YU — ISSN 0039—2480

STROJNIŠKI VESTNIK

LETNIK 22 LJUBLJANA, JULIJ—AVGUST 1976 ŠTEVILKA 7—8

UDK 624.073.12

Prispevek k reševanju drugega robnega problema pri steni z luknjo

FRANC KOSEL — MARKO ŠKERLJ

Članek obravnava reševanje napetosti in deformacij v okolici luknje poljubne oblike, s katero je oslabljena neskončna stena, pri predpostavki, da so na robu luknje vnaprej predpisane velikosti premikov (drugi robni problem). V obeh tu obdelanih primerih je vzeto, da so premiki na robu luknje proporcionalni koordinatam robnih točk. Za ilustracijo numeričnega računa sta narisana diagrama poteka napetosti v okolici eliptične in pravokotne luknje.

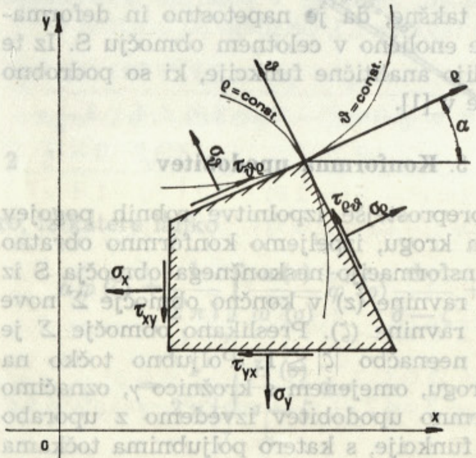
1. Uvod

Doslej je znanih že mnogo rešitev napetostnih in deformacijskih stanj v dvakrat povezani steni. Večina rešenih primerov so rešitve prvega robnega problema, kjer so predpisane zunanje obremenitve na konturi luknje in v točkah, ki so od nje zelo oddaljene. Mnogo manj pa je doslej znanih rešitev za napetosti in deformacije v steni z luknjo, kjer so na konturi luknje predpisani premiki. Takšni primeri so v praksi tudi pogosti. Preprost primer takega stanja dobimo, če si zamislimo, da je v luknjo stene vtisnjeno togo telo.

Mnogokrat je v praksi takšno togo telo pravokotne ali okrogle oblike, zaradi česar obravnava članek eliptično luknjo, ki v posebnem primeru preide v krožnico in luknjo pravokotne oblike. Za rešitev tega problema uporabljamo Mushelišvilijevo metodo [1], ki obravnava elastostatično ravninsko napetostno stanje v steni z uporabo analitičnih funkcij kompleksne spremenljivke. To metodo lahko uporabimo, tako da osrednjo ravnino stene položimo v kompleksno ravnino (z) s koordinatnim začetkom v težišču luknje. Tako izbrana lega kompleksne ravnine (z) v steni omogoča uporabo konformne in obratno enolične preslikave poljubne sklenjene krivulje, ki pomeni presek konture luknje s kompleksno ravnino (z), na enotski krog. Preostalo neskončno območje stene pa lahko preslikamo v notranjost ali zunanjost enotskega kroga, tako da osrednja ravnina stene leži zopet v novi kompleksni ravnini (ζ). V kompleksni ravnini (ζ) rešimo drugi robni problem s Cauchyjevimi integrali, ki omogočajo, da izračunamo funkcijske vrednosti analitičnih funkcij v območju stene, kadar so zvezne na sklenjeni krivulji, ki steno omejuje.

2. Osnovne enačbe

V kompleksno ravnino (z), ki jo tvorita koordinatni osi x in y, položimo osrednjo ravnino stene, tretja koordinatna os Z desnoročnega kartezijevega koordinatnega sistema pa leži pravokotno na steno. V izbranem koordinatnem sistemu lahko kompleksne sestave komponent tenzorja ravninskega stanja napetosti (sl. 1) in vektorja pomika izrazimo z dve-



Slika 1

ma analitičnima funkcijama $\varphi_1(z)$ in $\psi_1(z)$ v skladu z izvajanji v [1], ki sta zelo prikladni za reševanje v kompleksni ravnini (z).

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2\,[\varphi_1(z) + \overline{\varphi_1(z)}] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2\,i\,\tau_{xy} &= 2\,[\bar{z}\,\varphi_1(z) + \psi_1'(z)] \qquad (1) \\ \frac{E}{1-\nu}(u + i\,v) &= \varkappa\,\varphi_1(z) - z\,\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} \end{aligned}$$

kjer so s črtico označeni odvodi funkcij po spremenljivkah z in $\bar{z}$, konstanta ν je Poissonovo število, konstanta E Youngov modul elastičnosti, konstanta ob analitični funkciji pa je v primeru ravninskega stanja napetosti enaka

$$\varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu} \qquad (2)$$

Z analitično funkcijo $\psi_1(z)$ smo označili prvi odvod funkcije $\chi_1(z)$ po kompleksni spremenljivki (z).

Reševanje elastostatičnih problemov sloni na formulaciji osnovnih robnih problemov na robu

L območja S. Območje S je presek osrednje ravnine stene s kompleksno ravnino (z). Na vsakem robu morajo biti komponente vektorja napetosti v ravnotežju z zunanjimi obremenitvami, komponente vektorja premika pa morajo zadoščati robnim vrednostim.

Ker se bomo v tem članku omejili le na obravnavanje sten z eno luknjo, ki ima na svojem robu predpisane komponente vektorja premika, izrazov za prvi robni problem ne navajamo.

Kompleksni sestav komponent vektorja premika na robu L območja S, ki predstavlja drugi robni problem, ima naslednjo obliko:

$$\varkappa\, \varphi_1(t) - t\, \overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)} = \frac{E}{1-\nu}\left[g_1(s) + i\, g_2(s)\right] \tag{3}$$

kjer smo s t označili poljubno robno točko na robu L, s funkcijama $g_1(s)$ in $g_2(s)$ pa premik robnih točk v smeri osi x in y.

Analitični funkciji $\varphi_1(z)$ in $\chi_1(z)$ in funkcija $\psi_1(z)$ morajo biti takšne, da je napetostno in deformacijsko stanje enolično v celotnem območju S. Iz te zahteve sledijo analitične funkcije, ki so podrobno obravnavane v [1].

3. Konformna upodobitev

Zaradi preprostejše izpolnitve robnih pogojev na enotskem krogu, izpeljemo konformno obratno enolično transformacijo neskončnega območja S iz kompleksne ravnine (z) v končno območje Σ nove kompleksne ravnine (ζ). Preslikano območje Σ je določeno z neenačbo $|\zeta| \leqq 1$. Poljubno točko na enotskem krogu, omejenem s krožnico γ, označimo s σ. Konformno upodobitev izvedemo z uporabo preslikovne funkcije, s katero poljubnima točkama ζ in $\bar{\zeta}$ v kompleksni ravnini (ζ) obratno enolično priredimo točki z in $\bar{z}$ v kompleksni ravnini (z).

$$z = x + i\,y = r e^{i\alpha} = \omega(\zeta) = \omega\left[\varrho\, e^{i\vartheta}\right] = \sum_{k=m}^{m_1} c_k \zeta^k \tag{4}$$

Kompleksni sestavi komponent tenzorja napetosti (1), ki jih izrazimo v polarnih koordinatah (sl. 1), zapisanih v novi kompleksni ravnini (ζ), imajo naslednjo obliko:

$$\sigma_\varrho + \sigma_\vartheta = 2\left[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}\right] \tag{5}$$

$$\sigma_\vartheta - \sigma_\varrho + 2\,i\,\tau_{\varrho\vartheta} = \frac{2\,\zeta^2}{\varrho^2\,\omega'(\zeta)}\left[\overline{\omega(\zeta)}\,\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\,.\,\Psi(\zeta)\right]$$

$$\frac{E}{1+\nu}(u_\varrho + i\,u_\vartheta) = \frac{\overline{\omega'(\zeta)}\,\bar{\zeta}}{|\omega'(\zeta)|\,\varrho}\left[\varkappa\,\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\,\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}\right]$$

Pri tem pomenijo:

$$\varphi_1(z) = \varphi(\zeta) \qquad \psi_1(z) = \psi(\zeta) \tag{6}$$

$$|\omega'(\zeta)| = \sqrt{\omega'(\zeta)\,\overline{\omega'(\zeta)}}$$

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \qquad \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

kjer so s črtico označeni odvodi funkcij po kompleksnih spremenljivkah ζ in $\bar{\zeta}$.

Če označimo točke na konturi območja Σ v novi kompleksni ravnini (ζ) z $\sigma \in \gamma$, oziroma v polarnih koordinatah $\sigma = e^{i\vartheta}$, potem ima drugi robni problem (3) v tej ravnini naslednjo obliko:

$$a\,\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{(\omega)'(\sigma)}}\,\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = H(\sigma) \tag{7}$$

kjer smo vpeljali naslednji zamenjavi:

$$a = -\varkappa$$

$$H(\sigma) = -\frac{E}{1+\nu}\left[g_1(s) + i\,g_2(s)\right] \tag{8}$$

Robni pogoj (7) je izhodiščna enačba za reševanje obravnavanega problema. Z rešitvijo robnega problema določimo analitični funkciji $\varphi(\zeta)$ in $\psi(\zeta)$ in iz enačb (6) tudi analitični funkciji $\Phi(\zeta)$ in $\Psi(\zeta)$, s tem pa je popolnoma podano napetostno in deformacijsko stanje v steni. V nadaljevanju bomo rešitev drugega robnega problema iskali s Cauchyjevimi integrali [1].

4. Rešitve stene z eliptično luknjo

Obravnavajmo primer stene, katere osrednja ravnina je dvakrat povezano neskončno območje. Vzemimo notranjo konturo eliptično (sl. 2), na kateri predpišimo komponenti vektorja premika v odvisnosti od kompleksne spremenljivke z na naslednji način:

$$g_1(s) + i\,g_2(s) = \varepsilon\, t;\ t \in L \tag{9}$$

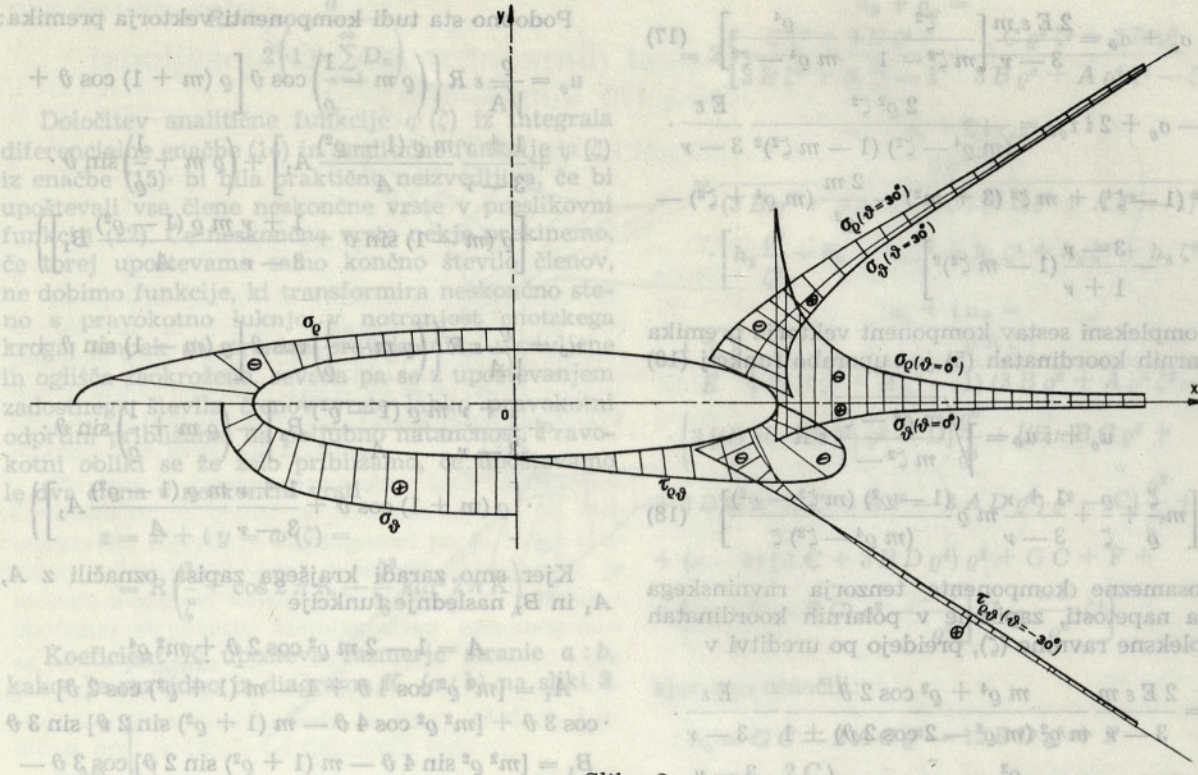
Konstanta ε pomeni proporcionalnostni faktor, ki določa velikostni red premikov. Komponente vektorja premika v neskončni točki so enake nič.

Neskončno območje stene S z eliptično luknjo komformno preslikamo s preslikavno funkcijo

$$z = x + i\,y = \omega(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + m\,\zeta\right) \tag{10}$$

$$R = \frac{a+b}{2} > 0 \quad \text{in} \quad 0 \leqq m = \frac{a-b}{a+b} \leqq 1$$

v kompleksno ravnino (ζ), kjer osrednja ravnina stene zavzame preprosto enkrat povezano končno območje Σ, definirano z neenačbo $|\zeta| \leqq 1$, ki ga omejuje krožnica z enotskim radijem. S primerno izbiro parametrov R in m, ki sta odvisna od polosi, lahko poljubno oblikujemo eliptično konturo luknje od krožnice, kjer prejme parameter m vrednost nič



Slika 2

in je polmer kroga enak R, do zareze vzdolž osi x velikosti $2R$, parameter m pa prejme največjo vrednost enako eni.

Robni pogoj (7) drugega robnega problema na enotskem krogu množimo s členom

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{11}$$

in nato integriramo po enotskem krogu $|\zeta| = 1$, ki nas privede k funkcionalni enačbi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\alpha\,\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} - H(\sigma)\right]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = 0 \tag{12}$$

Analitični funkciji $\varphi(\zeta)$ in $\psi(\zeta)$, ki prejmeta na krožnici γ robni vrednosti $\varphi(\sigma)$ in $\psi(\sigma)$, morata biti holomorfni v območju Σ in zvezni v območju in na krožni meji območja. Kadar obravnavamo območje Σ znotraj enotskega kroga $|\zeta| \leqq 1$, lahko zapišemo holomorfni analitični funkciji v obliki neskončnih vrst:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k\,\zeta^k$$
$$\psi(\zeta) = \sum_{k=0}^{k=\infty} b_k\,\zeta^k \tag{13}$$

Z upoštevanjem lastnosti holomorfnih funkcij na robu [1], preide funkcionalna enačba (12) v obliko, iz katere lahko

$$\alpha\,\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\varphi'(\sigma)}\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} + \bar{b}_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{H(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,d\sigma \tag{14}$$

določimo obliko funkcije $\varphi(\zeta)$ pri znani preslikovni funkciji $\omega(\sigma)$ in predpisanem pogoju na robu $H(\sigma)$. Analitično funkcijo $\psi(\zeta)$ določimo tako, da robni pogoj (7) zapišemo v konjugirano kompleksni obliki, ki ga na opisani način spremenimo v funkcionalno enačbo

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\overline{H(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\,\varphi'(\sigma)\right]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{15}$$

V primeru eliptične luknje, s preslikovno funkcijo (10) dobimo splošni obliki analitičnih funkcij $\varphi(\zeta)$ in $\psi(\zeta)$:

$$\varphi(\zeta) = \frac{E\,\varepsilon\,R\,m}{3-\nu}\,\zeta$$
$$\psi(\zeta) = \frac{E\,\varepsilon\,R}{3-\nu}\left[\frac{m\,(\zeta^2+m)}{1-m\,\zeta^2}\,\zeta - \frac{3-\nu}{1+\nu}\,\zeta\right] \tag{16}$$

Iz enačb (6) dobimo tudi funkciji $\Phi(\zeta)$ in $\Psi(\zeta)$, ki jih vstavimo v kompleksne sestave komponent tenzorja napetosti v polarnih koordinatah (5)

$$\sigma_\varrho + \sigma_\vartheta = \frac{2E\varepsilon m}{3-\nu}\left[\frac{\zeta^2}{m\zeta^2-1} + \frac{\varrho^4}{m\varrho^4-\zeta^2}\right] \qquad (17)$$

$$\sigma_\vartheta - \sigma_\varrho + 2i\tau_{\varrho\vartheta} = \frac{2\varrho^2\zeta^2}{(m\varrho^4-\zeta^2)(1-m\zeta^2)^2}\,\frac{E\varepsilon}{3-\nu}\cdot$$

$$\cdot\left[m^2(1-\zeta^4) + m\zeta^2(3+m^2) - \frac{2m}{\varrho^2}(m\varrho^4+\zeta^2) - \frac{3-\nu}{1+\nu}(1-m\zeta^2)^2\right]$$

Kompleksni sestav komponent vektorja premika v polarnih koordinatah (5) je z uporabo funkcij (16)

$$u_\varrho + i\,u_\vartheta = \sqrt{\frac{m\varrho^4-\zeta^2}{m\zeta^2-1}}\,\varepsilon R\cdot$$

$$\cdot\left[m\frac{\zeta}{\varrho} + \frac{\varrho}{\zeta} + \frac{1+\nu}{3-\nu}\,m\varrho\,\frac{(1-\varrho^2)(m\zeta^2-\varrho^2)}{(m\varrho^4-\zeta^2)\,\zeta}\right] \qquad (18)$$

Posamezne komponente tenzorja ravninskega stanja napetosti, zapisane v polarnih koordinatah kompleksne ravnine (ζ), preidejo po ureditvi v

$$\sigma_\varrho = \frac{2E\varepsilon m}{3-\nu}\,\frac{m\varrho^4+\varrho^2\cos 2\vartheta}{m\varrho^2(m\varrho^2-2\cos 2\vartheta)+1} - \frac{E\varepsilon}{3-\nu}\cdot$$

$$\cdot\frac{\varrho^2}{[m\varrho^2(m\varrho^2-2\cos 2\vartheta)+1]^2}\left\{m^2 - \frac{3-\nu}{1+\nu}\cdot\right.$$

$$\cdot[m\varrho^2(m\varrho^2-2\cos 2\vartheta)+1] - \varrho^4 m^2(3+m^2) -$$

$$- m^3\varrho^2(1-2\varrho^2)\cos 2\vartheta + m\varrho^2\cdot$$

$$\cdot\left[m^2\varrho^4 + 3 + m^2 - \frac{2}{\varrho^2} + \frac{3-\nu}{1+\nu}\cdot\right.$$

$$\left.\left.\cdot[m\varrho^2(m\varrho^2-2\cos 2\vartheta)+1]\right]\cos 2\vartheta - m^2\varrho^4\cos 4\vartheta\right\}$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{2E\varepsilon m}{3-\nu}\,\frac{m\varrho^4+\varrho^2\cos 2\vartheta}{m\varrho^2(m\varrho^2-2\cos 2\vartheta)+1} + \frac{E\varepsilon}{3-\nu}\cdot$$

$$\cdot\frac{\varrho^2}{[m\varrho^2(m\varrho^2-2\cos 2\vartheta)+1]^2}\left\{m^2 - \frac{3-\nu}{1+\nu}\cdot\right.$$

$$\cdot[m\varrho^2(m\varrho^2-2\cos 2\vartheta)+1] - \varrho^4 m^2(3+m^2) -$$

$$- m^3\varrho^2(1-2\varrho^2)\cos 2\vartheta + m\varrho^2\cdot$$

$$\cdot\left[m^2\varrho^4 + 3 + m^2 - \frac{2}{\varrho^2} + \frac{3-\nu}{1+\nu}\cdot\right.$$

$$\left.\left.\cdot[m\varrho^2(m\varrho^2-2\cos 2\vartheta)+1]\right]\cos 2\vartheta - m^2\varrho^4\cos 4\vartheta\right\} \qquad (19)$$

$$\tau_{\varrho\vartheta} = \frac{E\varepsilon m}{3-\nu}\,\frac{\varrho^4}{[m\varrho^2(m\varrho^2-2\cos 2\vartheta)+1]^2}\cdot$$

$$\cdot\left\{\left[m^2(2-2\varrho^2+\varrho^4) + 3 - \frac{2}{\varrho^2} + \frac{3-\nu}{1+\nu}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot[m\varrho^2(m\varrho^2-2\cos 2\vartheta)+1]\right]\sin 2\vartheta - m\varrho^2\sin 4\vartheta\right\}$$

Podobno sta tudi komponenti vektorja premika:

$$u_\varrho = \frac{\varrho}{\sqrt{A}}\,\varepsilon R\left\{\left(\varrho m - \frac{1}{\varrho}\right)\cos\vartheta\left[\varrho(m+1)\cos\vartheta + \right.\right.$$

$$\left.+\frac{1+\nu}{3-\nu}\,\frac{m\varrho(1-\varrho^2)}{A}A_1\right] + \left(\varrho m + \frac{1}{\varrho}\right)\sin\vartheta\cdot$$

$$\left.\cdot\left[\varrho(m-1)\sin\vartheta + \frac{1+\nu}{3-\nu}\,\frac{m\varrho(1-\varrho^2)}{A}B_1\right]\right\}$$

$$u_\vartheta = \frac{\varrho}{\sqrt{A}}\,\varepsilon R\left\{\left(\varrho m - \frac{1}{\varrho}\right)\cos\vartheta\left[\varrho(m-1)\sin\vartheta + \right.\right.$$

$$\left.+\frac{1+\nu}{3-\nu}\,\frac{m\varrho(1-\varrho^2)}{A}B_1\right] - \left(\varrho m + \frac{1}{\varrho}\right)\sin\vartheta\cdot$$

$$\left.\left[\varrho(m+1)\cos\vartheta + \frac{1+\nu}{3-\nu}\,\frac{m\varrho(1-\varrho^2)}{A}A_1\right]\right\}$$

Kjer smo zaradi krajšega zapisa označili z A, A_1 in B_1 naslednje funkcije

$$A = 1 - 2m\varrho^2\cos 2\vartheta + m^2\varrho^4$$

$$A_1 = [m^2\varrho^2\cos 4\vartheta + 1 - m(1+\varrho^2)\cos 2\vartheta]\cdot$$
$$\cdot\cos 3\vartheta + [m^2\varrho^2\cos 4\vartheta - m(1+\varrho^2)\sin 2\vartheta]\sin 3\vartheta$$

$$B_1 = [m^2\varrho^2\sin 4\vartheta - m(1+\varrho^2)\sin 2\vartheta]\cos 3\vartheta -$$
$$-[m^2\varrho^2\cos 4\vartheta + 1 - m(1+\varrho^2)\cos 2\vartheta]\sin 3\vartheta \qquad (21)$$

Koncentracije napetosti in največji premiki se pojavljajo na robu eliptične luknje, kjer je $\varrho = 1$, v neskončni točki pri $\varrho = 0$ pa so vse komponente tenzorja napetosti in vektorja premika enake nič.

Za numerično vrednotenje razmeroma zapletenih izrazov smo izdelali program v fortranskem jeziku, s katerim smo na elektronskem računalniku IBM 1130 določili napetostno in deformacijsko stanje v steni z eliptično luknjo s polosema $a = 6$ cm in $b = 1{,}2$ cm. S slike 2 je razvidno, da se napetosti zelo hitro zmanjšujejo z oddaljevanjem od roba luknje, kar seveda ne preseneča.

5. Rešitve stene s pravokotno luknjo

V praksi je pogostejši primer stene s pravokotno luknjo (sl. 4), ki ima na robu L predpisane premike (3). Zato bomo določili napetostno in deformacijsko stanje v neskončni steni s pravokotno luknjo s stranicama a in b. V ta namen smo uporabili preslikovno funkcijo z dela [2], ki konformno in obratno enolično preslika neskončno območje S osrednje ravnine stene s pravokotno luknjo v novo kompleksno ravnino (ζ) v območje Σ, ki pomeni notranjost enotskega kroga $|\zeta| \leqq 1$.

$$z = x + i\,y = \omega(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n\,.\,\zeta^{2n-1}\right) \qquad (22)$$

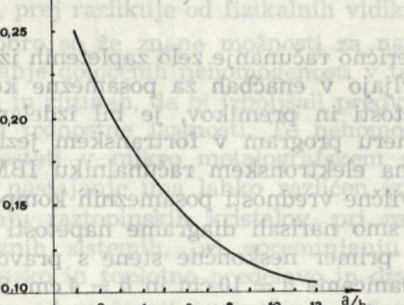
kjer so D_n realne konstante, določene s Schwarz-Christoffflovo enačbo [2], parameter R pa je

$$R = \frac{a}{2\left(1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} D_n\right)}$$

Določitev analitične funkcije $\varphi(\zeta)$ iz integrala diferencialne enačbe (14) in analitične funkcije $\psi(\zeta)$ iz enačbe (15) bi bila praktično neizvedljiva, če bi upoštevali vse člene neskončne vrste v preslikovni funkciji (22). Če neskončno vrsto nekje prekinemo, če torej upoštevamo samo končno število členov, ne dobimo funkcije, ki transformira neskončno steno s pravokotno luknjo v notranjost enotskega kroga, ampak so stranice pravokotnika ukrivljene in oglišča zaokrožena, seveda pa se z upoštevanjem zadostnega števila členov vrste lahko pravokotni odprtini približamo na poljubno natančnost. Pravokotni obliki se že zelo približamo, če upoštevamo le dva člena v neskončni vrsti

$$z = x + i\,y = \omega(\zeta) =$$
$$= R\left(\frac{1}{\zeta} + \cos 2\pi K - \frac{\zeta^3}{6}\sin^2 2\pi K\right)$$

Koeficient K upošteva razmerje stranic $a:b$, kakor je razvidno iz diagrama K, $(a:b)$ na sliki 3.



Slika 3

Analitični funkciji $\varphi(\zeta)$ in $\psi(\zeta)$ določimo iz enačb (14) in (15) ob upoštevanju lastnosti holomorfnih funkcij na robu luknje

$$\varphi(\zeta) = R\,(C\,\zeta + D\,\zeta^3) \tag{23}$$

$$\psi(\zeta) = R\left[\frac{G\,\zeta + H\,\zeta^3}{1 - A\,\zeta^2 - 3\,\zeta^4\,B}\,(C + 3\,D\zeta^2) + F\,\zeta\right]$$

kjer smo zaradi krajše pisave označili:

$$U = \frac{E\,\varepsilon}{1+\nu} \qquad D = \frac{U\,B}{\varkappa}$$

$$A = \cos 2\pi K \qquad F = U\left(\frac{3\,B^2}{\varkappa} - 1\right)$$

$$B = -\tfrac{1}{6}\sin^2 2\pi K \qquad G = A\,(1 + B)$$

$$C = \frac{U\,A}{\varkappa + B} \qquad H = 1 + 3\,B^2 \tag{24}$$

Kompleksni sestavi (5) komponent tenzorja napetosti in vektorja premika v polarnih koordinatah imajo v tem primeru obliko:

$$\sigma_\vartheta + \sigma_\varrho =$$
$$= 2\left[\frac{C\,\zeta^2 + 3\,D\,\zeta^4}{3\,B\,\zeta^4 + A\,\zeta^2 - 1} + \frac{C\,\varrho^4\,\zeta^2 + 3\,D\,\varrho^8}{3\,B\,\varrho^8 + A\,\varrho^4\,\zeta^2 - \zeta^4}\right]$$

$$\sigma_\vartheta - \sigma_\varrho + 2\,i\,\tau_{\varrho\vartheta} =$$
$$= \frac{2\,\varrho^2\,\zeta^4}{(3\,B\,\varrho^8 + A\,\varrho^4\,\zeta^2 - \zeta^4)\,(3\,B\,\zeta^4 + A\,\zeta^2 - 1)^2}\cdot$$
$$\cdot\left[h_3\frac{\varrho^4}{\zeta^2} + h_0 + h_2\,\zeta^2 + h_4\,\zeta^4 + h_6\,\zeta^6 + h_8\,\zeta^8\right]$$

$$u_\varrho + i\,u_\vartheta =$$
$$= \frac{1+\nu}{E}\,\frac{\varrho\,R\,\zeta^2}{\sqrt{(3\,B\,\zeta^4 + A\,\zeta^2 - 1)\,(3\,B\,\varrho^8 + A\,\varrho^4\,\zeta^2 - \zeta^4)}}\cdot$$
$$\cdot\Big\{3\left[(D\,H - B\,F)\,\varrho^2 - D\right]\frac{\varrho^6}{\zeta^4} + \left[(3\,\varkappa\,B\,C\,\varrho^2 + \right.$$
$$\left. + 3\,D\,G + H\,C - A\,F - 3\,A\,D\,\varrho^2)\,\varrho^2 - C\right]\frac{\varrho^2}{\zeta^2} +$$
$$+ (\varkappa - 1)\,(A\,C + 3\,B\,D\,\varrho^4)\,\varrho^2 + G\,C + F +$$
$$+\left[(\varkappa\,A\,D - B\,C)\,\varrho^2 - \frac{\varkappa\,C}{\varrho^2}\right]\zeta^2 - \frac{\varkappa\,D}{\varrho^2}\,\zeta^4\Big\} \tag{25}$$

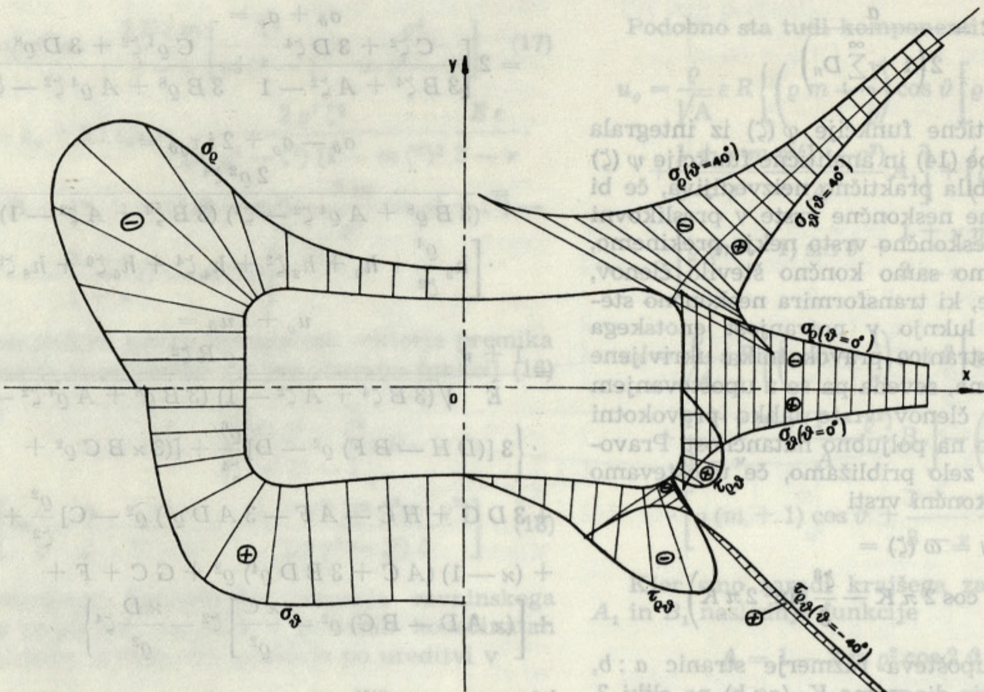
kjer smo označili:

$$h_0 = G\,C - 2\,A\,C\,\varrho^2 - 12\,B\,D\,\varrho^6 + F$$
$$h_2 = -\frac{2\,C}{\varrho^2} - 12\,A\,D\,\varrho^2 + 6\,B\,(A\,D - B\,C)\,\varrho^6 +$$
$$+ A\,C\,G + 3\,(3\,D\,G + H\,C) - 2\,A\,F$$
$$h_3 = -2\,B\,C\,\varrho^2$$
$$h_4 = -12\frac{D}{\varrho^2} + 6\,A\,(A\,D - B\,C)\,\varrho^2 +$$
$$+ 15\,D\,H + 9\,B\,C\,G - A\,(3\,D\,G + H\,C) +$$
$$+ A^2\,F - 6\,B\,F$$
$$h_6 = (A\,D - B\,C)\frac{6}{\varrho^2} + 3\,B\,(3\,D\,G + H\,C) -$$
$$- 9\,A\,D\,H + 6\,A\,B\,F \tag{26}$$
$$h_8 = 9\,B\,(B\,F - D\,H)$$

Posamezne komponente tenzorja ravninskega stanja napetosti v polarnih koordinatah kompleksne ravnine (ζ) imajo po ureditvi naslednjo obliko:

$$\sigma_\varrho = \frac{\varrho^2}{K^2}\{-t_0 + 2\,K\,\varrho^2\,(A\,C + 9\,B\,D\,\varrho^4) +$$
$$+ [2\,K\,(3\,B\,C\,\varrho^4 + 3\,A\,D\,\varrho^4 - C) - \varrho^2\,(t_2 + p_2)]\cdot$$
$$\cdot\cos 2\,\vartheta - [6\,K\,D + \varrho^2\,(t_4 + p_4)]\,\varrho^2\cos 4\,\vartheta -$$
$$- \varrho^6\,(t_6 + p_6)\cos 6\,\vartheta + h_8\,\varrho^8\cos 8\vartheta\}$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{\varrho^2}{K^2}\{t_0 + 2\,K\,\varrho^2\,(A\,C + 9\,B\,D\,\varrho^4) +$$
$$+ [2\,K\,(3\,B\,C\,\varrho^4 + 3\,A\,D\,\varrho^4 - C) + \varrho^2\,(t_2 + p_2)]\cdot$$
$$\cdot\cos 2\,\vartheta - [6\,K\,D - \varrho^2\,(t_4 + p_4)]\,\varrho^2\cos 4\,\vartheta +$$
$$+ \varrho^6\,(t_6 + p_6)\cos 6\,\vartheta - h_8\,\varrho^8\cos 8\,\vartheta\}$$



Slika 4

$$\tau_{\varrho\vartheta} = \frac{\varrho^4}{K^2} \left[(t_2 - p_2) \sin 2\vartheta + \varrho^2 (t_4 - p_4) \sin 4\vartheta + \right.$$
$$\left. + \varrho^4 (t_6 - p_6) \sin 6\vartheta - h_8 \varrho^6 \sin 8\vartheta \right]$$

Premika pa sta

$$u_\varrho = R \frac{1+\nu}{E} \frac{\varrho}{\sqrt{K}} \left[s_0 + (s_2 + v_2) \cos 2\vartheta + \right.$$
$$\left. + (v_4 - \varkappa D) \cos 4\vartheta \right]$$

$$u_\vartheta = R \frac{1+\nu}{E} \frac{\varrho}{\sqrt{K}} \left[(s_2 - v_2) \sin 2\vartheta - \right.$$
$$\left. - (\varkappa D + v_4) \sin 4\vartheta \right] \tag{27}$$

V prejšnjih izrazih smo zaradi krajšega zapisa označili naslednje izraze:

$$p_2 = 3 B h_2 \varrho^4 + A h_0 - h_3$$
$$p_4 = 3 B h_0 - A h_3$$
$$p_6 = 3 B h_3$$
$$t_0 = 3 B h_4 \varrho^8 + A h_2 \varrho^4 - h_0$$
$$t_2 = 3 B h_6 \varrho^8 + A h_4 \varrho^4 - h_2$$
$$t_4 = 3 B h_8 \varrho^8 + A h_6 \varrho^4 - h_4$$
$$t_6 = A h_8 \varrho^4 - h_6$$
$$s_0 = (\varkappa - 1)(A C + 3 B D \varrho^4) \varrho^2 + G C + F$$
$$s_2 = \varrho^4 (\varkappa A D - B C) - \varkappa C$$
$$v_2 = (\varkappa 3 B C \varrho^2 + 3 D G + H C -$$
$$- A F - 3 A D \varrho^2) \varrho^2 - C$$
$$v_4 = 3 \varrho^2 [(D H - B F) \varrho^2 - D]$$
$$K = 9 B^2 \varrho^8 + 2 A \varrho^2 (3 B \varrho^4 - 1) \cos 2\vartheta -$$
$$- 6 B \varrho^4 \cos 4\vartheta + A^2 \varrho^4 + 1$$

Za numerično računanje zelo zapletenih izrazov, ki se pojavljajo v enačbah za posamezne komponente napetosti in premikov, je bil izdelan tudi v tem primeru program v fortranskem jeziku. Z njim smo na elektronskem računalniku IBM 1130 določili številčne vrednosti posameznih komponent, po katerih smo narisali diagrame napetosti (sl. 4) za poseben primer neskončne stene s pravokotno luknjo s stranicama $a = 10$ cm in $b = 4$ cm. S slike je razvidno, da so največje napetosti na ogliščih luknje, z oddaljevanjem od roba luknje pa se napetosti zmanjšujejo in so v neskončni točki pri $\varrho = 0$ enake nič. Dejanske napetosti so nekoliko večje od tu izračunanih, saj smo upoštevali samo tri člene v preslikovni funkciji (22).

LITERATURA

[1] N. I. Mushelišvili, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. P. Noordhoff, Gröningen, 1958.

[2] T. Skubic, Uporaba funkcij kompleksne spremenljivke v teoriji elastičnosti, Disertacija, Ljubljana, 1961.

[3] J. Plemelj, Teorija analitičnih funkcij, SAZU, Ljubljana, 1958.

[4] D. S. Mitrinović, Kompleksna analiza, Građevinska knjiga, Beograd, 1973.

[5] B. Vrečko: Diplomsko delo, FS, Ljubljana, 1975.

Naslov avtorjev: doc. dr. ing. Franc Kosel
prof. dr. ing. Marko Škerlj
Fakulteta za strojništvo
Univerze v Ljubljani