

UDK 512.3:539.4.011

Reševanje ravninskih elasto-plastičnih problemov z upoštevanjem napetostno deformacijskih zvez po Henckyevih enačbah*

BOGOMIL PERTOT

Uvod

Reševanje elasto-plastičnih problemov je tesno povezano z reševanjem nelinearnih diferencialnih enačb. Težave pri njihovem reševanju poskušamo prebroditi z uporabo iteracijskih metod. Uporaba teh metod za reševanje elasto-plastičnih problemov je prikazana v delu [1] oziroma [2], če napetostno deformacijsko zvezo upoštevamo po Reussovih enačbah. V tem članku pa je prikazana uporaba iteracijske metode za reševanje ravninskih elasto-plastičnih problemov z upoštevanjem napetostno deformacijskih zvez po Henckyevih enačbah. Postopek, ki je za to uporaben samo v primeru aktivnih obremenitev (obremenitev mora naraščati proporcionalno z nekim parametrom, tako da v materialu ne nastajajo razbremenitve), je v bistvu reševanje vrste elastičnih problemov pri upoštevanju dodatnih pogojev. Tako je problem reducirán na zaporedno reševanje več sistemov linearnih enačb.

1. Osnovne enačbe

V primerih, ko smemo vzeti, da velja za napetostni tenzor

$$\sigma_x = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1,1)$$

oziroma za deformacijski tenzor

$$\gamma_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (1,2)$$

ostale napetosti oziroma deformacije pa so samo funkcije koordinat x in y , pravimo, da pogoj (1,1) definira ravninsko napetostno stanje, pogoj (1,2) pa ravninsko deformacijsko stanje. Z upoštevanjem gornjih pogojev lahko Henckyeve enačbe za prostorsko stanje poenostavimo in jih formalno napišemo enako za ravninsko napetostno stanje kakor tudi za ravninsko deformacijsko stanje:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varphi (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \varphi (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= 2(1 + \nu) \varphi \tau_{xy} \end{aligned} \quad (1,3)$$

Upoštevati pa moramo pri ravninskem napetostnem stanju

$$\varphi = \frac{1}{E^*}, \quad \nu = \mu^* \quad (1,4)$$

pri ravninskem deformacijskem stanju pa

$$\varphi = \frac{1 - \mu^{*2}}{E^*}, \quad \nu = \frac{\mu^*}{1 - \mu^*} \quad (1,5)$$

V zgornjih enačbah smo vpeljali spremenljive parametre

$$E^* = \frac{3E}{2(1 + \mu)\psi + 1 - 2\mu}, \quad \mu^* = \frac{1 - \frac{1 - 2\mu}{\psi(1 + \mu)}}{2 + \frac{1 - 2\mu}{\psi(1 + \mu)}} \quad (1,6)$$

kjer je

$$\psi = G \frac{\gamma}{\tau} \quad (1,7)$$

ki podaja fizikalno zvezo med intenzivnostjo strižnih napetosti

$$\tau^2 = \frac{1}{3} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + a(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2] \quad (1,8)$$

oziroma intenzivnostjo strižnih deformacij

$$\gamma^2 = \frac{2}{3} [(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + b(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2] \quad (1,9)$$

Parametra a in b sta odvisna od vrste ravninskega stanja in sta za ravninsko napetostno stanje

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{3} \left(\frac{1 + \mu^*}{1 - \mu^*} \right)^2 \quad (1,10)$$

za ravninsko deformacijsko stanje pa

$$a = \frac{1}{3} (1 - 2\mu^*)^2; \quad b = \frac{1}{3} \quad (1,11)$$

E , G , μ v gornjih enačbah predstavljajo običajne parametre elastičnosti izbranega materiala. Tem enačbam dodamo še ravnotežni enačbi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (1,12)$$

geometrijske zveze med premiki in deformacijami

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1,13)$$

pa imamo zadostno število enačb za vse neznanke, če smo eksperimentalno določili fizikalno zvezo (1,7) za izbrani material. Fizikalna zveza ni odvisna od oblike napetostnega stanja, zato jo navadno določimo s pomočjo nateznega preskusa.

Načelno imamo, podobno kakor v elasto-mehaniki, za reševanje gornjih enačb dve možnosti:

a) reševanje zastavljenega elasto-plastičnega problema s premiki,

b) reševanje zastavljenega elasto-plastičnega problema z napetostmi.

* Članek je izvlečen iz obširnejše razprave, ki sta jo omogočila Sklad Borisa Kidriča in Fakulteta za strojništvo in bo v celoti objavljena v zborniku Fakultete za strojništvo.

Reševanje s premiki privede do dveh nelinearnih diferencialnih enačb za komponenti premikov, pri reševanju z napetostmi pa pridemo do treh nelinearnih diferencialnih enačb za komponente napetosti. Razen tega moramo pri reševanju z napetostmi upoštevati še kompatibilnostni pogoj

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (1,14)$$

Reševanje ravninskih problemov pa lahko prevedemo na eno samo nelinearno diferencialno enačbo, če lahko vpeljemo Airyjevo napetostno funkcijo, definirano z enačbami:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (1,15)$$

Tako definirane napetosti identično izpolnijo ravnotežna pogoja (1,12), če smemo vzeti, da so volumenske sile $X = Y = 0$. Napetostno funkcijo $F(x, y)$ pa moramo določiti tako, da izpolnimo kompatibilnostni pogoj (1,14). Z upoštevanjem enačb (1,15) v enačbah (1,3) in z vstavljanjem v enačbo (1,14) dobimo pogojno enačbo za iskano napetostno funkcijo:

$$\begin{aligned} & \varphi \nabla \nabla F + 2 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla F) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla F) \right] + \\ & + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (\nu \varphi)}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 (\varphi + \nu \varphi)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \\ & + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 (\nu \varphi)}{\partial x^2} \right] \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (1,16)$$

kjer smo upoštevali, da sta φ in ν funkciji koordinat ter krajše pisali

$$\begin{aligned} \nabla \nabla F &= \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \\ \nabla F &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1,17)$$

Parametra φ in ν lahko v načelu eliminiramo iz enačbe (1,16) tako, da ju izrazimo z napetostno funkcijo. Taka eliminacija pa pripelje do zelo komplicirane nelinearne parcialne diferencialne enačbe za napetostno funkcijo $F(x, y)$. V elastičnem področju, ko je $\nu \equiv 1$, sta φ in ν konstanti tako, da preide enačba (1,17) v znano biharmonično enačbo za reševanje ravninskih elastičnih problemov.

Splošno rešitev enačbe (1,16) pa moramo prilagoditi še robnim pogojem. Za robne pogoje, podane z napetostmi, izračunamo vrednosti napetostne funkcije in ustreznih odvodov na konturi integracijskega področja po enačbah:

$$\begin{aligned} F_r &= x \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_r + y \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_r + \int (x p_y - y p_x) ds \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_r &= - \int p_y ds, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_r = \int p_x ds \end{aligned} \quad (1,18)$$

Pri enkrat sovisnih območjih, ko izvedemo integracijo v enačbah (1,18) vzdolž ene same mejne konture, smemo vzeti poljubne integracijske konstante. Izbira le-teh pa pri večkrat sovisnih območjih, ko integriramo po več mejnih konturah, ni poljubna in jih moramo izbirati tako, da zagotovimo enoličnost premikov.

Verjetnost, da bomo prišli do rešitve enačbe (1,16) v zaključeni obliki pri poljubnem integracijskem območju, poljubni fizikalni zvezi (1,7) in upoštevanju enačb za φ in ν , je izredno majhna. Zato moramo pri zahtevnejših ravninskih problemih uporabiti iteracijske metode. Posebno ugodna za reševanje elasto-plastičnih problemov je metoda zaporednih elastičnih rešitev.

2. Metoda elastičnih rešitev

Z metodo elastičnih rešitev privedemo reševanje elasto-plastičnih problemov k zaporednemu reševanju linearnih elastičnih problemov z dopolnilnimi pogoji. Ta ideja je bila prvič predlagana v delu [3], nadaljnje razvitje metode pa je podano v delu [4]. Od tu povzemamo metodo elastičnih rešitev z upoštevanjem spremenljivih parametrov, kakršno smo uporabili v nadaljevanju.

Ker smemo proces aktivne deformacije elasto-plastičnega telesa obravnavati kakor pri nelinearnem elastičnem telesu, smemo narediti naslednji sklep: rešitev elasto-plastičnega problema prevedemo na reševanje ustreznega elastičnega problema s parametri elastičnosti, določenimi po enačbah (1,6).

Da se izognemo reševanju nelinearnih enačb, izvedemo reševanje z zaporednimi približki. V prvem koraku vzamemo $\psi \equiv 1$ in rešimo linearni elastični problem. Nato določimo $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ in $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$. Iz znanih deformacij izračunamo $\gamma^{(1)}$ in $\psi^{(1)}$ iz fizikalnega pogoja (1,7). Z novimi vrednostmi $\psi^{(1)}$ izračunamo nove parametre elastičnosti po enačbah (1,6) in v naslednjem (drugem) koraku rešimo linearno elastično nalogo z novimi parametri. Proces nadaljujemo tako dolgo, da je razlika med dvema zaporednima rešitvama v mejah želene natančnosti. Konvergenca postopka smemo pričakovati zaradi majhnih razlik med dvema zaporednima približkoma. Strog dokaz za konvergenčnost postopka za splošen primer ni znan, znan pa je dokaz konvergenca za konkretno nalogo v delu [5].

3. Diferenčna metoda za reševanje ravninskih elasto-plastičnih problemov

Metoda elastičnih rešitev s spremenljivimi elastičnimi parametri vodi do reševanja elastičnega linearnega problema s parametri φ in ν . Parametre φ in ν ter njune parcialne odvode, ki jih potrebujemo v enačbi (1,16), sicer izračunamo iz predhodnega koraka, moramo pa kljub temu v vsakem koraku reševati linearno parcialno diferencialno enačbo z nekonstantnimi koeficienti. Tako pri reševanju elasto-plastičnega problema z opisano metodo po-

novno zabredemo v matematične težave. Dodatno se lahko pojavijo težave pri izpolnjevanju robnih pogojev, pa imamo tudi z metodo elastičnih rešitev malo možnosti, da bi v posameznih korakih dosegli zaključene rešitve. Vsem tem težavam se izognemo z diferencialno metodo, ko nadomestimo reševanje diferencialne enačbe (1,16) z ustreznim sistemom diferencialnih linearnih enačb. Integracijsko območje po navadi prekrijemo s kvadratno mrežo in ustrezne parcialne odvode v enačbi (1,16) nadomestimo z diferencialnimi kvocienti. Tako nastalo diferencialno enačbo napišemo za vse točke integracijskega področja in tako prevedemo reševanje parcialne diferencialne enačbe na reševanje linearnega sistema algebrskih enačb. Rešitev problema, ki jo dobimo po tej poti, je sicer samo približna, je pa za tehniško prakso popolnoma uporabna.

Z diferencialnimi aproksimacijami za parcialne odvode dobimo iz enačbe (1,16) naslednjo diferencialno enačbo

$$\varphi_0 \left(\sum_9^{12} F_i + 2 \sum_5^8 F_i - 8 \sum_1^4 F_i + 20 F_0 \right) + \sum_0^{12} a_i F_i = 0 \quad (3,1)$$

kjer določimo koeficiente a_i iz predhodnega koraka po enačbah

$$a_0 = 8 [\varphi_0 (1 + \nu_0)] - 2 \sum_1^4 [\varphi_i (1 + \nu_i)]$$

$$a_1 = -2 [\varphi_0 (1 - \nu_0)] - \varphi_1 - \varphi_2 \nu_2 + 3 \varphi_3 - \varphi_4 \nu_4$$

$$a_2 = -2 [\varphi_0 (1 - \nu_0)] - \varphi_1 \nu_1 - \varphi_2 - \varphi_3 \nu_3 + 3 \varphi_4$$

$$a_3 = -2 [\varphi_0 (1 - \nu_0)] + 3 \varphi_1 - \varphi_2 \nu_2 - \varphi_3 - \varphi_4 \nu_4$$

$$a_4 = -2 [\varphi_0 (1 - \nu_0)] - \varphi_1 \nu_1 + 3 \varphi_2 - \varphi_3 \nu_3 - \varphi_4$$

$$a_5 = \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) - \frac{1}{8} \sum_5^8 (-1)^i \varphi_i (1 + \nu_i)$$

$$a_6 = -\frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4) + \frac{1}{8} \sum_5^8 (-1)^i \varphi_i (1 + \nu_i)$$

$$a_7 = -\frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) - \frac{1}{8} \sum_5^8 (-1)^i \varphi_i (1 + \nu_i)$$

$$a_8 = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4) + \frac{1}{8} \sum_5^8 (-1)^i \varphi_i (1 + \nu_i)$$

$$a_9 = \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_3) \quad (3,2)$$

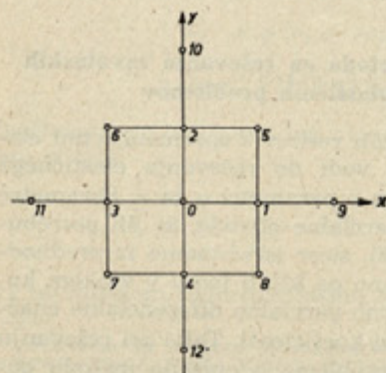
$$a_{10} = \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_4)$$

$$a_{11} = -\frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_3)$$

$$a_{12} = -\frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_4)$$

V enačbah (3,1) in (3,2) so označbe za posamezne točke razvidne s slike 1.

Iz zgradbe enačbe (3,1) in enačbe (3,2) za koeficiente a_i ugotovimo brez težav, da preide le-ta pri



Slika 1

konstantnem ν in φ v znano aproksimacijo za biharmonično enačbo. Zato nastavljanje diferencialnih enačb za vse točke integracijskega področja ne povzroča težav, saj velja enačba (3,1) tudi v elastičnem področju, če upoštevamo za točke elastičnega področja $\psi \equiv 1$.

4. Praktična uporaba diferencialne metode

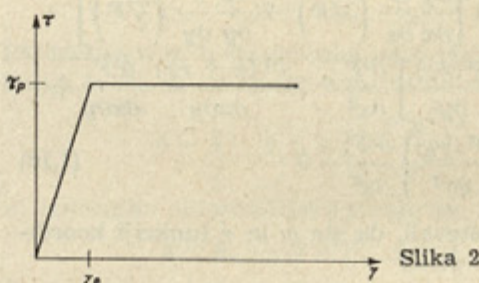
Praktično uporabo opisane metode bomo prikazali pri reševanju konkretne naloge. Odločili smo se za znano nalogo nateznega preskušanca z dvojno zarezo V, za katero so iz literature znane rešitve z različnimi metodami in je možno primerjanje dobljenih rezultatov.

Pri reševanju smo upoštevali, da je material idealno elasto-plastičen, tako da velja naslednja fizikalna zveza:

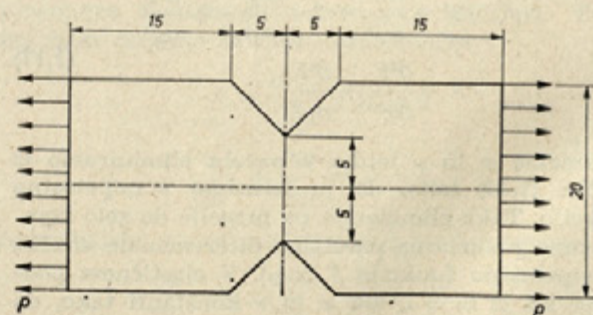
$$\begin{aligned} \gamma &\leq \gamma_e & \tau &= G \cdot \gamma \\ \gamma &> \gamma_e & \tau &= \tau_p = \text{konst} \end{aligned}$$

Z γ_e smo označili največjo elastično intenzivnost strižnih deformacij, s τ_p pa intenzivnost strižnih napetosti, ki določajo mejo plastičnosti. Diagram γ, τ za idealno elasto-plastičen material je prikazan na sliki 2.

Dimenzije preskušanca so razvidne s slike 3.



Slika 2



Slika 3

Dvojna simetrija integracijskega področja omogoča, da pri reševanju upoštevamo samo četrtino integracijskega področja. V nadaljnjem računu smo sponirali ravninsko stanje deformacij in nestisljiv material tako, da na osnovi enačb (1,6) dobimo:

$$\varphi = \frac{3}{4} \frac{\psi}{E}; \quad \nu = 1 \quad (4,1)$$

iz enačb (1,8) in (1,11) pa:

$$\tau^2 = \frac{1}{8} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2] \quad (4,2)$$

