

UDK 539.374

Analitična interpretacija krivulje plastičnosti ter vpliv plastične anizotropije

FRANC GOLOGRANC

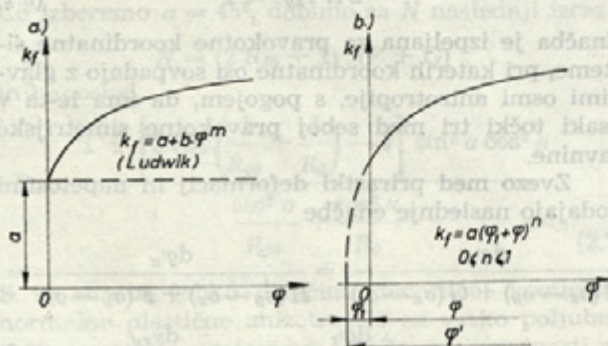
Uvod

Pri reševanju osnovnih enačb plastomehanike preoblikovalnih procesov se pojavlja kot spremenljivka preoblikovalna trdnost, ki je značilna lastnost realno plastičnih kovin. Definicija krivulje plastičnosti, ki ponazarja zvezo med preoblikovalno trdnostjo ali efektivnimi plastičnimi napetostmi in plastičnimi deformacijami pri določenih preoblikovalnih pogojih, je podana v [1]. V tem članku pa so nakazane možnosti za analitično interpretacijo krivulje plastičnosti za izotropne kovine, ki se med preoblikovanjem utrjujejo, ter vpliv parametrov plastične anizotropije na pogojne enačbe plastičnosti in funkcijo utrjanja materiala.

1. Analitična aproksimacija krivulje plastičnosti

Za ponazoritev dejanskega poteka utrjevalne funkcije $k_f = F(\varphi)$ pri predvidenih preoblikovalnih pogojih je potrebno po navadi določeno število eksperimentalnih vrednosti. Večkratna ponovitev preskusov pa kaže vedno manjše ali večje trosenje rezultatov, tako da je neko povprečno vrednost mogoče dobiti le, če podatke iz vrednotimo statistično. Iz poskusov določena krivulja plastičnosti seveda na splošno ni matematično definirana. Vendar je za praktično uporabo zelo koristno, če lahko podamo funkcijo tudi v analitični obliki, s čimer lahko zmanjšamo obseg potrebnih eksperimentov. Žal obnašanja kovin pri preoblikovanju ni mogoče izraziti s preprostimi — npr. linearnimi ali bilinearnimi — analitičnimi modeli, predvsem zaradi številnih strukturnih vplivov, ki so pogojeni s kemijsko sestavo, velikostjo zrn, poprejšnjo utrditvijo, teksturo, Bauschingerjevim efektom ipd., ter toplotno-časovnimi vplivi, ki izhajajo iz načina preoblikovanja. Ludwik [2] je predlagal kot aproksimacijo potenčno funkcijo (slika 1 a)

$$k_f = a + b \cdot \varphi^m \quad (1.1)$$



Sl. 1. Analitična interpretacija krivulje plastičnosti

ki pa se za zdaj uporablja skoraj izključno v preprostejši obliki [3] (slika 2)

$$k_f = k_{f0} \cdot \varphi^n \quad (1.2)$$

Pri tem karakterizira konstanta k_{f0} lego krivulje (deformacijsko trdnost pri $\varphi = 1,0$) v koordinatnem sistemu, eksponent n pa vzpon krivulje in s tem intenzivnost utrjanja materiala.

Ta funkcija se prav dobro ujema z eksperimentalno krivuljo plastičnosti pri žarjenih homogenih materialih, npr. pri nelegiranih in malo legiranih ogljikovih jeklih, aluminiju in bakru, zlasti če ne upoštevamo področja v neposredni okolici meje plastičnosti.

Krivulje plastičnosti heterogenih kovin z visoko mejo elastičnosti oziroma pri kovinah, ki so poprej utrjene, s tako funkcijo ni mogoče opisati, razen v primeru, če upoštevamo tudi stopnjo poprejšnje deformacije φ_1 , ki pa je največkrat neznan (slika 1 b). Tako dobi enačba (1.2) obliko

$$k_f = a (\varphi_1 + \varphi)^n \quad (1.3)$$

vendar je pri materialih z izrazito mejo plastičnosti prvi izraz ustrežnejši. V določenih primerih (nerjavno jeklo, baker, med) se ujema krivulja plastičnosti ali vsaj njen del s potenčno funkcijo

$$k_f = k_{f0}' \cdot \varepsilon^n \quad (1.4)$$

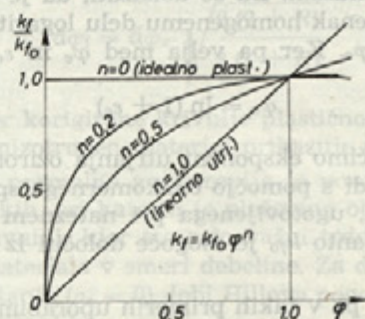
kjer so: ε — glavna specifična deformacija,

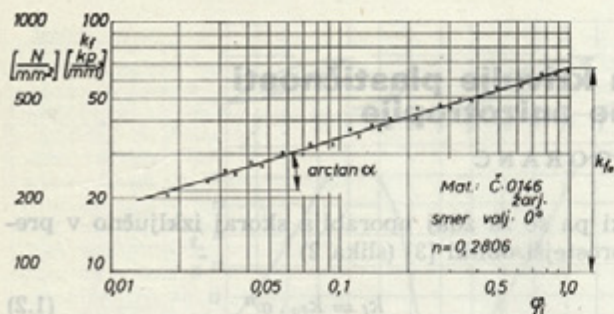
k_{f0}' — deformacijska trdnost pri $\varepsilon = 1$,

n' — koeficient utrditve.

Potenčna funkcija ima to prednost, da dobijo krivulje plastičnosti, ki ustrezajo enačbi (1.2), v dvojno logaritemskem merilu obliko premice

$$\log k_f = \log k_{f0} + n \log \varphi \quad (1.5)$$

Sl. 2. Aproksimacija krivulje plastičnosti s potenčno funkcijo $k_f = a \cdot \varphi^n$



Sl. 3. Krivulja plastičnosti (sl. 2) v log-log diagramu

kar zelo olajšuje statistično obdelavo eksperimentalnih podatkov. Gornjo premico, slika 3, lahko namreč izenačimo z regresijsko premico, tj. po metodi najmanjših kvadratov izračunano premico, pri kateri je vsota kvadratov pri odstopkih dejanskih vrednosti od vrednosti na premici najmanjša. Koefficienta $\log k_{f0}$ in n dobimo iz sistema dveh pogojnih enačb

$$\log k_{f0} \cdot m + n \sum_{i=1}^m \log \varphi_i = \sum_{i=1}^m \log k_{fi} \quad (1.6)$$

$$\log k_{f0} \sum_{i=1}^m \log \varphi_i + n \sum_{i=1}^m (\log \varphi_i)^2 = \sum_{i=1}^m (\log k_{fi} \cdot \log \varphi_i) \quad (1.7)$$

kjer sta: m — število eksperimentalno določenih točk, $k_{fi} = F(\varphi_i)$.

S korelacijsko analizo lahko določimo, kako močna je povezava med izbrano funkcijo in srednjo vrednostjo krivulje plastičnosti. Čim večji je koeficient korelacije r ($-1 < r < +1$), tem boljša je povezava med eksperimentalnimi podatki ter izbrano funkcijo.

Iz enačbe premice lahko povzamemo, da zadoščata za določitev krivulje plastičnosti v določenih primerih samo dve točki ali ena točka in naklon premice, pri čemer je $\tan \alpha = n$, ki ga lahko ugotovimo s poskusom. Da se dokazati, da je eksponent utrditve n enak homogenemu delu logaritemske deformacije φ_e . Ker pa velja med φ_e in ε_e razmerje

$$\varphi_e = \ln(1 + \varepsilon_e)$$

lahko določimo eksponent utrjanja oziroma naklon premice tudi s pomočjo enakomernega specifičnega raztezka ε_e , ugotovljenega pri nateznem preskusu. Tudi konstanto k_{f0} je mogoče določiti iz nateznega preskusa.

Lahko pa v takih primerih uporabimo za določitev poteka krivulje plastičnosti tudi natezno trdnost materiala s tem, da izračunamo eno točko krivulje, in sicer iz maksimalne sile in dejanskega pre-

reza epruvete v trenutku plastične nestabilnosti [3]. Tako dobi enačba za krivuljo plastičnosti obliko

$$k_f = \sigma_m \left(\frac{e \varphi}{n} \right)^n \quad (1.8)$$

Iz tega izhaja, da imajo praktični pomen vse tiste preskusne veličine, ki so neposredno zajete v enačbah za krivuljo plastičnosti, to sta predvsem parametra k_{f0} in n , ki sta glavni značilnici za mehanske lastnosti materiala. Eksponent utrjanja n vpliva ne samo na potek krivulje plastičnosti, temveč v večji ali manjši meri tudi na preoblikovalne sposobnosti materiala.

Opisane funkcije kažejo, da upošteva samo Ludwikova formula poprejšnjo utrjenost materiala, drugih vplivov pa tudi ne. Ker ostalih strukturnih in temperaturnih vplivnih veličin matematično za zdaj ni mogoče zajeti, jih moramo ugotavljati eksperimentalno.

2. Anizotropni kriterij plastičnosti

Pogoj za doseganje eksaktnih eksperimentalnih vrednosti pri ugotavljanju funkcije F [1] je enolična določljivost primerjalne napetosti in deformacije. Ker dopuščajo npr. tanke pločevine le določene vrste obremenitev in oblike preskušancev, so za ugotavljanje krivulje plastičnosti pri teh primerne le nekatere oziroma posebne preskusne metode. Napetostno stanje pri preoblikovanju pločevine pa je v veliki meri odvisno tudi od geometrične in teksturne anizotropije preoblikovanega materiala [4].

Analogno Huber-Misesovemu pogoju za tečenje izotropnih materialov je Hill [5] definiral plastični potencial (efektivno napetost) za anizotropne materiale v obliki homogene kvadratne enačbe s šestimi parametri anizotropije. Pri preoblikovanju pločevine so od teh važni le štirje, med katerimi so trije neodvisni. Ti trije parametri naj bi v splošnem zadoščali za definicijo anizotropnega stanja pri pločevinah. S temi parametri dobi pogojna enačba za tečenje pri dvoosnem napetostnem stanju (v ravnini pločevine) naslednjo obliko

$$(G + H) \sigma_x^2 - 2H \sigma_x \sigma_y + (H + F) \sigma_y^2 - 2N \tau_{xy}^2 = 1 \quad (2.1)$$

Enačba je izpeljana za pravokotne koordinatne sisteme, pri katerih koordinatne osi sovpadajo z glavnimi osmi anizotropije, s pogojem, da ima le-ta v vsaki točki tri med seboj pravokotne simetrijske ravnine.

Zvezo med prirastki deformacij in napetostmi podajajo naslednje enačbe

$$\frac{d\varphi_x}{H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)} = \frac{d\varphi_y}{H(\sigma_y - \sigma_x) + F(\sigma_y - \sigma_z)} = \frac{d\varphi_z}{F(\sigma_z - \sigma_y) + G(\sigma_z - \sigma_x)} = \frac{d\gamma_{xy}}{N \tau_{xy}} \quad (2.2)$$

kjer so: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — normalne napetosti v smeri osi x, y in z

τ_{xy} — tangencialna napetost v ravnini xy ,

H, G, F in N — parametri anizotropije, $d\varphi_x, d\varphi_y, d\varphi_z, d\varphi_{xy}$ — prirastki normalnih in strižnih deformacij.

Z uporabo enačbe za koeficient plastične anizotropije R za določeno smer izreza dobimo [4]

$$R_x = \frac{d\varphi_y}{d\varphi_x} = \frac{H(\sigma_y - \sigma_x) + F(\sigma_y - \sigma_z)}{F(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)} \quad (2.3)$$

$$R_y = \frac{d\varphi_x}{d\varphi_z} = \frac{H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)}{F(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)}$$

Za enoosno obremenitev σ_x v smeri valjanja ($\alpha = 0^\circ$) ali σ_y pravokotno na smer valjanja ($\alpha = 90^\circ$) preideta gornji enačbi v

$$\frac{d\varphi_y}{d\varphi_x} = \frac{\varphi_y}{\varphi_x} = R_x \quad \text{in} \quad \frac{d\varphi_x}{d\varphi_z} = \frac{\varphi_x}{\varphi_z} = R_y$$

oziroma

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{H}{G} \\ R_{90} &= \frac{H}{F} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Pri tem je $R_\alpha = \ln \frac{b_0}{b} / \ln \frac{s_0}{s}$ za vsakokratno smer

izreza in α — kot med smerjo vzdolžne osi preskusnega vzorca in smerjo valjanja.

Za poljuben kot α , pod katerim izrežemo preskusni vzorec iz pločevine glede na smer valjanja, velja

$$R_\alpha = \frac{H + (N - F - G - 4H) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{F \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha} \quad (2.5)$$

Iz te enačbe lahko določimo še parameter N

$$N = \frac{R_\alpha(F \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha) + (F + G + 4H) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - H}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \quad (2.6)$$

Če izberemo $\alpha = 45^\circ$, dobimo za N naslednji izraz

$$N = (2R_{45} + 1) \cdot (F + G)$$

in naposled

$$R_\alpha = \frac{1 + \left[2R_{45} \left(\frac{1}{R_{90}} + \frac{1}{R_0} \right) - 4 \right] \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\frac{\sin^2 \alpha}{R_{90}} + \frac{\cos^2 \alpha}{R_0}} \quad (2.7)$$

S to enačbo lahko določimo teoretični koeficient normalne plastične anizotropije za vsako poljubno smer izreza, če ugotovimo s poskusom vrednosti za R_0, R_{45} in R_{90} .

Material je popolnoma izotropen samo, če je

$$R_0 = R_{45} = R_{90} = 1$$

Po navedenih enačbah je mogoče določiti razmerja med plastičnimi napetostmi v smeri valjanja, pravokotno na smer valjanja ter v smeri normale (= debeline ozir. z -osi)

$$\sigma_x = \sigma_y \sqrt{\frac{H+F}{H+G}} = \sigma_y \sqrt{\frac{R_x(1+R_y)}{R_y(1+R_x)}} \quad (2.8)$$

$$\sigma_x = \sigma_z \sqrt{\frac{G+H}{G+F}} = \sigma_z \sqrt{\frac{R_y(1+R_x)}{R_x+R_y}}$$

oziroma za poljubno smer

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot \sqrt{\frac{R_y(1+R_x)}{(R_x \sin^2 \alpha + R_y \cos^2 \alpha)(R_\alpha + 1)}} \quad (2.9)$$

Analogno lahko dobimo tudi razmerja med deformacijami v posameznih smereh.

Materiali, pri katerih $R_0 = R_{90} = R_{45} \neq 1$, kažejo večjo ali manjšo normalno anizotropijo $R \neq 1$, v ravnini pločevine pa so izotropni ($\Delta R \approx 0$). Če ΔR ni prevelik oziroma če je anizotropnost v ravnini pločevine simetrična glede na njeno normalo in izrazimo stopnjo normalne anizotropije s koeficientom R , se enačba (2.8) poenostavi

$$\sigma_x = \sigma_z \sqrt{\frac{1+R}{2}} \quad (2.10)$$

Plastična napetost v smeri debeline je lahko torej večja ali manjša kakor v ravnini pločevine, glede na to, ali je $R \geq 1$. Pri pločevini z ortogonalno simetrično anizotropijo ($R_x = R_y = R$) dobimo krivuljo plastičnosti po Hillovem kriteriju za plastičnost [5] npr. iz enoosnega nateznega preskusa v smeri x -osi ($\sigma_x, \sigma_y = \sigma_z = 0$), pri čemer velja

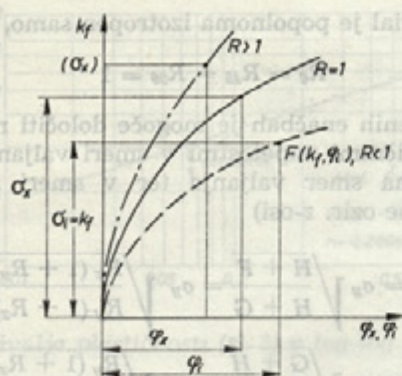
$$k_I = \sigma_x \sqrt{\frac{3(1+R)}{2(2+R)}} \quad (2.11)$$

$$d\varphi_I = d\varphi_x \sqrt{\frac{2(2+R)}{3(1+R)}} \quad (2.12)$$

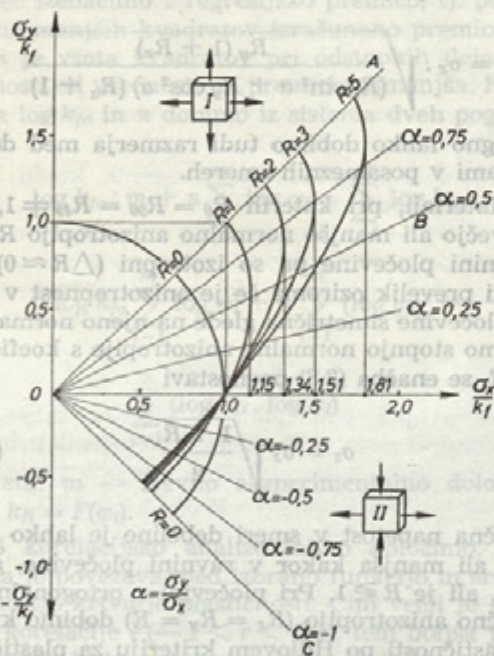
Primer korigirane krivulje plastičnosti za ortogonalno anizotropen material prikazuje slika 4.

Vpliv normalne anizotropije je posebno očiten pri postopkih, pri katerih je pločevina obremenjena samo v ravnini, kjer sta zelo važni trdnost in plastičnost materiala v smeri debeline. Za dvoosno napetostno stanje ($\sigma_z = 0$) dobi Hillova pogojna enačba plastičnosti obliko

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y \left(\frac{2R}{R+1} \right) = k_I^2 \quad (2.13)$$



Sl. 4. Vpliv normalne anizotropije na krivuljo plastičnosti ($R \leq 1$)

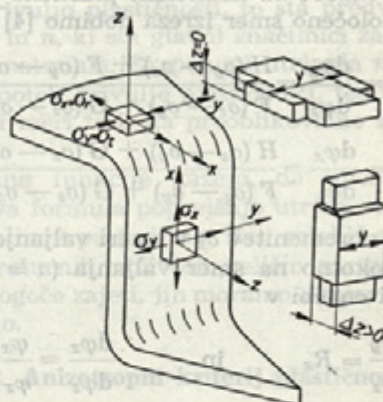


Sl. 5. Mejne krivulje tečenja za anizotropni material pri različnih vrednostih R in različnih ravninskih napetostnih stanjih

in predstavlja enačbo elips za različne parametre R , ki so grafično prikazane na sliki 5. Diagram zajema večino praktično možnih obremenitev. Posledica normalne anizotropije je, da se elipse pri $R > 1$ raztezajo, pri $R < 1$ pa krčijo v smeri velike osi OA. Pri $R = 1$ preide krivulja tečenja v Misesovo elipso plastičnih napetosti. Praktično te krivulje nimajo tako pravilne oblike, ker anizotropno stanje pločevin navadno ni simetrično.

S slike 5 je razvidno, da povzroča normalna anizotropija $R > 1$ glede na predznak obeh napetosti σ_x in σ_y in njuno medsebojno razmerje določeno utrditev (ali zmanjšanje trdnosti) materiala v x, y -ravnini. Ta tako imenovana teksturna utrditev (*texture hardening*) je možna le, če je pločevina teksturno anizotropna [6]. Pri dvoosni natezni (po-

zitivni) obremenitvi v smeri x in y osi (I. kvadrant) se deformacijski odpor pri večjih vrednostih R močno poveča, medtem ko se pri kombiniranem natezno-tlačnem napetostnem stanju (II. kvadrant) celo nekoliko zmanjša. Zato večji koeficient R zelo ugodno vpliva na vlečne lastnosti npr. pri globokem vlečenju, in sicer s povečano deformacij-



Sl. 6. Napetosti in deformacije pri globokem vleku

sko trdnostjo v steni vlečenca ter zmanjšanim deformacijskim odporom v prirobnici, slika 6. Ugotovljeno je, da mejno vlečno razmerje z naraščanjem koeficienta anizotropije raste, vendar kvantitativna zveza med obema veličinama ni še docela razjasnjena. Uporabnost Hillovega kriterija plastičnosti za anizotropne materiale je doslej eksperimentalno potrjena le pri materialih z majhno planarno anizotropijo oziroma če je anizotropno stanje rotacijsko simetrično glede na normalo pločevine in se med preoblikovanjem ne spreminja. Ta čas pa še nimamo popolnejše anizotropne teorije plastičnosti, ki bi upoštevala zapletenost mehanizma hladnega utrjevanja ter značilnosti kristalografske zgradbe realnih kovin.

LITERATURA

- [1] Gologranc, F.: Opredelitev krivulje plastičnosti pri izotropnem utrjevanju materiala. Strojniški vestnik, 19 (1973), str. 71—75.
- [2] Ludwik, P.: Elemente der technologischen Mechanik. Springer Verlag, Berlin, 1909.
- [3] Panknin, W., Shawki, G. S. A.: Zusammenhang zw. Fließkurve und Werkstoffkennwerten bildsamer metallischer Werkstoffe. Z. Metallkunde 52 (1961), 7, 495.
- [4] Gologranc, F.: O pomenu snovnih in tehnoloških karakteristik pri hladnem preoblikovanju tanke pločevine. Stroj. Vest. 19 (1973), 1, str. 5—12.
- [5] Hill, R.: A Theory of Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals. Proc. Roy. Soc. (London), 193 (1948), 281.
- [6] Backofen, W. A., Hosford, W. F., Burke, I. J.: Texture Hardening. Trans. ASM 55 (1962), s. 264.

Avtorjev naslov:

doc. dipl. ing. Frane Gologranc,
Fakulteta za strojništvo
Univerze v Ljubljani