

UDK 621.833.382

Standardni valjasti polži ZI in ZA

JOŽE PUHAR

Vijačna dvojica je — po standardu JUS M.C1.014 — hiperboloidna zobniška dvojica, pri kateri se ubirajo zobje polža in polžastega zobnika. Dotikališče njunih zobnih bokov je linijsko. Po oblikah temenskih in korenskih ploskev polža so vijačne dvojice lahko valjaste ali globoidne.

V članku so obravnavani samo valjasti polži, in sicer — glede na tvornico vijačne ploskve — le valjasti polži ZI in ZA.

1.0. Splošne ugotovitve

Oblika bokov polža je odvisna od obdelovalnega postopka; torej jo določajo profil, lega in gibanje orodja.

Vijačno ploskev določa premica — tvornica. Ravni tvornici ustreza tudi ravni rob orodja, npr. stružnega noža, frezala, brusa.

Profil zoba polža je določen v prerezu polža z osno ravnino — osni profil. Srednjica osnega profila opiše pri vrtenju srednji valj. Prostorska krivulja, ki jo določajo prebodi žarka na plašču srednjega valja, če se ta enakomerno vrti okrog osi valja in premika hkrati vzdolž nje z enakomerno hitrostjo, je srednja vijačnica. Ostri kot med dotikalnico na srednjo vijačnico polža in ravnino, pravokotno na os vijačnice, je kot srednje vijačnice polža γ_m . Izražen z enačbo

$$\tan \gamma_m = \frac{L}{d_m \pi} = \frac{m z_1}{d_m} = \frac{z_1}{q} \quad (1)$$

pri čemer pomenijo

- L — korak polža,
- d_m — premer srednjega valja (kroga) polža,
- m — modul,
- z_1 — število zob polža¹ in
- q — značilnico polža².

Kot srednje vijačnice polža γ_m v odvisnosti od veličin z_1 in q ponazarja slika 1.

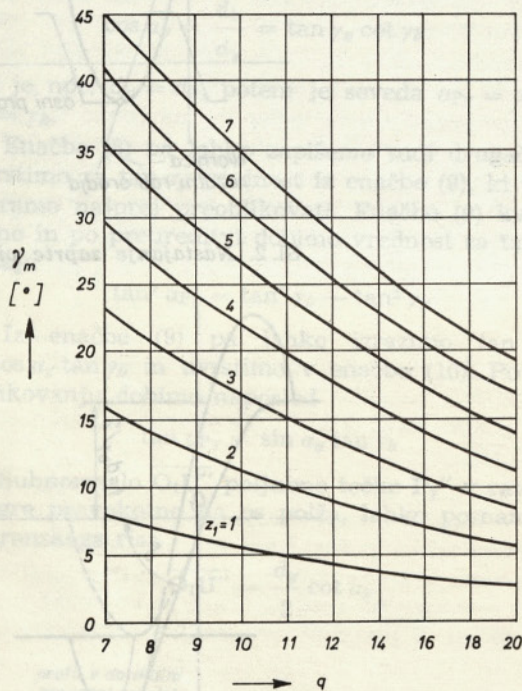
Tvornica je podana z dvema veličinama: z razdaljo med tvornico in osjo polža f in z nagibnim kotom tvornice proti osi δ .

Če je $f = 0$, tvornica seka os valja. Po definiciji o nastajanju vijačne ploskve dobimo zaprto vijačno ploskev. Obris boka zobnega profila v stranskem risu je evolventa (sl. 3). Zato tak polž imenujejo tudi evolventni polž. Po standardu JUS M.C1.014 je njegova označba valjasti polž ZI.

Kadar pa je $f = 0,5 d_{b1}$, je vijačna ploskev odprta³. Ploskev je mogoče odviti v ravnino. Imenu-

¹ V praksi so navadno v rabi gesla enostopenjski, dvostopenjski... in večstopenjski polž, kar pa je napačno; prav je enojni, dvojni... in večkratni polž.

² Standardno število, ki določuje radialne dimenzije polža, neodvisno od ustreznih dimenzij polžastega zobnika.



Sl. 1. Kot srednje vijačnice γ_m v odvisnosti od števila zob polža z_1 in značilnice polža q

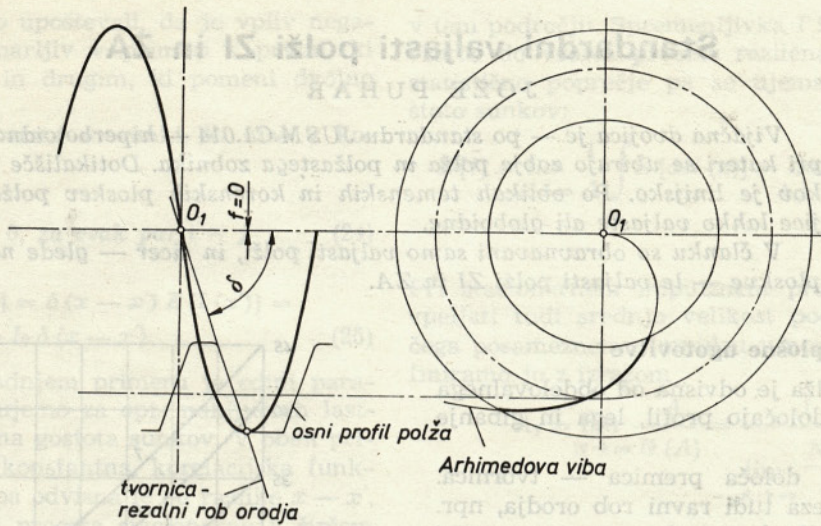
jemo jo evolventna vijačna ploskev. Obris boka zobnega profila v stranskem risu je evolventa (sl. 3). Zato tak polž imenujejo tudi evolventni polž. Po standardu JUS M.C1.014 je njegova označba valjasti polž ZI.

2.0. Valjasti polži ZI

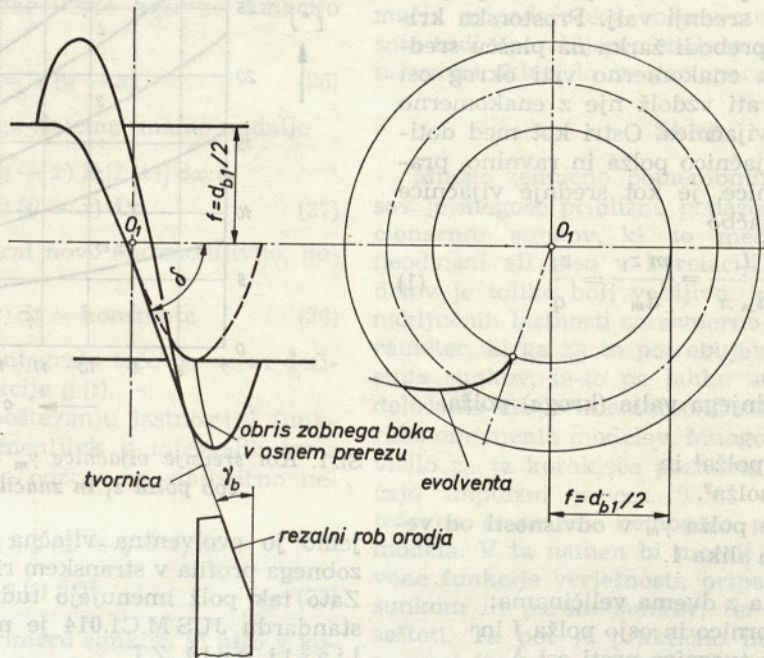
Enojni evolventni polž imamo, če — skladno s pravili evolventnega ozobja — ozobjamo valjasti zobnik s poševnimi zobmi, ki ima samo en zob, z velikim nagibnim kotom bočnih črt β_0 in ustrezno majhnim kotom srednje vijačnice polža γ_m .

Širina zobnika je pri polžu njegova dolžina. Tvornica se dotika osnovnega valja polža s premerom d_{b1} . Tako je mogoče uporabiti enačbe za valjaste zobnike s poševnimi zobmi, samo namesto

³ Odprto vijačno ploskev — ki pa je ni mogoče odviti — dobimo tudi, če je $f < 0,5 d_{b1}$ oziroma če je $f > 0,5 d_{b1}$. V prvem primeru imamo podaljšano evolventno ploskev (valjasti polž ZK), v drugem pa je evolventna ploskev skrajšana (valjasti polž ZN).



Sl. 2. Nastajanje zaprte vijačne ploskve (valjasti polž ZA)



Sl. 3. Nastajanje odprte vijačne ploskve (valjasti polž ZI)

običajnega nagibnega kota bočnih črt β_0 uvrstimo njegov dopolnilni kot, tj. srednji kot vijačnice polža γ_m .

Če iz enačbe (1) izračunamo

$$d_m \tan \gamma_m = \frac{L}{\pi} \quad (2)$$

lahko izrazimo podobno tudi za osnovni valj polža d_{b1} s pripadajočim kotom vijačnice γ_b :

$$d_{b1} \tan \gamma_b = \frac{L}{\pi} \quad (3)$$

Če enačbi (2) in (3) izenačimo, lahko izrazimo razmerje obeh premerov:

$$\frac{d_{b1}}{d_m} = \frac{\tan \gamma_m}{\tan \gamma_b} = \tan \gamma_m \cot \gamma_b = \cos \alpha_m \quad (4)$$

kjer je α_m vpadni kot zobnega profila na licu polža. Iz tega izhaja

$$d_{b1} = d_m \cos \alpha_m = d_m \tan \gamma_m \cot \gamma_b = z_1 m \cot \gamma_b \quad (4)$$

Nadalje velja tudi

$$\cos \gamma_b = \cos \gamma_m \cos \alpha_n$$

pri čemer je α_n nagibni kot boka zoba osnovnega profila.

Osní profil evolventnega polža konstruiramo, če izhajamo iz definicije o vijačnici. Če se zavrti točka na tvornici za kot 2π , je njen premik v smeri osi polža enak koraku polža L . Za poljubni vrtilni kot φ_y velja razmerje

$$\text{arc } \varphi_y : 2\pi = \zeta_{Py} : L \quad (5)$$

Iz zgornje enačbe izhajata kotu φ_y pripadajoči premik točke P_y v osni smeri

$$\zeta_{Py} = \frac{L \text{ arc } \varphi_y}{2\pi} \quad (6)$$

Najprej na stranskem risu (sl. 4) narišemo krog s premerom $D = L/\pi$. Točko P_y v osnem profilu, ki je presečišče obrisa boka* in tvornice valja polža s premerom d_y , dobimo tako, da poiščemo na stranskem risu presečišče kroga d_y z evolvento, ki gre skozi kinematično točko C, tj. točko P_y'' in nato dolžino loka $\widehat{V_y V}$ (na premeru D) v narisu nanesimo kot absciso ζ_{Py} . Ordinatna os gre skozi kinematično točko C. Točka P_y je oddaljena od osi polža za vrednost $d_y/2$. Geometrijsko mesto vseh točk P_y za poljubne d_y je obris boka v osnem prerezu. S konstrukcijo ustreznega somernega obrisa boka dobimo osni profil zoba evolventnega polža.

Obris boka se asimptotično približuje premici, ki je krak kota γ_b . Čim večji je kot γ_b , tem bolj je obris boka nagnjen. Vpadni koti v osnem prerezu

* obris boka = bočnica

α_P se spreminjajo v odvisnosti od premera d_y in so z nagibnim kotom boka zoba osnovnega profila v razmerju

$$\tan \alpha_{Py} = \frac{\tan \alpha_n}{\tan \gamma_y} \quad (7)$$

Nadalje je tudi:

$$\tan \alpha_{Py} = \tan \alpha_y \tan \gamma_y \quad (8)$$

pri čemer je α_y vpadni kot profila zoba na licu polža in ga izračunamo iz

$$\cos \alpha_y = \frac{d_b}{d_y} = \tan \gamma_y \cot \gamma_b \quad (9)$$

Če je npr. $d_y = d_k$, potem je seveda $\alpha_{Py} = \alpha_{Pk}$ in $\gamma_y = \gamma_k$.

Enačbo (8) pa lahko zapišemo tudi drugače, če uvrstimo za $\tan \alpha_y$ vrednost iz enačbe (9), ki pa jo moramo najprej preoblikovati. Enačbo (9) kvadriramo in po preureditvi dobimo vrednost za $\tan^2 \alpha_y$. Izhaja

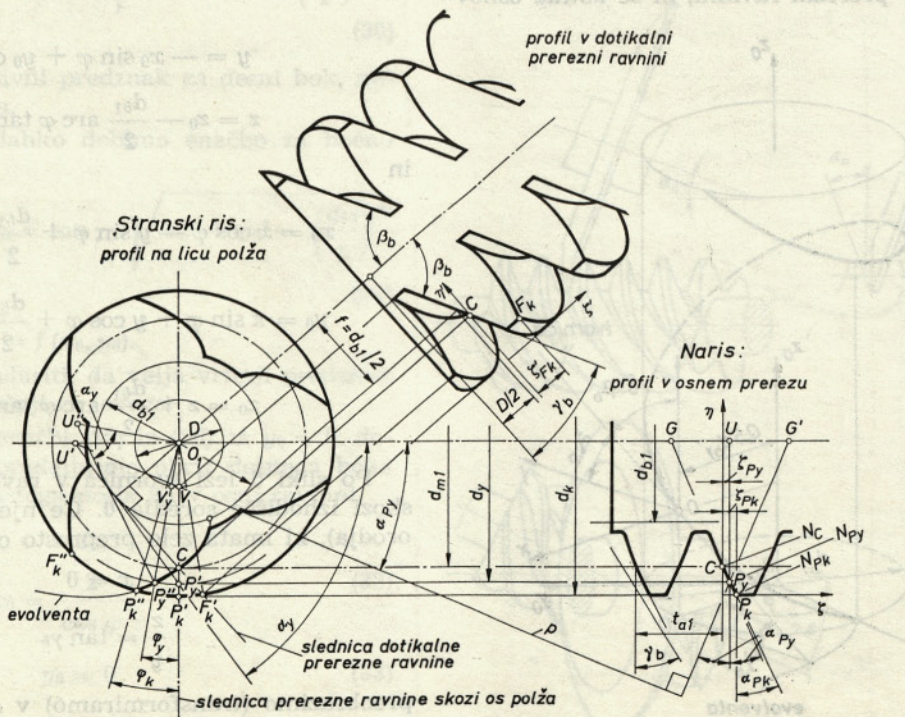
$$\tan^2 \alpha_{Py} = \tan^2 \gamma_b - \tan^2 \gamma_y \quad (10)$$

Iz enačbe (9) pa lahko izrazimo $\tan \gamma_y = \cos \alpha_y \tan \gamma_b$ in uvrstimo v enačbo (10). Po preoblikovanju dobimo naposled

$$\tan \alpha_{Py} = \sin \alpha_y \tan \gamma_b \quad (11)$$

Subnormalo $\overline{O_1 U''}$ poljubne točke P_y'' v ravnini, ki gre pravokotno na os polža, lahko posnamemo s stranskega risa

$$\overline{O_1 U''} = \frac{d_y}{2} \cot \alpha_y \quad (12)$$



Sl. 4. Trojni valjasti polž $Z_1 = 3$

$$x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - \frac{d_{b1}}{2} = 0 \quad (25)$$

in

$$x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi + z_0 \cot \gamma_b = \frac{d_{b1}}{2} \operatorname{arc} \varphi \quad (26)$$

Izpeljemo lahko tudi enačbi za kotni parameter. Če enačbo (25) pomnožimo z y_0 , enačbo (26) pa delimo s $\tan \gamma_b$, lahko iz obeh enačb dobimo

$$\sin \varphi = \frac{\frac{d_{b1}}{2} (x_0 \operatorname{arc} \varphi + y_0) - x_0 z_0 \cot \gamma_b}{x_0^2 + y_0^2} \quad (27)$$

Enačbo (25) pa lahko pomnožimo tudi z x_0 . Če za pripadajočo drugo enačbo vzamemo zopet enačbo (26) deljeno s $\tan \gamma_b$, lahko dobimo še

$$\cos \varphi = \frac{\frac{d_{b1}}{2} (x_0 - y_0 \operatorname{arc} \varphi) + y_0 z_0 \cot \gamma_b}{x_0^2 + y_0^2} \quad (28)$$

Če enačbo (27) pomnožimo s $\cos \varphi$, enačbo (28) pa s $\sin \varphi$, ju lahko izenačimo. Po preoblikovanju dobimo

$$\left(\frac{d_{b1}}{2} \operatorname{arc} \varphi - z_0 \cot \gamma_b \right)^2 = x_0^2 + y_0^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2} \right)^2 \quad (29)$$

oziroma

$$\frac{d_{b1}}{2} \operatorname{arc} \varphi - z_0 \cot \gamma_b = \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2} \right)^2} \quad (30)$$

Pri tem velja pozitiven predznak za desni bok, negativen pa za levega.

Iz enačbe (30) lahko dobimo enačbo za bočno ploskev polža ZI

$$z_0 = \frac{d_{b1}}{2} \operatorname{arc} \varphi \tan \gamma_b \mp \tan \gamma_b \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2} \right)^2} \quad (31)$$

ki ustreza obliki $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Treba pa je poudariti, da velja vrhni predznak za desni bok in spodnji za levega.

Če uvrstimo v enačbi (25) in (26) za $y_0 = 0$, dobimo enačbe, ki opredeljujejo obris desnega boka za profil zoba valjastega polža ZI v osni ravnini

$$x_0 = \frac{\frac{d_{b1}}{2}}{\cos \varphi} \quad (32)$$

$$y_0 = 0 \quad (33)$$

$$z_0 = \frac{d_{b1}}{2} \operatorname{arc} \varphi \tan \gamma_b - x_0 \sin \varphi \tan \gamma_b \quad (34)$$

Če enačbo (16) razširimo

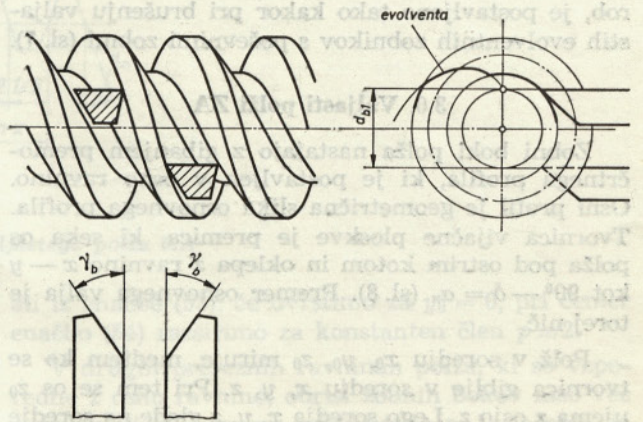
$$p = \frac{d_m}{2} \tan \gamma_m = \frac{d_{b1}}{2} \tan \gamma_b \quad (35)$$

in upoštevamo, da je $x_0 \sin \varphi = 0,5 d_{b1} \tan \varphi$, dobi enačba (34) obliko

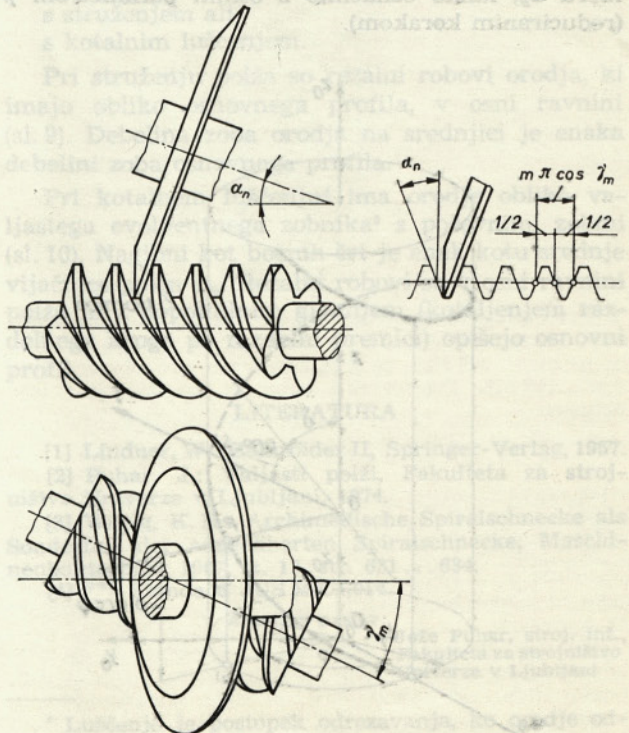
$$z_0 = \frac{d_{b1}}{2} \tan \gamma_b (\operatorname{arc} \varphi - \tan \varphi) = p (\operatorname{arc} \varphi - \tan \varphi) \quad (36)$$

Po definiciji za evolventno funkcijo kota lahko pišemo $\operatorname{inv} \varphi = \tan \varphi - \operatorname{arc} \varphi$. S tem pa dobi enačba (36) dokončno obliko

$$z_0 = -p \operatorname{inv} \varphi \quad (37)$$



Sl. 6. Struženje valjastega polža ZI



Sl. 7. Brušenje valjastega polža ZI

Valjaste polže ZI je mogoče izdelati na več načinov:

- s struženjem,
- z brušenjem ali
- s kotalnim frezanjem.

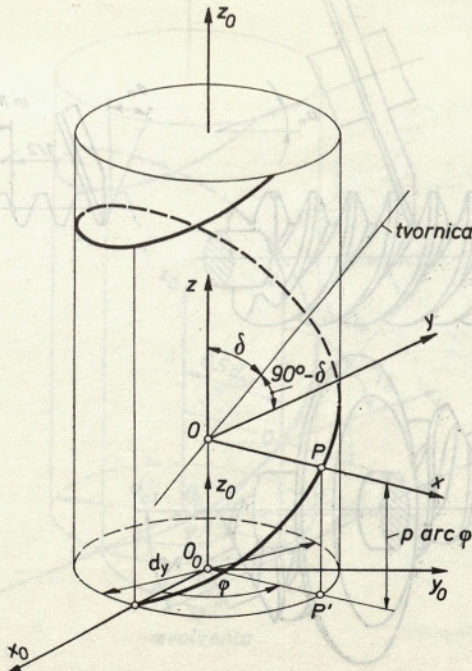
Pri struženju obdelujemo posebej desni in levi bok. Rezalni rob orodja je tvornica evolventne helikoidalne ploskve. Orodje je vpeto tako, da je rezalni rob v tangencialni ravnini z osnovnim valjem, z ravnino pravokotno na os polža pa oklepa kot γ_b (sl. 6).

Valjaste polže ZI brusimo z brusilnicami, katerih premer je mnogo večji od premera srednjega valja polža. Orodje — brus, ki ima premočrten rezalni rob, je postavljeno tako kakor pri brušenju valjastih evolventnih zobnikov s poševnimi zobmi (sl. 7).

3.0. Valjasti polži ZA

Zobni boki polža nastajajo z gibanjem premočrtnega profila, ki je postavljen v osno ravnino. Osnovni profil je geometrična slika osnovnega profila. Tvornica vijajčne ploskve je premica, ki seka os polža pod ostrim kotom in oklepa z ravnino $x-y$ kot $90^\circ - \delta = \alpha_n$ (sl. 8). Premer osnovnega valja je torej nič.

Polž v soredju x_0, y_0, z_0 miruje, medtem ko se tvornica giblje v soredju x, y, z . Pri tem se os z_0 ujema z osjo z . Lego soredja x, y, z glede na soredje x_0, y_0, z_0 označuje kotni parameter gibanja po vijajnici φ . Točko P, ki se giblje po vijajnici na premeru d_y , lahko označimo z osnim parametrom p (reduciranim korakom).



Sl. 8. Nastajanje valjastega polža ZA

Med soredjema x, y, z in x_0, y_0, z_0 so po sliki 8 naslednje zveze:

$$x = x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi \quad (38)$$

$$y = -x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi \quad (39)$$

$$z = z_0 - p \operatorname{arc} \varphi \quad (40)$$

in

$$x_0 = x \cos \varphi - y \sin \varphi \quad (41)$$

$$y_0 = x \sin \varphi + y \cos \varphi \quad (42)$$

$$z_0 = z + p \operatorname{arc} \varphi \quad (43)$$

Enačbi za tvornico v sistemu x, y, z sta zelo preprosti, saj gre premica skozi izhodišče soredja 0. Zapišemo

$$\frac{z}{y} = \tan(90^\circ - \delta) = \tan \alpha_n \quad (44)$$

in

$$x = 0 \quad (45)$$

Če uvrstimo pripadajoče vrednosti iz enačb (38), (39) in (40), dobimo enačbi (44) in (45) obliko

$$\frac{z_0 - p \operatorname{arc} \varphi}{-x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi} = \tan \alpha_n$$

in

$$x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi = 0$$

Po preoblikovanju dobimo

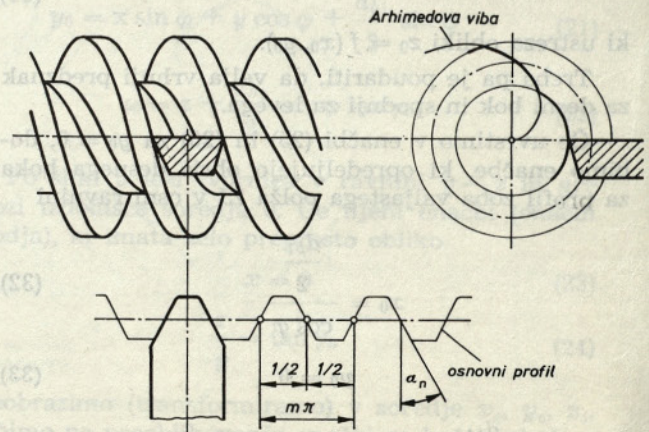
$$x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi = 0 \quad (46)$$

$$x_0 \sin \varphi \tan \alpha_n - y_0 \cos \varphi \tan \alpha_n + z_0 = p \operatorname{arc} \varphi \quad (47)$$

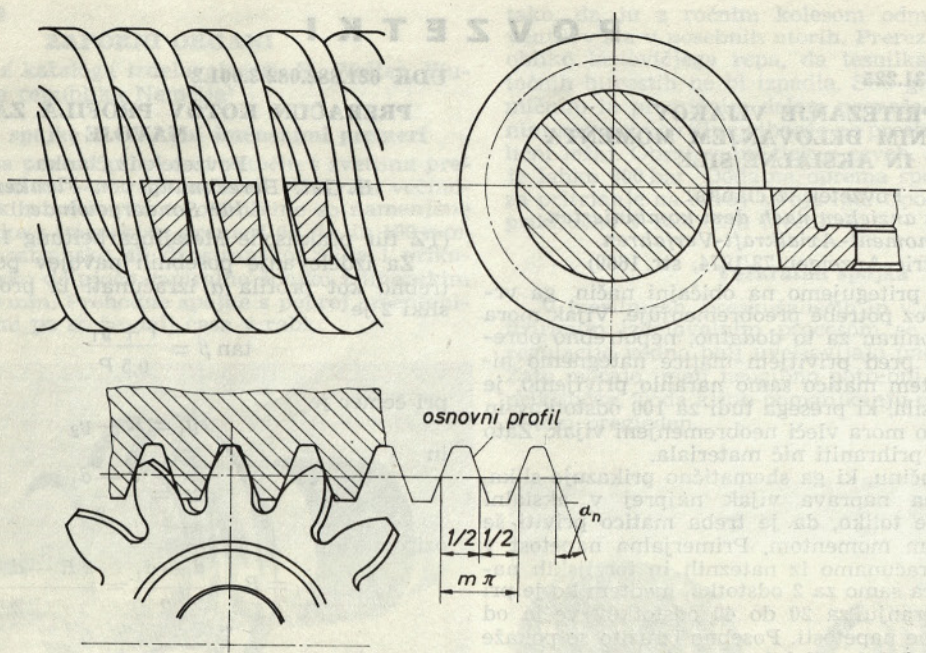
Če enačbo (46) pomnožimo z y_0 , enačbo (47) pa delimo s $\tan \alpha_n$, lahko iz obeh enačb izračunamo

$$\sin \varphi = \frac{\cot \alpha_n (x_0 p \operatorname{arc} \varphi - x_0 z_0)}{x_0^2 + y_0^2} \quad (48)$$

Iz enačb (46) in (47) pa lahko dobimo — če prvo pomnožimo z x_0 , drugo pa delimo kakor prej s $\tan \alpha_n$ — naslednjo obliko



Sl. 9. Struženje valjastega polža ZA



Sl. 10. Luščenje valjastega polža ZA

$$\cos \varphi = \frac{\cot \alpha_n (-y_0 p \operatorname{arc} \varphi + y_0 z_0)}{x_0^2 + y_0^2} \quad (49)$$

Enačbi (48) in (49) lahko izenačimo, če prvo pomnožimo s $\cos \varphi$, drugo pa s $\sin \varphi$. Izhaja

$$x_0 p \operatorname{arc} \varphi \cos \varphi - x_0 z_0 \cos \varphi = -y_0 p \operatorname{arc} \varphi \sin \varphi + y_0 z_0 \sin \varphi$$

Enačbo uredimo in dobimo

$$x_0 = \pm \sin \varphi \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad (50)$$

Podobno izhaja tudi

$$y_0 = \pm \cos \varphi \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad (51)$$

Pri tem velja pozitiven predznak za desni bok zoba. Z znanimi veličinami lahko sedaj izrazimo enačbo za bočno ploskev valjastega polža ZA v obliki

$$z_0 = z + p \operatorname{arc} \varphi = (-x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi) \tan \alpha_n + p \operatorname{arc} \varphi \quad (52)$$

Če uvrstimo za x_0 in y_0 vrednosti iz enačb (50) in (51), dobimo po ureditvi enačbo

$$z_0 = \mp \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \tan \alpha_n + p \operatorname{arc} \sin \left(\pm \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right) \quad (53)$$

Vrhni predznak velja za desni bok zoba, spodnji pa za levi bok zoba valjastega polža ZA.

Za obris boka zoba v osnem profilu dobimo preprosto

$$z_0 = \mp x_0 \tan \alpha_n \quad (54)$$

ali iz enačbe (53), če uvrstimo za $y_0 = 0$, pri čemer enačbo (54) razširimo za konstanten člen $p \pi/2$.

V drugih prereznih ravninah polža, ki so vzporedne z osno ravnino, obrisi zobnih bokov niso več premočrtni. V prerezu pravokotno na vijačnico so izbokli.

Valjaste polže ZA je mogoče izdelati:

- s struženjem ali
- s kotalnim luščenjem.

Pri struženju polža so rezalni robovi orodja, ki imajo obliko osnovnega profila, v osni ravnini (sl. 9). Debelina zoba orodja na srednjici je enaka debelini zoba osnovnega profila.

Pri kotalnem luščenju⁴ ima orodje obliko valjastega evolventnega zobnika⁵ s poševnimi zobmi (sl. 10). Nagibni kot bočnih črt je enak kotu srednje vijačnice polža γ_m . Rezalni robovi so v osni ravnini polža in z dopolnilnim gibanjem (kotaljenjem razdelnega kroga po razdelni premici) opišejo osnovni profil.

LITERATURA

- [1] Lindner, W.: Zahnräder II, Springer-Verlag, 1957.
- [2] Puhar, J.: Valjasti polži, Fakulteta za strojništvo Univerze v Ljubljani, 1974.
- [3] Wittig, K.H.: Archimedische Spiralschnecke als Sonderfall der angenäherten Spiralschnecke, Maschinenbautechnik 1967, št. 12, str. 631 ... 634.
- [4] *** Standard JUS M.C1.014.

Avtorjev naslov:

Jože Puhar, stroj. inž.,
Fakulteta za strojništvo
Univerze v Ljubljani

⁴ Luščenje je postopek odrezavanja, ko orodje odrezuje material s spiralnim rezom.

⁵ Pehalni zobnik po sistemu Fellows.