakteristik

### 3. Teoretične osnove

Pri reševanju problema pretakanja izpušnih plinov po cevi predpostavljajmo naslednje:

1. Hitrost toka $u$ in termodinamično stanje plina sta odvisna le od ene krajevne koordinate $x$ (os kanala) in časa $t$.

2. Plin, ki ga obravnavamo, se obnaša kot idealni plin; specifične toplote so konstantne. Ta predpostavka ne izključuje možnosti, da lahko opazujemo medsebojno delovanje več različnih plinov. Pri neposrednem kontaktu dveh različnih plinov se vzpostavi vmesna plast — difuzije pa ne upoštevamo.

3. Obliko kanalov oziroma cevi moramo vnaprej predpisati. Ta oblika (prerezi) se lahko spreminja po dolžini in tudi po času, vendar jo moramo predpisati eksplicitno kot funkcijo časa.

4. Predpisati moramo tudi stanje toka na iztočnem robu cevi (ali cev miruje ali pa se giblje z neko končno hitrostjo) ter časovni potek stanja toka na poljubnem mestu (npr.: tlak, hitrost itd.). Kadar želimo upoštevati še vpliv viskoznih sil in izmenjave toplote, moramo izraziti v primerni obliki tudi te.

Problem je rešen takoj, ko v vseh točkah poznamo stanje plina. To stanje določajo dve veličini stanja in hitrost toka. Glede na obliko enačb izberemo naslednje tri odvisne spremenljivke:

$u$ — hitrost toka (relativno glede na kanal),
$a$ — lokalno hitrost zvoka,
$s$ — specifično entropijo.

Metodo karakteristik poenostavimo tako, da uvedemo brezdimenzijske veličine. Te dobimo tako, da absolutne vrednosti delimo z neko izbrano primerjalno hitrostjo zvoka (npr. okolice).

Osnovne enačbe, iz katerih izhajamo, so: kontinuitetna in gibalna enačba ter enačba spremembe entropije za termodinamično povračljiv proces. Te enačbe izrazimo z izbranimi odvisnimi spremenljivkami $a$ in $s$ namesto tlaka $p$ in gostote $\varrho$ [1, 2, 3]. Enačbe potem spremenimo v uporabnejšo obliko s tem, da uvedemo Riemannovi spremenljivki [1, 2, 3] $P$ in $Q$, ki sta definirani takole:

$$P = \frac{2}{\varkappa - 1}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u} \tag{3.1}$$

$$Q = \frac{2}{\varkappa - 1}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{u} \tag{3.2}$$

Končna oblika parcialnih diferencialnih enačb pa se glasi

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{a})\frac{\partial P}{\partial \xi} = -\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}\frac{\partial \ln A}{\partial \xi} - \boldsymbol{a}\frac{\partial \ln A}{\partial \tau} + \tag{3.3}$$
$$+ \boldsymbol{a}\frac{\delta + S}{\delta \tau} + (\varkappa - 1)\boldsymbol{a}\frac{DS}{D\tau} + F - \Psi \boldsymbol{a}^{(\varkappa-3)/(\varkappa-1)}\, e^{\varkappa S}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{a})\frac{\partial Q}{\partial \xi} = -\boldsymbol{a}\boldsymbol{u}\frac{\partial \ln A}{\partial \xi} - \boldsymbol{a}\frac{\partial \ln A}{\partial \tau} + \tag{3.4}$$
$$+ \boldsymbol{a}\frac{\delta - S}{\delta \tau} + (\varkappa - 1)\boldsymbol{a}\frac{DS}{D\tau} - F - \Psi \boldsymbol{a}^{(\varkappa-3)/(\varkappa-1)}\, e^{\varkappa S}$$

Ker imamo opravka s tremi odvisnimi spremenljivkami $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{u}$ in $s$, potrebujemo še tretjo enačbo. To enačbo nam podaja stanje entropije, ki ga moramo predpisati za vsak problem posebej, in ga v splošni obliki zapišemo takole:

$$\frac{DS}{D\tau} = F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}, S, \xi, \tau) \tag{3.5}$$

Enačbe (3.3), (3.4) in (3.5) pomenijo osnovo za numerično reševanje plinsko-dinamičnih problemov. Kažejo, kako se parametri $P$, $Q$ *in* $S$ spreminjajo v ravnini — vzdolž krivulj, za katere veljajo enačbe

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{a} \quad \text{za } P \text{ — valove} \tag{3.6}$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{a} \quad \text{za } Q \text{ — valove} \tag{3.7}$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \boldsymbol{u} \quad \text{za } S \tag{3.8}$$

Te krivulje so karakteristike osnovnih parcialnih diferencialnih enačb. Zato imenujemo krivulje, ki tečejo v smeri $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{a})$ $P$-valove, tiste, ki tečejo v smeri $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{a})$ imenujemo $Q$-valove, krivulje v smeri $\boldsymbol{u}$ pa so seveda poti delcev toka.

Diagram $\xi$, $\tau$, v katerem so narisane karakteristike, imenujemo diagram karakteristik ali valovni diagram.

Členi desnih strani enačb (3.3) in (3.4) pomenijo najrazličnejše vplive, ki jih za podan problem predpišemo. Te so (gledano po členih od leve proti desni): sprememba prereza kanala po dolžini, sprememba prereza cevovoda po času, vpliv spremembe entropije, prostorninskih in tornih sil ter vpliv tokovnih odcepov (izviri in ponori).

Levi strani enačb (3.3) in (3.4) sta nelinearni, rešitev pa ponazarja širjenje valov s končno amplitudo.

Za lažje razumevanje si predstavljajmo izentropen tok v cevi s konstantnim prerezom; takrat sta desni strani enačb enaki nič:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} + (u + a)\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \qquad (3.9)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + (u - a)\frac{\partial Q}{\partial \xi} = 0 \qquad (3.10)$$

Ker sta parametra $P$ in $Q$ funkciji kraja in časa, lahko še zapišemo

$$\mathrm{d}P = \frac{\partial P}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi + \frac{\partial P}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau \qquad (3.11)$$

$$\mathrm{d}Q = \frac{\partial Q}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi + \frac{\partial Q}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau \qquad (3.12)$$

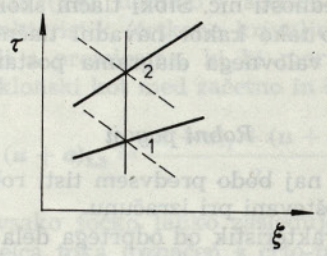
Če še predpostavimo, da se neka motnja širi s hitrostjo $(u + a)$ tako, da je razmerje $\mathrm{d}\xi$ po $\mathrm{d}\tau$ v enačbi (3.11) enako $(u + a)$, opazimo pri primerjavi enačb (3.9) in (3.11), da prirastek $P$ izgine. Prav tako ostane vrednost $Q$ pri širjenju s hitrostjo $(u - a)$ nespremenjena.

V primeru enačb (3.9) in (3.10) sta vrednosti $P$ in $Q$ konstantni, $P$ in $Q$ valovi pa sestavljajo dve družini vzporednih premic. Takoj pa, ko se pojavijo kakšne motilne veličine, se karakteristike upognejo. Vsako sečišče $P$ in $Q$ vala pomeni točko, v kateri lahko izračunamo veličine stanja in hitrost toka. Iz vrednosti $P$ in $Q$ v vsakokratnem sečišču izračunamo — iz enačb (3.1) in (3.2) — vrednosti $u$ in $a$, iz hitrosti zvoka pa nato še tlak in gostoto toka za točko, ki je določena po kraju in času [1, 2].

### *Tipi tlačnih valov*

Opazujmo zopet izentropni tok v cevi s konstantnim prerezom. V tem primeru so veličine stanja in hitrost toka konstantne prek vsega valovnega diagrama, karakteristike pa so premice. Nekje na levi strani diagrama povzróčimo motnjo, ki se širi z različnimi vrednostmi karakteristik ($P$-valov) proti desni — nemotenemu mediju. Karakteristike, ki prihajajo z leve strani ($Q$-valovi), ostanejo še naprej konstantne zaradi predpostavke, da na desnem robu cevi nimamo izvira motenj. Vrednost $P$ se sicer po času spreminja, vzdolž ene $P$-karakteristike pa ostane konstantna (lastnost karakteristik [1, 2, 3]). Torej sta tudi vrednosti $u$ in $a$ (iz enačb (3.1) in (3.2)) vzdolž $P$-vala konstantni. Iz tega izhaja sklep, da imajo motilni valovi (elementarni valovi, ki sestavljajo nek končno velik tlačni val), ki se širijo v nemoteno področje toka, karakteristike, ki ostanejo premice.

Tlačni val, ki potuje po cevi, lahko povzroči lokalno povišanje ali znižanje tlaka. Prvo vrsto valov imenujemo kompresijske, drugo pa ekspanzijske valove. Opazujmo najprej ekspanzijski *P-val*, ki se širi v nemoten medij. Ker tlak (motnja) v izviru upada, se manjša tudi lokalna hitrost zvoka (glej sliko 3.S.1).




Sl. 3.S.1. *Prikaz ekspanzijskega vala v diagramu valov*

Torej velja

$$a_2 < a_1$$

$$Q_2 = Q_1 \rightarrow \frac{2}{\varkappa - 1}a_2 - u_2 = \frac{2}{\varkappa - 1}a_1 - u_1$$

Takoj vidimo, da velja tudi $u_2 < u_1$ in $(u_2 + a_2) < (u_1 + a_1)$ ter $P_2 < P_1$. Vrednost $P$ se torej z nižanjem tlaka manjša, naklon $P$-vala $(u + a)$ — po enačbi (3.6) — se v diagramu valov veča. Karakteristike pri ekspanzijskih valovih divergirajo, pri kompresijskih (podobno izvajanje) konvergirajo, vrednosti $P$ pa naraščajo. Včasih se lahko karakteristike iste družine srečajo (zaradi konvergence). V stični točki se vrednosti Riemannovih spremenljivk (R. V.) nezvezno (skokoma) spremenijo in takrat govorimo o tlačnem skoku.* Pojavljanje več vrednosti $P$ v eni točki onemogoča nadaljnje širjenje valovnega diagrama. Zato moramo v izračun vključiti enačbe oziroma pogoje, ki ustrezajo tlačnim skokom. Teorija pravokotnih tlačnih skokov je obširno razložena v mnogih delih [1, 2, 3, 4, 5, 12] in bi omenili le glavne značilnosti, ki se pojavljajo pri praktičnem reševanju tokovnih problemov. Videli smo, da mora tok plina zadoščati kontinuitetni, gibalni in energijski enačbi in da je v kanalu s konstantnim prerezom stacionarni tok izentropen. Sedaj opazujmo tok, kjer se bodo veličine skokoma spreminjale, upoštevali pa bomo še izgube energije (pri naraščanju entropije). Ker tudi tlačni skok potuje po cevi, vpeljemo poleg lokalnega Machovega števila toka pred in po udaru še udarno Machovo število. Vse spremembe veličin

* V anglosaški literaturi jih imenujejo »*Shock Waves*«.

lahko izrazimo kot funkcijo Machovega števila tlačnega udara, enačbe, ki to izražajo, pa Rankine-Hugoniotove enačbe. Tudi entropijska razlika je funkcija Machovega števila in opazimo, da je mogoč samo primer, ko je $M_s > 1$ [2, 4], ker daje pozitivno spremembo entropije: $\Delta s > 0$. Iz tega izhaja še sklep, da so mogoči le kompresijski tlačni skoki, ekspanzijski pa ne [2, 4]. Pri šibkih tlačnih skokih do tlačnega razmerja $p_2/p_1 = 1{,}5$ [1, 3] je sprememba entropije zanemarljivo majhna in lahko take skoke obravnavamo kot navadne tlačne valove. Sprememba entropije je namreč funkcija izraza $(M_s^2 - 1)^3$ in pri približevanju $M_s$ vrednosti 1 se $\Delta s$ približuje vrednosti nič. Šibki tlačni skoki se obnašajo približno tako kakor navadni tlačni valovi in konstrukcija valovnega diagrama postane preprostejša.

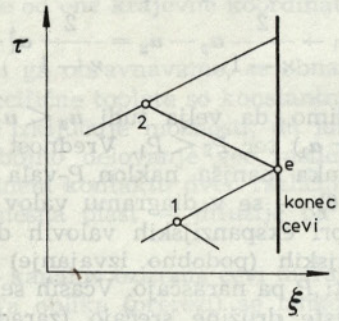
*Robni pogoji*

Omenjeni naj bodo predvsem tisti robni pogoji, ki so bili upoštevani pri izračunu.

Odboj karakteristik od odprtega dela cevi:

a) Iztok iz cevi

Nasploh lahko $P$ ali $Q$ val dosežeta konec cevi (glede na to, ali mislimo na desni ali levi konec kanala).




Sl. 3.S.2. *Odboj karakteristike od konca cevi*

Zopet imamo opravka z izentropnim tokom v cevi s konstantnim prerezom. Vrednost $P$ ostane zato konstantna, v točki 1 (slika 3. S.2) pa poznamo vse spremenljivke. Izračunati želimo neznanke na robu cevi — v točki »e«; prvo enačbo daje znana vrednost $P$:

$$P_e = P_1 + \Delta \pm P = \frac{2}{\varkappa - 1} a_e + u_e \qquad (3.13)$$

drugo enačbo pa določa stanje toka na robu (robni pogoj). Najpreprosteje je, če podamo na robu cevi tlak oziroma lokalno hitrost zvoka in potem iz enačbe (3.13) izračunamo še hitrost toka $u$.

b) Neizentropno vtekanje

Kljub pravilno oblikovanemu vtočnemu ustju cevi se tokovnice ločijo od stene cevi. Vzpostavi se stacionarni vrtinec, ki prisili dotekajoči medij, da se stisne. Čez nekaj časa se tok zopet razširi po celotnem prerezu cevi. Tak proces ni izentropen. Za izračun predpostavimo, da se tok v istem prerezu zoži in razširi. Indeks »e« ustreza sedaj stanju, ko tok ponovno zapolni celotni prerez cevi. Energijska enačba

$$u_e^2 + \frac{2}{\varkappa - 1} a_e^2 = \frac{2}{\varkappa - 1} a_E^2 \qquad (3.14)$$

ter znana vrednost R. V. vala, ki se širi h koncu cevi, nam dasta enaki vrednosti za $a_e$ in $u_e$, kakor če bi bil tok izentropen.

$$P_e = \frac{2}{\varkappa - 1} a_e + u_e \qquad (3.15)$$

V primeru neizentropnega toka, morajo karakteristike prepotovati področje, ki ima spremenjeno entropijo, preden dosežejo konec cevi. Ta sprememba vpliva na spremembo R. V. in nazadnje na vrednost vtočne hitrosti toka. Entropijsko razliko $S_e - S_E$ lahko izračunamo po eksperimentalno določenih podatkih. Če uporabimo gibalno enačbo in definicijo zastojne temperature, dobimo izraz, ki nam rabi za izračun entropijske razlike [1]

$$S_e - S_E = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{1 + \varkappa M_e^2}{(1 + (\varkappa - 1)/2 \,.\, M_e^2)^{\varkappa/(\varkappa-1)}} \qquad (3.16)$$

V točki »e« na sl. 3.5.2 spremeni tok smer; govorimo o vtoku. $P_e$ ni več enak $P_1$, ker se je spremenila entropija, izračunati pa ga ne moremo, ker $S_e$ še ne poznamo. Postopek za izračunavanje je iterativen; najprej postavimo $P_e = P_1$, izračunamo iz enačb (3.14) in (3.15) $a_e$ in $u_e$ in iz enačbe (3.16) še entropijsko razliko. Tokove, pri katerih ohrani vsak delec konstantno vrednost entropije, različni delci toka pa imajo lahko različne vrednosti entropije, imenujemo multiizentropne in jih matematično formuliramo takole

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

Za takšne tokove velja — po enačbah (3.3) in (3.4):

$$\Delta P = a \,.\, \Delta \pm S \qquad (3.17)$$

Vrednost R. V. je sedaj takšna:

$$P_e = P_1 + \Delta P$$

Postopek ponavljamo toliko časa, da se $P$ oziroma $P_e$ ne spreminjata več.

*Nenadna sprememba prereza cevi*

Tudi ta primer je zanimiv, ker lahko zvezno razširitev oziroma zožitev cevi nadomestimo z več nezveznimi odseki. Če je teh odsekov zadosti, se lepo približamo zveznim spremembam prereza. Pri

motorjih z notranjim zgorevanjem se najpogosteje pojavlja primer, ko je na obeh straneh nezvezne spremembe prereza podzvočni tok. S kombinacijo energijske in kontinuitetne enačbe v obliki

$$u_L^2 + \frac{2}{\varkappa - 1} a_L^2 = \frac{2}{\varkappa - 1} a_L^2 \left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M_L^2\right) = \frac{2}{\varkappa - 1} a_D^2 \left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M_D^2\right) \tag{3.18}$$

in

$$a_L^{2/(\varkappa-1)} A_L u_L = a_L^{(\varkappa+1)/(\varkappa-1)} A_L \,.\, M_L = a_D^{(\varkappa+1)/(\varkappa-1)} A_D \,.\, M_D \tag{3.19}$$

dobimo:

$$A_L \frac{M_L}{(1 + (\varkappa - 1)/2 \,.\, M_L^2)^{(\varkappa+1)/2(\varkappa-1)}} = A_L \,.\, D_L = A_D \,.\, D_D \tag{3.20}$$

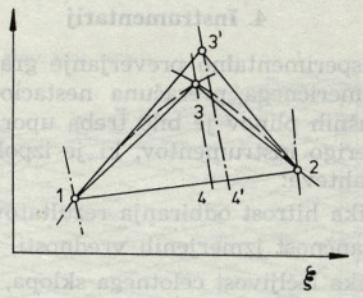
»$D$« je funkcija Machovega števila toka. Numerično rešimo problem z iteracijo na hitrem digitalnem računalniku [14]. Najprej predpostavimo hitrost zvoka na levi strani nezvezne spremembe prereza $a_L$ in iz znane vrednosti $P_L$ izračunamo še $u_L$ in $M_L$. Za znane $M_L$, $A_L$ in $A_D$ izračunamo z iteracijo $M_D$. Z znanim $M_D$ pa dobimo iz enačbe (3.18) $a_D$, iz $a_D$ in $M_D$ pa še $u_D$. Prednost uporabe računalnika se je pokazala predvsem pri primeru, ko smo imeli v cevi vgrajeno zaslonko (nenadna zožitev cevi), za zaslonko pa se je cev zopet razširila. Na levi strani neznanih sprememb smo poznali vrednost $P_L$, na desni pa $Q_D$. Celotni iterativni postopek uporabimo najprej pri prehodu z večjega prereza na manjšega in potem z majhnega na večjega, končne vrednosti na desni strani nezveznosti pa so se morale ujemati z vrednostjo $Q_D$. Podobno izračunamo tudi prehod tlačnih skokov skozi difuzor oziroma šobo.

Poleg opisanih tokovnih problemov obravnavamo še: križanje dveh tlačnih skokov, delni odboj tlačnega skoka od zaslonke, odboj tlačnega skoka od odprtega iztočnega ustja cevi ipd. [1, 2, 3].

*Konstrukcija valovnega diagrama*

V začetku je bilo že omenjeno, da lahko rešimo sistem parcialnih diferencialnih enačb (3.3), (3.4) in (3.5) le numerično. Skozi vsako točko diagrama valov teče po ena krivulja vsake družine karakteristik. Te krivulje nadomestimo z ravnimi odseki, ki segajo od točke do točke in imajo v splošnem različne naklonske kote, $\Delta_+ P$, $\Delta_- Q$ in $\Delta S$ pa pomenijo majhne spremembe R. V. vzdolž karakteristik.

Na sliki 3.S.3 vidimo točki 1 in 2 in za ti dve točki poznamo vrednosti $u$, $a$ in $S$. S tem lahko izračunamo (iz enačb (3.1 in 3.2)) vrednosti R. V.: $P_1$, $Q_1$, $P_2$, $Q_2$. Ko potegnemo $P$-val iz točke 1 in $Q$-val iz točke 2 z nakloni, ki ustrezajo enačbam




Sl. 3.S.3. *Določitev nove točke v diagramu valov*

(3.6), (3.7) in (3.8), dobimo v sečišču točko 3. Namesto karakteristik (črtkane krivulje) smo odseka nadomestili s premicama, ki bi morali imeti nek srednji naklonski kot med začetno in končno točko:

$$(u + a)_{1,3} = \frac{(u + a)_1 + (u + a)_3}{2}$$

Skozi vsako točko lahko zasledujemo tudi pot vsakega delca toka (označen s črto-piko-črto). Pot delca skozi točko 3 določa na presečišču zveznice $\overline{12}$ točko 4. Stanje toka v točki 4 dobimo z interpolacijo, točke 3 pa z upoštevanjem motilnih veličin v enačbah (3.3), (3.4) in (3.5)

$$P_3 = P_1 + \Delta_+ P = P_1 + \left(\frac{\delta + P}{\delta \tau}\right)_{1,3} (\tau_3 - \tau_1) \tag{3.21}$$

$$Q_3 = Q_2 + \Delta_- Q = Q_2 + \left(\frac{\delta - Q}{\delta \tau}\right)_{2,3} (\tau_3 - \tau_2) \tag{3.22}$$

$$S_3 = S_4 + \left(\frac{\mathrm{D}\, S}{\mathrm{D}\, \tau}\right)_{3,4} (\tau_3 - \tau_4) \tag{3.23}$$

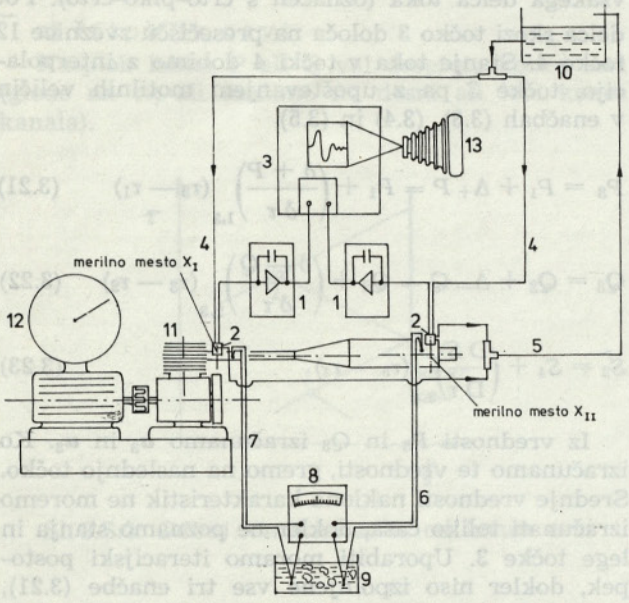
Iz vrednosti $P_3$ in $Q_3$ izračunamo $a_3$ in $u_3$. Ko izračunamo te vrednosti, gremo na naslednjo točko. Srednje vrednosti naklona karakteristik ne moremo izračunati toliko časa, dokler ne poznamo stanja in lege točke 3. Uporabiti moramo iteracijski postopek, dokler niso izpolnjene vse tri enačbe (3.21), (3.22) in (3.23). Natančnost metode karakteristik je odvisna predvsem od števila korakov (gostote računske mreže). Nenatančnosti, ki jih uvajamo zaradi končnega števila korakov, izhajajo iz dejstva, da nadomestimo karakteristike s kratkimi odseki premic. Naklonski koti teh premic ustrezajo (zaradi poenostavitve) izhodiščni — začetni točki, ne pa poprečju med začetno in končno točko. Tako je velikost napake lege posameznih točk v mreži določena s kvadratom dolžine odseka (v Taylorjevi vrsti smo upoštevali samo konstanto in linearni člen). To napako zmanjšamo na velikost člena s tretjo potenco, če po iterativnem postopku določimo poprečni naklonski kot posameznih odsekov. Pri uporabi računalnika je prav, da določimo optimalno gostoto mreže; pri pretiranem zgoščevanju mreže se pokaže vpliv napake zaradi zaokroževanja.

## 4. Instrumentarij

Za eksperimentalno preverjanje grafičnega oziroma numeričnega preračuna nestacionarnega iztoka izpušnih plinov je bilo treba uporabiti takšno merno verigo instrumentov, ki je izpolnjevala naslednje zahteve:

1. velika hitrost odbiranja rezultatov,
2. natančnost izmerjenih vrednosti,
3. velika ločljivost celotnega sklopa,
4. možnost spreminjanja geometrije cevi,
5. odpornost tipal za merjenje tlakov proti visokim temperaturam in agresivni atmosferi.

Tem zahtevam lahko ugodimo, če uporabimo piezomerilno tehniko [18, 19]. Piezo-tipala za merjenje dinamičnih tlakov imajo naslednje dobre lastnosti: linearno karakteristiko, visoko lastno frekvenco, veliko ločljivost, široko uporabno področje glede na visoke temperature. Shemo merne verige, ki je bila uporabljena pri eksperimentalnem delu, vidimo na sliki 4.S.1.




Sl. 4.S.1. *Shema preizkusa*

1 — nabojni ojačevalnik, 2 — tipalo za merjenje tlakov, 3 — osciloskop, 4 — dotok vode za hlajenje tlačnih tipal, 5 — odtok vode za hlajenje tlačnih tipal, 6, 7 — termoelementa NiCr-Ni za merjenje temperatur izpušnih plinov, 8 — kazalni instrument (milivoltmeter) za odbiranje temperatur, 9 — hladna točka — voda z ledom, 10 — rezervoar vode za hlajenje tlačnih tipal, 11 — preizkusni enovaljni, dvotaktni, bencinski motor, 12 — elektrodinamična zavora, 13 — fotografski aparat.

## 5. Eksperimentalni postopek

Eksperimentalno napravo je sestavljala pločevinasta cev, kateri se je lahko zvezno spreminjala dolžina. Cev so sestavljali naslednji odseki (od izpušne rege motorja naprej): ravna cev z relativno majhnim premerom, difuzor s kotom odprtja 6° [3], ravni del cevi z možnostjo spreminjanja dolžine in večjim premerom, zaslonka ter krajši — končni del cevi. Skico celotne cevi lahko vidimo na diagramu valov, slika 5.S.1.

Prvo tipalo za merjenje tlakov je bilo vgrajeno na začetku cevi (merilno mesto $X_I$), drugo pa v bližini zaslonke (mesto $X_{II}$). Tako je bilo mogoče dobiti v vsakem trenutku potek tlakov na dveh mestih, ki sta bili precej odmaknjeni eno od drugega. Ob tlačnih tipalih so bili še merilniki temperature izpušnih plinov, s katero je bilo mogoče oceniti prenos toplote v okolico ter določiti začetne pogoje in primerjalno vrednost hitrosti zvoka za celoten izračun nestacionarnega toka plinov. Zaslon osciloskopa je pri določeni dolžini cevi in določenem režimu motorja (obremenitev in vrtilna hitrost) pokazal hkrati potek tlakov na dveh mestih v cevi. S ploščo, ki je bila pritrjena na gred motorja in je imela izrezane radialne špranje na mestih, ki so ustrezali ZML, SML, začetku odpiranja in koncu zapiranja izpušne rege, je bila določena natančna (časovna) lega tlačnih potekov. Pri prehodu radialne špranje skozi svetlobno občutljiv element, je osciloskop registriral impulz, ki je določal časovni potek tlakov.

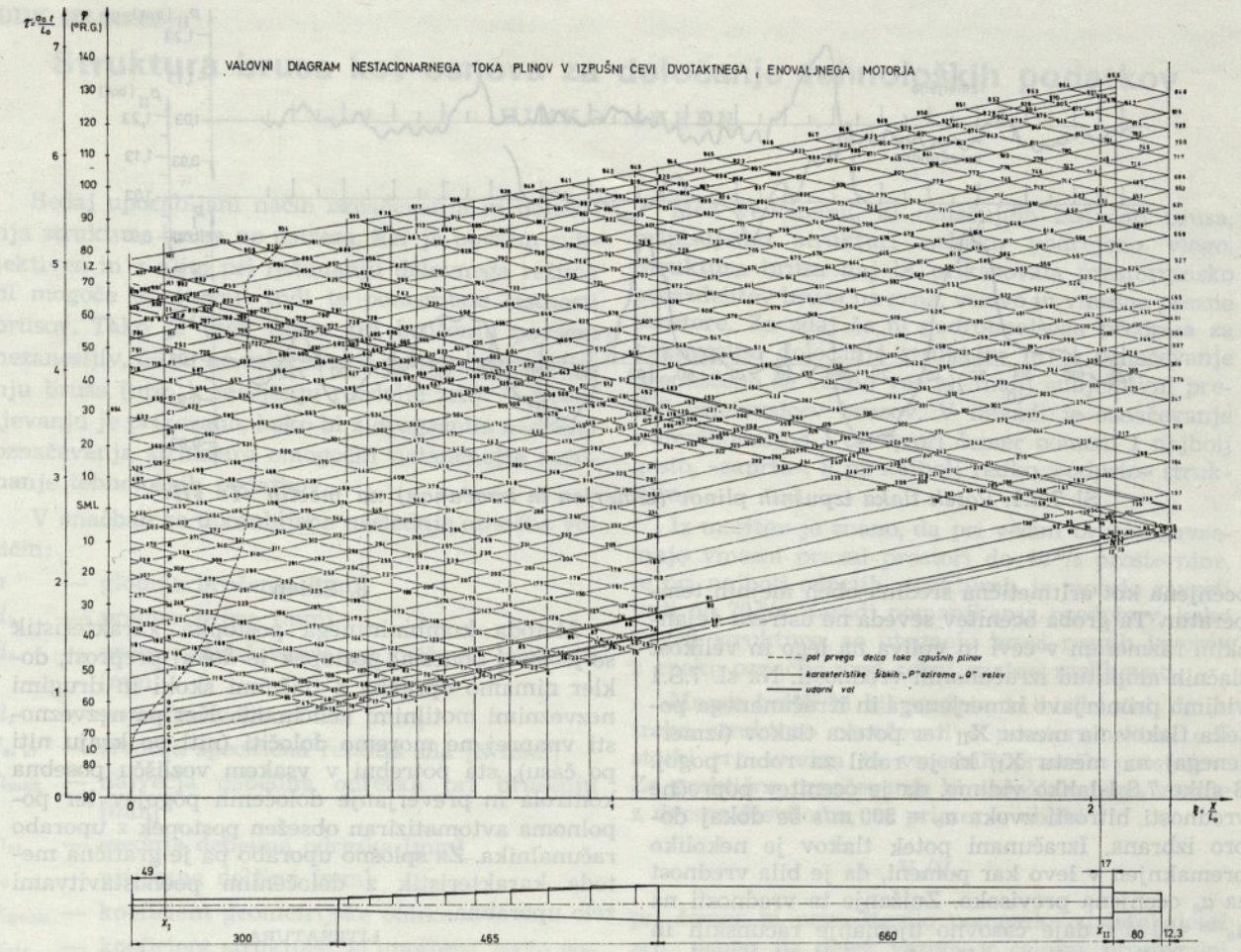
Časovni potek tlakov na mestu $X_I$ je rabil kot robni pogoj. Za določeno vrednost tlaka in temperature (poprečne) je bilo mogoče z numerično-grafično metodo karakteristik izdelati celotno mrežo stanj v odvisnosti od dolžine cevi ($\xi$) in časa ($\tau$). Pri tem so se pojavili razni specifični problemi medsebojnega vpliva tlačnih valov, kakršni so na primer: difuzor [1, 2, 3], nastanek tlačnih skokov [1, 2, 3, 4, 5, 9, 12], križanje dveh tlačnih skokov [1, 2], odboj in prehod tlačnega skoka skozi zaslonko itd. En računski primer za določeno stanje motorja: $n = 3500$ vrt/min, resonančna dolžina $l = 1517$ mm, 50 % obremenitve lahko vidimo na sliki 5.S.1. Večina motilnih veličin, ki so bile omenjene in so rešljive z iteracijskim postopkom, so bile izračunane z digitalnim računalnikom [14].

Iz celotnega izračuna ene izpušne periode je izhajal tudi izračunani potek tlaka na mestu $X_{II}$ za različne čase. Namen preizkusa je bil ta, da primerjamo potek tlakov na mestu $X_{II}$, ki smo ga izmerili, s tistim, ki smo ga izračunali. Rezultat je seveda relativno uspešnejši, če dobimo količinsko boljše rezultate pri daljši cevi, kajti takrat je število elementov oziroma točk v računski mreži veliko večje.

## 6. Pregled rezultatov

Lego točk, za katere so bile izračunane vrednosti hitrosti toka in veličin stanja, najdemo v diagramu valov, vrednosti pa so navedene v tabeli 1. Zaradi velikega števila točk navaja tabela samo obliko in nekaj točk s količinskimi rezultati.

Kot izhodiščni podatki so bili uporabljeni tlaki na mestu $X_I$ in poprečna temperatura izpušnih plinov ($a_0 = 500$ m/s). Vzeto je bilo, da je hitrost pli-




Sl. 5.S.1. *Valovni diagram nestacionarnega toka plinov v izpušni cevi dvotaktnega, enovaljnega motorja*

*Tabela 1*

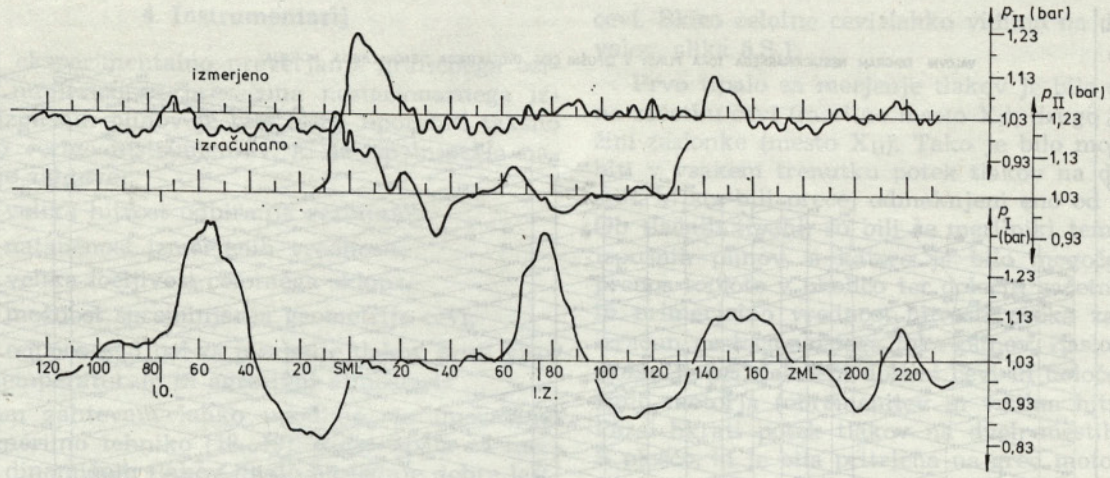
| Št. mesta | $P$ | $Q$ | $u$ | $a$ | $u+a$ | $u-a$ | $\frac{p}{p_0}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 6,072 | 6,000 | 0,036 | 1,006 | 1,042 | 0,970 | 1,053 |
| 1 | 6,072 | 6,000 | 0,036 | 1,006 | 1,042 | 0,970 | 1,049 |
| 2 | 6,065 | 6,000 | 0,033 | 1,004 | 1,037 | 0,971 | 1,032 |
| 3 | 6,059 | 6,000 | 0,029 | 1,004 | 1,033 | 0,975 | 1,032 |
| 4 | 6,053 | 6,000 | 0,026 | 1,003 | 1,029 | 0,977 | 1,024 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

nov v cevi, preden se odpre izpušna rega, enaka nič. S tema podatkoma je določena vrednost $Q_0$ za tok pred začetkom izpušne periode. Za $P$-valove se vrednost $Q$ ne spreminja, torej velja $Q = Q_0$ (poglavje št. 3). Ker poznamo tlak oziroma hitrost zvoka za točko A ter vrednost $Q_A = Q_0$, lahko določimo v tej točki tudi hitrost toka. Do točke 2, kjer še ni vpliva difuzorja, ostane vrednost $P$ vzdolž karakteristike konstantna. Za točko 1 velja torej: $P_1 = P_A$ in $Q_1 = Q_2$. Točka 2 pa pade že v področje difuzorja in upoštevati moramo korekcijo R. V., ki je podana s prvim členom desnih strani enačb (3.3) in (3.4). Točki 12 in 13 ležita levo in desno od zaslonke. Za izračun je bil uporabljen računalniški program »SPRNN« [14]. Za izračun tlačnih skokov so bile uporabljene že izdelane tabele [1] oziroma računalniški program »PQUD« [14].

S pomočjo tabele izračunanih vrednosti in valovnega diagrama je mogoče odbrati lego in z interpolacijo določiti tudi velikost tlakov na mestu $X_{II}$. Primer: točka na mestu $X_{II}$ je v času, ki ustreza zavrtitvi 33° R. G. po S. M. L. določena z interpolacijo vrednosti $P_{245}$ in $P_{274}$ ter $Q_{274}$.

## 7. Razmišljanja o rezultatih

Praktični preizkus je bil izveden v relativno dolgi cevi, zato je zaradi odvoda toplote padla poprečna temperatura izpušnih plinov od mesta $X_I$ do $X_{II}$ za približno 300 °C. Ker prenos toplote pri izračunu ni bil upoštevan, je bila poprečna temperatura izpušnih plinov v cevi (v prvem približku)




Sl. 7.S.1. *Potek tlaka izpušnih plinov (izmerjen in izračunan) na mestih »I« »II«*

ocenjena kot aritmetična sredina obeh mejnih temperatur. Ta groba ocenitev seveda ne ustreza dejanskim razmeram v cevi in vpliva na lego in velikost tlačnih amplitud izračunanih vrednosti. Na sl. 7.S.1 vidimo primerjavo izmerjenega in izračunanega poteka tlakov na mestu $X_{II}$ ter poteka tlakov (izmerjenega) na mestu $X_I$, ki je rabil za robni pogoj. S slike 7.S.1 lahko vidimo, da je ocenitev poprečne vrednosti hitrosti zvoka $a_0 = 500$ m/s še dokaj dobro izbrana. Izračunani potek tlakov je nekoliko premaknjen v levo kar pomeni, da je bila vrednost za $a_0$ ocenjena previsoko. Znižanje te vrednosti na $a_0 = 480$ m/s daje časovno ujemanje računskih in izmerjenih rezultatov. Zaradi nadaljnjih raziskav, ki jih bomo opravljali na zelo kratkih, toplotno izoliranih kanalih (približno 10-krat krajših od opisane cevi), je vstopna temperatura izpušnih plinov praktično tudi poprečna za celotno dolžino kanala. Upoštevanje prenosa toplote je v tem primeru zaradi zamotanega problema nepotrebno.

Poglejmo še amplitude izmerjenih in izračunanih tlakov na mestu $X_{II}$. Amplitude so pri izračunanih vrednostih nekaj večje in bolj »naznačene«. Vzroki za to so:

a) število valov oziroma točk v mreži je končno;

b) če bi upoštevali trenje, bi bili valovi amplitud položnejši in manj izraziti;

c) zaradi končne lastne frekvence tlačnih tipal in tanjših sledi žarkov na osciloskopu, sta bila vstavljena nabojni ojačevalnik in nizkopasovni filter z mejno frekvenco 6 kHz, kar je uporabni signal prav gotovo nekoliko izravnalo;

d) domneva, da je hitrost toka v cevi, tik preden se odpre izpušna rega, enaka nič, ni popolnoma upravičena (hitrost toka ima takrat neko zelo majhno vrednost, ki pa lahko deloma vpliva na rezultat);

e) nazadnje so pri izračunu približno tisoč vozlišč vključene tudi naključne napake.

## 8. Sklep

Metoda kombiniranega postopka karakteristik se je torej obnesla; postopek je dokaj preprost, dokler nimamo opravka s tlačnimi skoki in drugimi nezveznimi motilnimi veličinami. Ker pa nezveznosti vnaprej ne moremo določiti (niti po kraju niti po času), sta potrebni v vsakem vozlišču posebna kontrola in preverjanje določenih pogojev ter popolnoma avtomatiziran obsežen postopek z uporabo računalnika. Za splošno uporabo pa je grafična metoda karakteristik z določenimi poenostavitvami zelo uporabna.

LITERATURA

[1] Rudinger, G., Wave Diagrams for Nonsteady Flow in Ducts, D. van Nostrand, New Yvrk, 1955.

[2] Kantrowitz, A., One-Dimensional Treatment of Nonsteady Gas Dynamics, High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Princeton University Press, New Jersey, 1958.

[3] Seifert, H., Instationäre Strömungsvorgänge in Rohrleitungen an Verbrennungskraftmaschinen, Springer-Verlag, Berlin, 1962.

[4] Liepmann, H. W., Pucket, A. E., Introduction to Aerodynamics of a Compressible Fluid, John Wiley & Sons, New York, 1954.

[5] Haller, P.: Ueber eine graphische Methode der Gasdynamik, Technische Rundschau Sulzer, No. 1, 1945 (S. 6—24).

[6] Berchtold, M.: Druckwellenaufladung für kleine Fahrzeug-Dieselmotoren, Schweizerische Bauzeitung, Heft 46, November 1961.

[7] Wadman, B. W.: Advances With Comprex for Supercharging High Speed Diesels, Diesel and Gas Turbine Progress, Oktober 1970.

[8] Berchtold, M.: Zur Entwicklung der instationären Gasdynamik, Schweizerische Bauzeitung, Heft 28, 16 Juli 1960 (S. 463—468).

[9] Burri, H.: Nonsteady Aerodynamics of the Comprex Supercharger, ASME, Presentation Gas Turbine Conference, Washington, 1958.

[10] Zehnder, G.: Berechnung von Druckwellen in der Aufladetechnik; Berechnungsmethoden der instationären Gasdynamik, Brown Boveri Mitteilungen, 4/5, 1971.

[11] Trenc, F.: Letno poročilo o delu na raziskovalni nalogi: Emisija okolju škodljivih snovi dvotaktnega motorja male delovne prostornine z izpušnimi plini II. del/2; poglavje: diskusija o vplivu oblike izpušne cevi na potek izmenjave delovne snovi in zasnova novega izpušnega sistema, 1974.

[12] Shih-I Pai: Introduction to the Theory of Compressible Flow, D. Van Nostrand Co., New York, 1959.

[13] Trenc, F.: Sodobne merilne naprave in metode pri raziskavah na motorjih in vozilih, seminar, Fakulteta za strojništvo v Ljubljani, slovenska podružnica JUMV, 1975.

[14] Trenc, F.: Magistrska naloga, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 1975.

Avtorjev naslov: Mag. ing. Ferdinand Trenc,
Fakulteta za strojništvo
Univerze v Ljubljani