UDK 539.375.5

Določanje koeficientov intenzivnosti napetosti na miniračunalniku po metodi končnih elementov

JOŽE FLAŠKER — ANTON JEZERNIK

1. UVOD

Ob vrhu razpoke v zobnem korenu zobnika želimo določiti napetostno in deformacijsko stanje. To stanje lahko dobro opišemo, če poznamo koeficiente intenzivnosti napetosti (KIN).

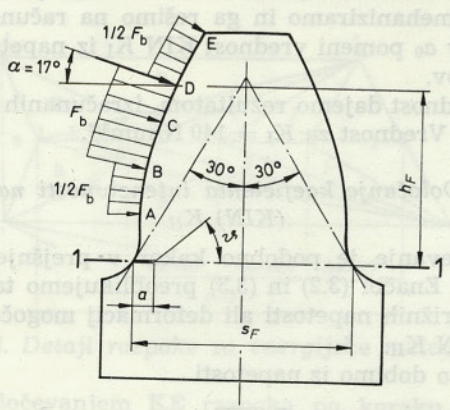
Določimo jih numerično na miniračunalniku ISKRA/DELTA po metodi končnih elementov (MKE) po treh različnih metodah.

Te metode so ekstrapolacija ali mejni prehod, energijska metoda in metoda integrala J. Na podlagi znanih KIN in znanega razmerja med K_I in K_{II} lahko določimo smer širjenja razpoke. Izpopolnjen program pa omogoča tudi določanje območja plastičnosti.

2. PREDMET RAZISKAVE

Izberemo valjasto evolventno zobniško dvojico s številom zob z_1, z_2, standardnim modulom m_n, koeficientom premaknitve osnovnega profila x, temenskim razstopom c in nagibnim kotom standardnega profila α_n. Za izbrano zobniško dvojico grafično določimo ubirnico 1, ubirne točke A, B, C, D, E, velikost premera v zobnem korenu in velikost ročice, na kateri deluje zobna sila [1]. V prerezu 1 — 1 napravimo razpoko z dolžino a (sl. 1).

Silo, od katere je odvisno napetostno in deformacijsko stanje, imenujemo zobno silo F_b. Najneugodnejše delovanje sile je, ko deluje v ubirni točki D [1], pod kotom α, odvisna pa je od relativnega gibanja zobniške dvojice in lege točke D na ubirnici oziroma na boku zoba.



Sl. 1. *Predmet raziskave*
Valjasta zobniška dvojica: $z_1 = 17$, $z_2 = 35$, $i = 2{,}06$, $\alpha_n = 20^0$, $x = 0$, $b = 120$ mm, $h_F^* = 20{,}9$ m, $S_F^* = 19$ mm, $F_b = 500$ N/mm
(* obe veličini sta določeni grafično)

Zobno silo izračunamo po enačbi

$$F_b = \frac{\sigma_{F\text{dop}} \cdot W}{\cos \alpha \cdot h_F \cdot b} \qquad (2.1)$$

Vrednost zobne sile za izbrano zobniško dvojico in material je

$$F_b = 500 \text{ N/mm}$$

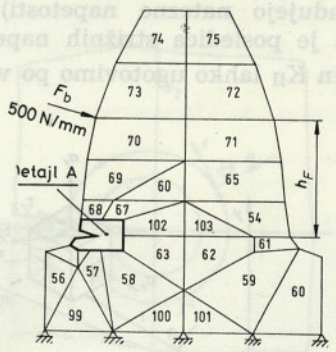
To je obenem tudi tako imenovana specifična sila, s katero obremenimo zob z razpoko za analizo v ravninskem napetostnem stanju.

2.1. Izbira modela

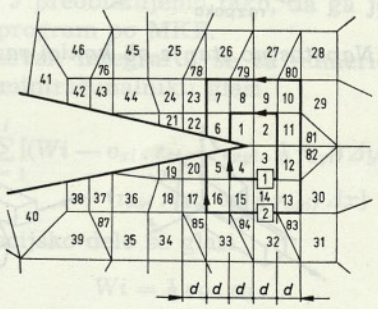
Izberemo model, za katerega smo mnenja, da dobro ponazarja zob zobnika. Razdelimo ga na končne elemente (KE) in izberemo robne pogoje (sl. 2).

Elemente v okolici vrha razpoke močno zgostimo, tako da v polju okrog vrha razpoke dobimo boljše rezultate.

Slika 3 prikazuje detajl A, kjer smo KE zmanjšali in mrežo KE močno zgostili.



Sl. 2. *Razdelitev modela na končne elemente (KE)*
število elementov 104, število vozlišč 325, število podpor 5, debelina 1 mm, tip elementov izoparametričen



Sl. 3. *Zgostitev mreže ob vrhu razpoke*
$d = 0{,}1$ mm, 1 in 2 poti integracije

3. TEORETIČNO IZHODIŠČE

Osnovna enačba za določevanje napetostnega in deformacijskega stanja v okolici vrha razpoke je Airyjeva napetostna funkcija

$$\Delta^2 \Phi = 0 \tag{3.1}$$

Z vpeljavo kompleksnih spremenljivk Muschelišvilija $\varphi(z)$ in $\chi(z)$ dobimo z znanimi transformacijami znane Irwinove enačbe.

Napetostno stanje ob vrhu konice razpoke (sl. 4) opišemo s tenzorjem napetosti

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi\, r}} f_{ij}\, \Theta + \text{končni členi} \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{3.2}$$

in deformacijsko stanje s tenzorjem deformacij

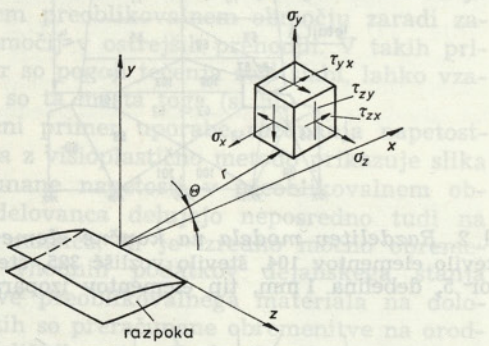
$$u_{ij} = \frac{K}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\, g_{ij}\, \Theta + \text{končni členi} \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{3.3}$$

Enačbi kažeta, da ju ne moremo uporabiti za vrednost $r = 0$, ker dobimo fizikalno nemogoče stanje. Pri reševanju problema z MKE poznamo napetostno in deformacijsko stanje, kar lahko s pridom uporabimo za izračun koeficientov intenzivnosti napetosti (KIN).

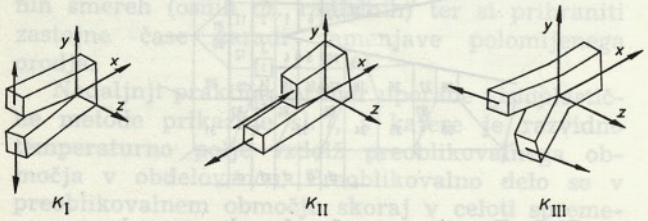
Poznamo tri vrste KIN: K_I, K_{II}, K_{III} (sl. 5).

Za obravnavani primer je pomembno najprej ugotoviti KIN K_I, ki je posledica razpiranja razpok (prevladujejo natezne napetosti) in potem KIN K_{II}, ki je posledica strižnih napetosti (sl. 5).

KIN K_I in K_{II} lahko ugotovimo po več različnih metodah.



Sl. 4. *Napetostno stanje ob konici razpoke*



Sl. 5. *Razpiranje razpok*

3.1. Metoda ekstrapolacije ali mejni prehod

3.1.1. *Določanje koeficienta intenzivnosti napetosti (KIN)* K_I

Osnovni enačbi (3.2) in (3.3) preoblikujemo. KIN K_I določimo iz napetosti ali pomikov. Vrednost KIN K_I dobimo tako, da limitiramo z $r \to 0$.

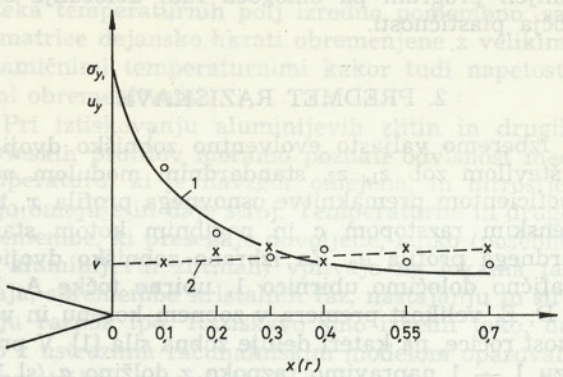
Tako dobimo enačbo za K_I iz napetosti:

$$K_I = \lim_{r \to 0} \left[\sqrt{2\pi\, r}\; \sigma_y(r, \Theta = 0^0)\right] \tag{3.1.1.1}$$

in enačbo za K_I iz deformacij

$$K_I = \frac{2\mu}{(k+1)} \lim_{r \to 0} \left[\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\, u_y(r, \Theta = 180^0)\right] \tag{3.1.1.2}$$

Sedaj v okolici vrha razpoke izberemo območje r. Za iskano območje r moramo ugotoviti potek napetosti in deformacij (sl. 6).



Sl. 6. *Potek napetosti σ_y in deformacij v ob konici razpoke*
1 — potek napetosti $f(K_I) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2$
2 — potek deformacij $f(K_{II}) = a_0 + a_1 r$

Potek napetosti in deformacij izrazimo s funkcijama. Dobimo sistem enačb. Reševanje sistema enačb mehaniziramo in ga rešimo na računalniku. Rešitev a_0 pomeni vrednost KIN K_I iz napetosti ali pomikov.

Prednost dajemo rezultatom, izračunanih po pomikih. Vrednost za $K_I = 140\ \text{N/mm}^{3/2}$.

3.1.2. *Določanje koeficienta intenzivnosti napetosti (KIN)* K_{II}

Reševanje je podobno kakor v prejšnjem poglavju. Enačbi (3.2) in (3.3) preoblikujemo tako, da je iz strižnih napetosti ali deformacij mogoče določiti KIN K_{II}.

Tako dobimo iz napetosti

$$K_{II} = \lim_{r \to 0} \left[\sqrt{2\pi\, r}\; .\; \tau_{xy}(r, \Theta = 0)\right] \tag{3.1.2.1}$$

in iz pomikov

$$K_{II} = \lim_{r \to 0} \left[\frac{r}{2\pi}\, \frac{2\mu}{k-1}\, u(r, \Theta = 0)\right] \tag{3.1.2.2}$$

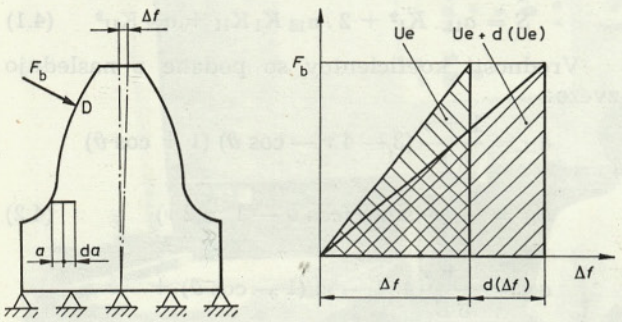
Tehnika reševanja je podobna prejšnji (določanje KIN K_I).

Vrednost KIN K_{II} znaša

$$K_{II} = 43 \text{ N/mm}^{3/2}$$

3.2. Energijska metoda

Teoretično izhodišče je sprememba elastične energije, ko se razpoka z dolžino a poveča za d_a pri enaki obremenitvi (sl. 7).



Sl. 7. *Temelj energijske metode*

Osnovno enačbo

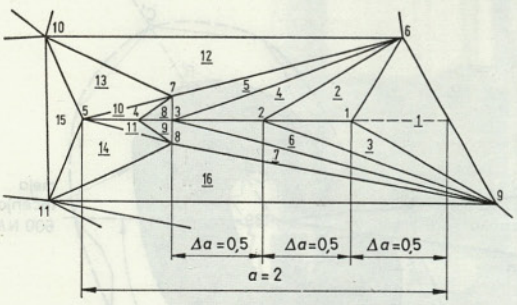
$$d(Ue) = \frac{\Delta f}{N} \, d(\Delta f) - \frac{\Delta f^2}{2 \, dN^2} \, dN \qquad (3.2.1)$$

preoblikujemo tako, da dobimo enačbo za izračun KIN K_I, ki se glasi

$$K_I = \frac{F_b}{s_F \, . \, d} \sqrt{a \, \pi \, . \, f\left(\frac{a}{s_F}\right)} \qquad (3.2.2)$$

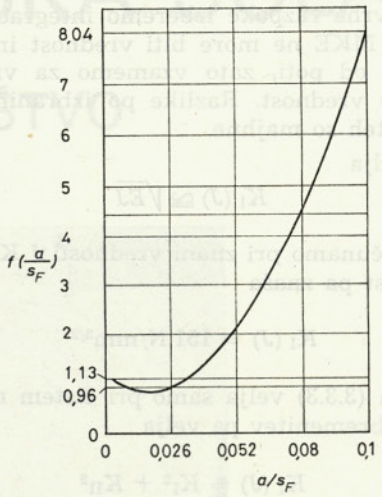
V enačbi (3.2.2) je neznanka funkcije $f(a/s_F)$, ki jo imenujemo korekturna funkcija. Funkcijo $f(a/s_F)$ lahko določimo, če poznamo deformacijo simetrale zoba pri različnih globinah razpoke in enaki obremenitvi.

Razpoko izpolnimo s KE (sl. 8).



Sl. 8. *Detajl razpoke za energijske metode*

Z izločevanjem KE razpoka po koraku $\Delta a = 0{,}5$ mm raste od začetne vrednosti $a = 0$ do končne vrednosti $a = 2$ mm. Pri enaki obremenitvi postaja zob mehkejši, deformacije se z večanjem razpoke povečujejo. Prek transformacij pridemo do diagrama za korekcijsko funkcijo (sl. 9).



Sl. 9. *Korekcijska funkcija*

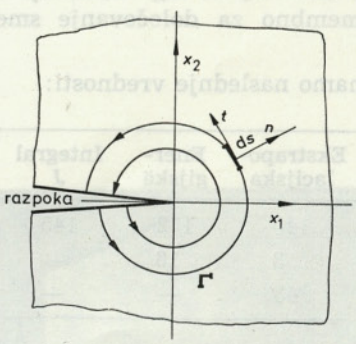
Z diagramom lahko po enačbi (3.2.2) izračunamo KIN K_I za različne globine razpoke, pa tudi za $a = 2$ mm.

Vrednost po tej metodi za $K_I = 172 \text{ N/mm}^{3/2}$.

3.3 Metoda integrala J

Osnovna enačba je Riccov integral.

$$J = \int_\Gamma W \, dx_2 - \sigma_{ij} \, . \, nj \, \frac{\partial_{ui}}{\partial x_1} \, dS \qquad (3.3.1)$$



Sl. 10. *Pot integracije*

Integral J preoblikujemo tako, da ga je mogoče vgraditi v program po MKE.

Preoblikovan integral J se za numerično integracijo na miniračunalniku glasi

$$J = \sum_{n=1}^{i} [(Wi - \sigma_{xi} \, . \, \varepsilon_{xi} - \tau_{xyi} \, . \, \tfrac{1}{2} \, \gamma_{xyi}) \, \Delta y + (\tau_{xyi} \, . \, \varepsilon_{xi} \, . \, \sigma_{yi} \, \tfrac{1}{2} \, \gamma_{xyi}) \, \Delta x] \qquad (3.3.2)$$

Deformacijsko delo se glasi

$$Wi = \tfrac{1}{2} \, \sigma_{ij} \, . \, \varepsilon_{ij}$$

Vrednosti ε_{xi}, γ_{xyi} izračunamo iz enačb elastičnosti.

Okoli vrha razpoke izberemo integracijske poti (sl. 3). Po MKE ne more biti vrednost integrala J neodvisna od poti, zato vzamemo za vrednost J povprečno vrednost. Razlike po izbranih integracijskih poteh so majhne.

Ker velja

$$K_I(J) \cong \sqrt{EJ} \tag{3.3.3}$$

lahko izračunamo pri znani vrednosti J KIN K_I (J), ta vrednost pa znaša

$$K_I(J) = 151 \text{ N/mm}^{3/2}$$

Enačba (3.3.3) velja samo pri čistem nategu, za dvoosno obremenitev pa velja

$$K_I(J) = K_I^2 + K_{II}^2 \tag{3.3.4}$$

Pri znani vrednosti KIN K_{II} lahko določimo resnično vrednost za KIN K_I, določenega z metodo integrala J.

Dobimo $K_I = 145 \text{ N/mm}^{3/2}$.

3.4 Analiza rezultatov koeficientov intenzivnosti napetosti (KIN)

Za zob z razpoko v korenu zoba nam je z numerično analizo uspelo izračunati KIN K_I po treh metodah, KIN K_{II} z mejnim prehodom oziroma ekstrapolacijo, z metodo integrala J pa tudi razmerje med KIN K_I in K_{II}. Razmerje med K_I in K_{II} je pomembno za določevanje smeri širjenja razpoke.

Tako imamo naslednje vrednosti:

Metoda:	Ekstrapolacijska	Energijska	Integral J	Enote
K_I	140	172	145	$N/mm^{3/2}$
Odstopek	3	16	—	%
K_{II}	43	—	—	$N/mm^{3/2}$

Mnenja smo, da je rezultat KIN K_I določen z metodo integrala J najprimernejši. Najmanj odstopa vrednost KIN K_I, določen po ekstrapolacijski metodi, medtem ko vrednost, določena z energijsko metodo, odstopa precej. Rezultat je namreč po tej metodi odvisen od števila, oblike in tipa elementov ob somernici zoba in koraka rasti razpoke Δa.

Ima pa metoda to prednost, da smo z določitvijo KIN K_I določili korekcijsko funkcijo $f(a/s_F)$, ki jo lahko uporabimo za določanje KIN K_I za različne globine razpoke in določanje števila obremenitvenih ciklov pri dinamičnih obremenitvah.

Vse tri metode so preproste in dobre. Ker nobena metoda ne terja velikega števila KE, jih je mogoče uporabiti pri raziskavah na miniračunalniku.

4. DOLOČITEV SMERI ŠIRJENJA RAZPOKE

Zanimivo bi bilo ugotoviti pri nestabilnosti smer širjenja razpoke.

To lahko ugotovimo po metodi integrala J (v tistem delu integracijske poti, kjer je delež ΔJ k skupni vrednosti J najmanjši, v tisto smer se bo širila razpoka) ali po Sihovi teoriji [2].

Sih je vpeljal faktor specifične deformacijske energije S, ki ima v okolici razpoke naslednjo obliko:

$$S = a_{11} \cdot K_I^2 + 2 \cdot a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 \tag{4.1}$$

Vrednosti koeficientov so podane z naslednjo zvezo:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1+\nu}{8E}(3 - 4\nu - \cos\vartheta)(1 + \cos\vartheta) \\ a_{12} &= \frac{1+\nu}{4E}\sin\vartheta(\cos\vartheta - 1 + 2\nu) \\ a_{22} &= \frac{1+\nu}{8E}4(1-\nu)(1-\cos\vartheta) + \\ &\quad + (3\cos\vartheta - 1)(1 + \cos\vartheta) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Pod tistim kotom ϑ, kjer je S najmanjša, se bo razpoka širila.

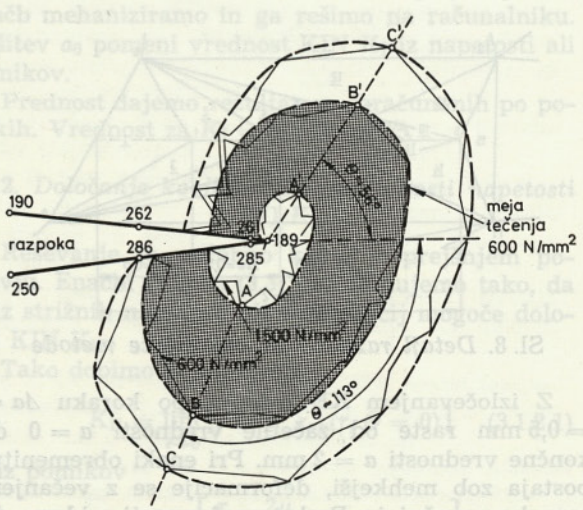
Velja tudi, kadar je

$$\frac{dS}{d\vartheta} = 0 \tag{4.3}$$

Z znanima vrednostma za $K_I = 145 \text{ N/mm}^{3/2}$ in $K_{II} = 43 \text{ N/mm}^{3/2}$ ugotovimo $\vartheta \approx 23^0$.

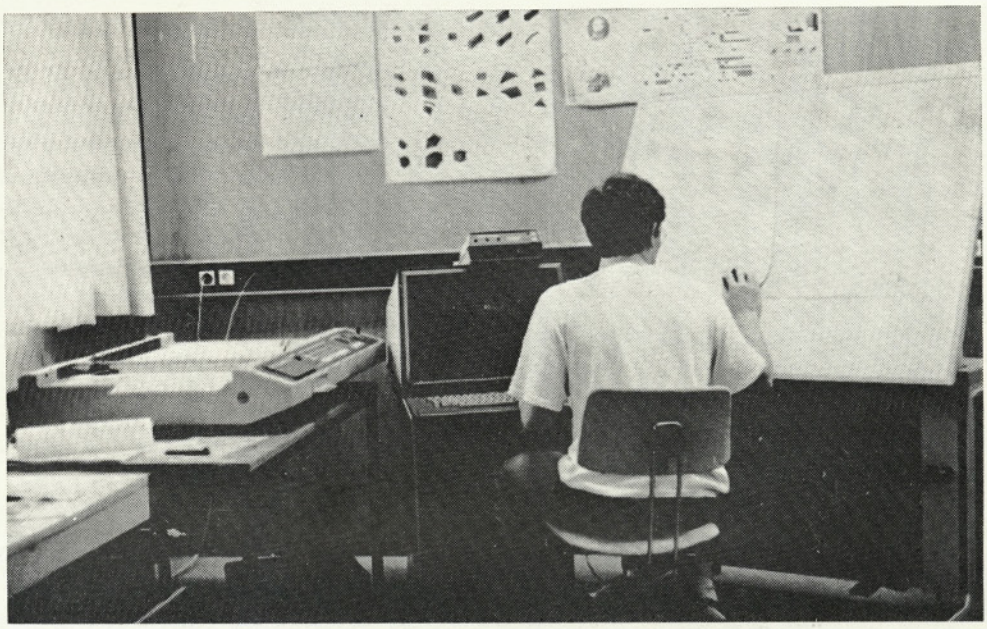
5. DOLOČEVANJE OBMOČJA PLASTIČNOSTI

Opraviti imamo z realnim materialom. Pričakovati je, da bo ob vrhu razpoke nastalo območje plastičnosti. Velikost območja določimo s primerjavo primerjalne napetosti in meje tečenja.

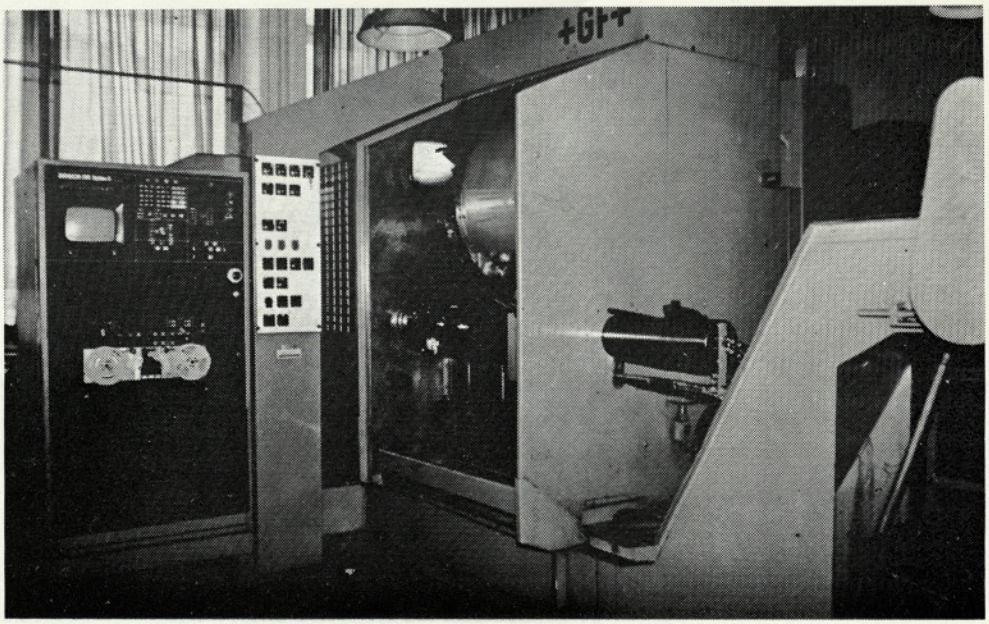


Sl. 11. *Območje plastičnosti*

25 let
VISOKA TEHNIŠKA ŠOLA
MARIBOR
VTO STROJNIŠTVO

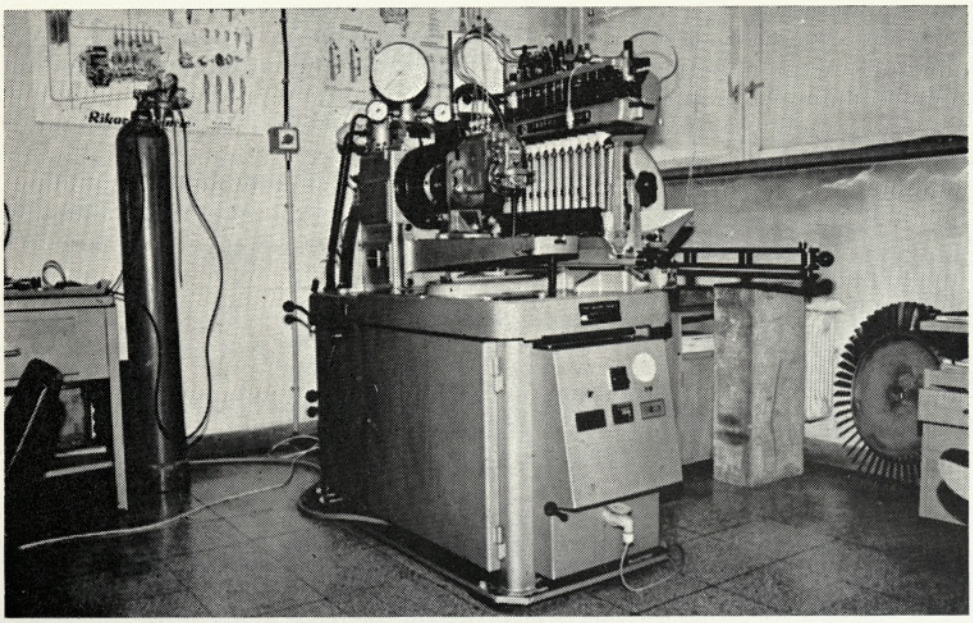


Programersko mesto v laboratoriju za tehniško programsko opremo (Lateks) za računalniško podprto konstruiranje

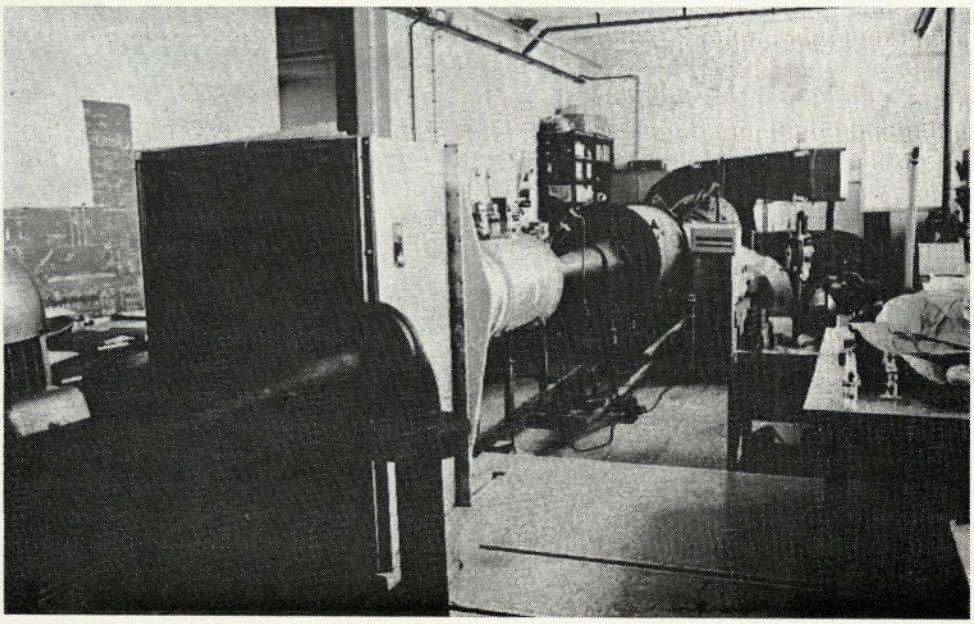


Številsko krmiljena stružnica (CNC) GF-NDM 7 v tehnološkem laboratoriju

25 let
VISOKA TEHNIŠKA ŠOLA
MARIBOR
VTO STROJNIŠTVO



Laboratorij za motorje z notranjim zgorevanjem Preizkuševališče tlačilk za vbrizgovanje goriva



Laboratorij za hidravlične stroje

Program izpopolnimo z Mises-Huberjevo hipotezo (M.H.). Ko je primerjalna napetost enaka meji tečenja, sklepamo na velikost območja plastičnosti (sl. 11).

Območje plastičnosti je v resnici nekoliko večje, ker M.H. hipoteza temelji na enačbah elastičnosti. Območje plastičnosti (sl. 11) je zamaknjeno iz navpičnice, kar kaže na vpliv strižnih obremenitev.

6. SKLEP

Iz predstavljenega lahko povzamemo, da je MKE primerna numerična metoda za računanje koeficientov intenzivnosti napetosti, da z njo lahko dobro ocenimo smer širjenja razpoke in velikost ter obliko območja plastičnosti.

Zavedamo se, da je to začetek in da v teh začetnih raziskavah ni moč naenkrat zajeti vseh vplivov (dinamičnih obremenitev, dislokacij, utrjevanja, temperature...) ampak, da je treba model postopno dograjevati in izpopolnjevati.

Ker gre za enega izmed prvih pristopov ugotavljanja KIN strojnega elementa na osnovi lomne mehanike, so bile nekatere poenostavitve nujno potrebne. Kljub pomanjkljivosti, da rezultati niso potrjeni s preizkusi, smo lahko z njimi zadovoljni in so vzpodbuda za nadaljnje raziskave.

Zavedamo pa se, da bomo morali numerične metode dopolniti z ugotovitvami in vrednostmi, določenimi s preizkusi.

POMEN OZNAČB IN SIMBOLOV

a — dolžina razpoke
a_{11}, a_{12}, a_{22} — koeficienti
b — širina zobnika
d — debelina, dolžina KE
F_b — zobna sila
Δf — upogib, deformacija
$f_{ij}\,\Theta$ — funkcija
$f\left(\frac{a}{s_F}\right)$ — korekturna funkcija
$g_{ij}\,\Theta$ — funkcija
h_F — ročica delovanja zobne sile
J — Riceov integral
KIN — koeficient intenzivnosti napetosti K_I, K_{II}
N — recipročna vrednost vzmetne konstante
S — specifična deformacijska energija
s_F — prerez zobnega korena
U_e — elastična energija
u_{ij} — tenzor deformacij
W — odpornostni moment, deformacijsko delo
x_1, x_2 — osi
α — kot delovanja zobne sile
Γ — pot integracije
ϑ, Θ — kot
$\sigma_{F\,dop}$ — dopustna napetost
σ_{ij} — tenzor napetosti
Φ — Airyjeva napetostna funkcija
$\varphi(z), \chi(z)$ — kompleksni funkciji Muskelišvilija

VIRI:

[1] J. Flašker: Doktorska disertacija, Univerza v Mariboru, 1982
[2] J. Flašker, M. Saje s sodelavci: Raziskovalna naloga I. 1982, Univerza v Mariboru.
[3] J. Flašker s sodelavci: Raziskovalna naloga I. 1983, Univerza v Mariboru.
[4] D. Križman: Diplomska naloga 1982, VTŠ Maribor — VTO strojništvo.
[5] E. Antolič: Diplomska naloga 1981, VTŠ Maribor — VTO strojništvo.

Naslova avtorjev: doc. dr. Jože Flašker, dipl. inž., prof. dr. Anton Jezernik, dipl. inž., oba Visoka tehniška šola, VTO strojništvo, Maribor

UDK 621.833.38

Snovanje polžastih gonil z računalnikom

JOŽE FLAŠKER, DUŠAN MRKELA in ANTON PRISTAVEC

1. UVOD

Program POLGO (POLžasta GOnila) je namenjen konstrukterjem v konstrukcijskih birojih za izračunavanje in konstrukcijo polžastih gonil. Uporabljati ga je mogoče pri zasnovi novih ali pa za kontrolo že obstoječih polžastih gonil.

Zasnova programa POLGO je takšna, da je uporabnik — konstrukter prek zaslona vedno v neposrednem stiku z izvajalnim programom.

2. ZASNOVA PROGRAMA

Zasnova programa je takšna, da lahko na podlagi osnovnih želenih karakteristik, ki naj jih ima gonilo (moč, prestavno razmerje, vrsta materiala polža in polžastega zobnika) določa osnovne vrednosti, kakršne so modul, medosni razmik, natančno prestavno razmerje, koeficient premika profila osnovne zobnice. Prav tako določa vse geometrične vrednosti polža, polžastega zobnika, izkoristek, iz-