

UDK 534.1:624.073.2

## Vsiljena nihanja ortotropne elastične plošče na viskoelastičnem temelju pri velikih amplitudah

BISHAN KISHOR

Članek obravnava vrednotenje dinamičnega odziva temeljne plošče. Elastična plošča je izdelana iz ortotropnega materiala. Obravnavali pa smo tudi ustrezen primer izotropne plošče. Primerjava obeh analiz daje zanimiv rezultat — za isto frekvenčno območje so odzivne amplitude v primeru ortotropne temeljne plošče mnogo manjše kakor v primeru izotropne temeljne plošče. To naj bi nas privedlo do novega obravnavanja zmanjšanja nihanj (izolacije).

Označbe v tem članku pomenijo:

- $a$  — dimenzijo plošče v smeri  $x$
- $a_0$  — amplitudo nelinearnih ustaljenih nihanj
- $b$  — dimenzijo plošče v smeri  $y$
- $c$  — konstanto dušenja
- $D_x = E_x h^3/12 \cdot (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})$
- $E_x$  — Youngov modul elastičnosti materiala plošče v smeri  $x$
- $E_y$  — Youngov modul elastičnosti materiala plošče v smeri  $y$
- $F$  — Airyjevo napetostno funkcijo
- $h$  — debelino plošče
- $k$  — ekvivalentno elastično konstanto
- $g^2 = E_y/E_x = D_y/D_x = \nu_{yx}/\nu_{xy}$
- $f^2 = E_y (1/G - 2 \nu_{yx}/E_y)$
- $p$  — zunanjo porazdeljeno dinamično površinsko obremenitev
- $\nu^2 = \nu_{yx} + (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})/(1 + \nu_{xy})$
- $\rho$  — gostoto mase materiala plošče
- $\sigma = k a^4/\pi^4 D_x$  — brezdimenzijski modul temelja

### UVOD

Temeljna plošča zavzema pomembno mesto v tehnični mehaniki, ker se pogosto pojavlja v vrsti tehničnih problemov. Določitev resonančnih frekvenc in dinamičnega odziva takih temeljev je precej pomembna. Znano je, da delovanje dinamičnih obremenitev na take sisteme dovaja do nezaželenih nihanj, ki lahko povzročajo delna poseganja, deformacije in razpoke, ki lahko privedejo tudi do

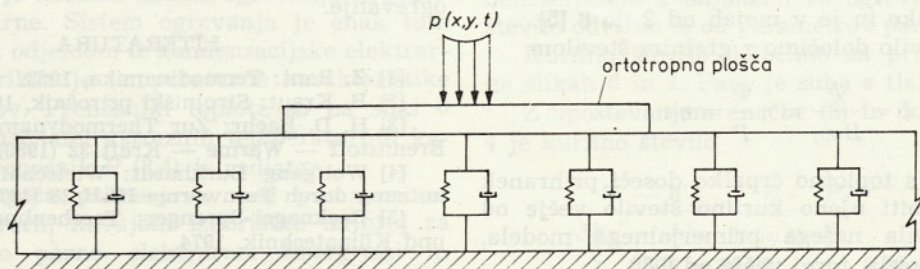
preloma. Povzročajo lahko tudi asimetrično obrabo ležajev, njihovo gretje, utrujenostni lom strojnih delov itd. Ta nihanja se prek vzajemnega delovanja plošče in temelja prenašajo na sosednja območja, kar ima škodljive učinke na tehnološko delovanje sosednjih strojev itd. Prenesena nihanja imajo lahko tudi škodljivo fiziološko in psihološko delovanje na osebe, ki delajo v bližini. Torej je bistveno pomembno, da ta nihanja obvladamo in preprečujemo njihov prenos. Da bi lahko pri tem resnično kaj storili, moramo najprej analizirati sistem temelja, preden uporabimo kak način dušenja. V članku smo analizirali temeljno ploščo za ortotropne in izotropne elastične pravokotne plošče, ki leže na viskoelastičnih temeljih Kelvinovega tipa. Obe analizi smo primerjali. Primerjava nelinearnih krivulj dinamičnega odziva daje zelo zanimiv rezultat — za isto frekvenčno območje so amplitude nihanja mnogo manjše v primeru ortotropne plošče kakor pa v primeru izotropne plošče. Ta podatek bi moral biti za konstrukterje temeljnih plošč izredno pomemben.

Temeljne plošče so v preteklosti pritegnile pozornost mnogih raziskovalcev. Odlično poročilo je predstavil Hetenyi [1]. Nekatere novejšje prispevke na tem področju so pripravili Hoskin in Lee [2], Pister in Williams [3] ter Kishor [4—7].

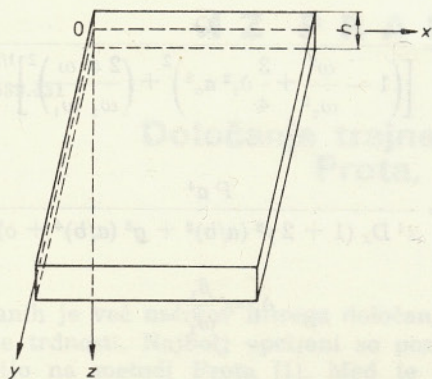
### POSTAVITEV IZRAČUNA

V pričujoči raziskavi je podana analiza prečnih nihanj elastične plošče na viskoelastičnem temelju Kelvinovega tipa. Običajno skico sistema prikazuje slika 1. Enačbe plošče ustrezajo dinamični podobnosti von Karmanovih enačb, ki so prirejene za ortotropni material. Začetek koordinat je postavljen v enega od kotov plošče v njeni srednji ravnini (sl. 2). Simetrijske osi elastičnosti materiala imamo za vzporedne osema  $x$  in  $y$ .

Za temelj, ki ga proučujemo, sta enačbi gibanja spremenjeni von Karmanovi enačbi



Sl. 1. Shema ortotropne plošče na viskoelastičnem temelju Kelvinovega tipa



Sl. 2. Plošča v koordinatnem sistemu

$$D_x \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2f^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + g^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + k w = h \left( \frac{p(x, y, t)}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (1)$$

in

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + f^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + g^2 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E_y \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

Robne pogoje za prečna upogibanja plošče imamo za enake tistim pri preprosto podprti plošči

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{za } x = 0, a \quad \text{in } 0 \leq y \leq b \quad (3)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{za } y = 0, b \quad \text{in } 0 \leq x \leq a$$

Za premike v ravnini plošče vzamemo, da so robovi plošče omejeni in ustrezne mejne pogoje

$$u = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{za } x = 0, a \quad (4)$$

$$v = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{za } y = 0, b$$

kjer sta premika znotraj ravnine  $u$  in  $v$  v smereh osi  $x$  in  $y$  podana z

$$u = \int_0^x \left[ \frac{1}{E_x} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu_{xy} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (5)$$

$$v = \int_0^y \left[ \frac{1}{E_y} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu_{yx} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy$$

## METODE REŠEVANJA

Problem opredeljujeta podrobno enačbi (1) in (2), hkrati z mejnimi pogoji pa enačbi (3) in (4).

Da bi dobili rešitev, uporabimo modificirano Galerkinovo metodo. Po tej metodi velja, da je prečna dinamična deformacija

$$w(x, y, t) = \Phi(x, y) T(t) \quad (6)$$

kjer je  $\Phi(x, y)$  normalna funkcija, ki zadovoljuje naslednji problem lastne vrednosti elastične plošče

$$\Delta^4 w(x, y, t) - \lambda^4 w(x, y, t) = 0 \quad (6a)$$

in robne pogoje (3). Ustrezno normalno funkcijo  $\Phi(x, y)$  lahko zapišemo

$$\Phi(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (6b)$$

Če za  $w(x, y, t)$  uporabimo izraze iz enačb (6) in (2) in potem rešimo iz tega izhajajočo enačbo za  $F$ , podrejeno robnim pogojem (4), dobimo po dolgem, vendar preprostem postopku

$$F = (1/16) \left\{ \frac{1}{2} E_y \left( (a/b)^2 \cos(2\pi x/a) + \frac{1}{g^2} (b/a)^2 \cos(2\pi y/b) \right) + \left( \pi^2 / (1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) \right) [E_y \left( (a/b)^2 + \nu_{yx} \right) (x/a)^2 + E_x \left( (b/a)^2 + \nu_{xy} \right) (y/b)^2] \right\} \cdot T^2(t) \quad (7)$$

Diferencialno enačbo rešimo z Galerkinovo metodo. Ko to rešitev vstavimo v prvotni diferencialni enačbi, izhaja iz nje navadno napaka  $\varepsilon$ . To napako ortogonaliziramo s pomočjo normalne funkcije

$$\int_0^a \int_0^b \varepsilon \Phi_1(x, y) dx dy = 0 \quad (8)$$

Če uporabimo zgoraj omenjeno Galerkinovo metodo in izraz iz enačbe (7), dobimo po daljšem, vendar preprostem postopku naslednjo enačbo

$$\ddot{T}(t) + 2\alpha \dot{T}(t) + \omega_1^2 T(t) + \beta_1^2 T^3(t) = \frac{4ab}{\pi^4 D_x} Q(t) \quad (9)$$

kjer se pika ( $\dot{\phantom{t}}$ ) nad črko nanaša na diferenciranje glede na parameter nedimenzijskega časa  $t$ , podana z

$$t = \pi^2 \frac{t}{ab} (D_x / \rho h)^{1/2} \quad (10)$$

in

$$2\alpha = c a b / (\pi^2 \sqrt{D_x \rho h}) \quad (11)$$

$$\omega_n^2 = (b/a)^2 [1 + 2\gamma^2 (a/b)^2 + g^2 (a/b)^4 + \sigma] \quad (12)$$

$$\sigma = k a^4 / (\pi^4 D_x) \quad (13)$$

$$\beta_1^2 = [3/(2h^2)] (b/a)^2 \{ (1/2) [1 + g^2 (a/b)^4] \cdot (1 - \nu_{xy} \nu_{yx}) + 1 + \nu_{xy} (a/b)^2 + g^2 (a/b)^2 \cdot [(a/b)^2 + \nu_{yx}] \} \quad (14)$$

$$Q(t) = \iint p(x, y, t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy \quad (15)$$

Če uporabimo obremenitveno funkcijo

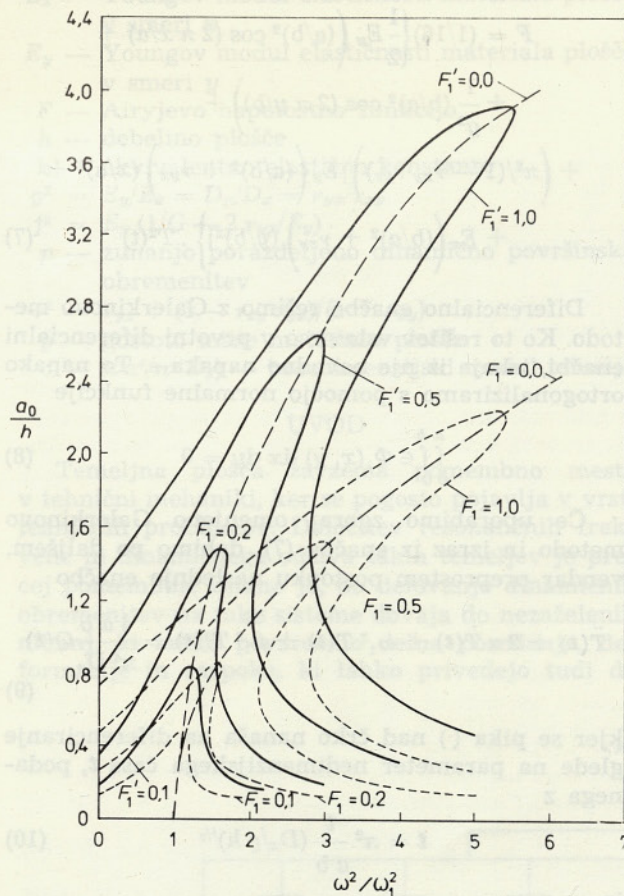
$$p(x, y, t) = P \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} f(t) \quad (16)$$

v enačbi (10), dobimo

$$\ddot{T}(t) + 2\alpha \dot{T}(t) + \omega_1^2 T(t) + \beta_1^2 T^3(t) = \frac{P a^2 b^2}{\pi^4 D_x} f(t) \quad (17)$$

kjer je  $f(t)$  harmonična funkcija časa.

Enačba (17) je Duffingova enačba, ki je težko rešljiva. V našem primeru uporabimo metodo ekvivalentne linearizacije in dobimo naslednjo odzivno ustaljeno amplitudo



Sl. 3. Ustaljen odziv

———— isotropna plošča na viskoelastičnem temelju Kelvinovega tipa  
 - - - - - ortotropna plošča na viskoelastičnem temelju Kelvinovega tipa

$$a_0 = \frac{\bar{Q}}{\left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + \frac{3}{4} \delta_1^2 a_0^2 \right)^2 + \left( \frac{2\alpha}{\omega_1} \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (18)$$

kjer je

$$\bar{Q} = \frac{P a^4}{\pi^4 D_x (1 + 2\gamma^2 (a/b)^2 + g^2 (a/b)^4 + \sigma)} \quad (19)$$

$$\delta_1 = \frac{\beta_1}{\omega_1} \quad (20)$$

in

$$\sigma = \frac{K a^4}{\pi^4 D_x} \quad (21)$$

Ustaljen odziv, ki ga predstavlja enačba (18), je grafično prikazan na sliki 3 za  $a/b = 1$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $\sigma = 1, 2, 5, 10$ ,  $\nu_{xy} = 0,3$ ,  $\nu_{yx} = 0,15$ ,  $F_1 = 0,1; 0,2; 0,5$  in  $1,0$  ( $a_0/h$ ) in  $(\omega^2/\omega_1^2)$ . Parameter  $F_1$ , ki je uporabljen na sliki, definiramo

$$F_1 = \sqrt{\frac{3}{4} \delta_1 \bar{Q}} \quad (22)$$

Primer izotropne elastične plošče na viskoelastičnem temelju Kelvinovega tipa dobimo, ko je  $\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu$ ,  $D_x = D$ ,  $\nu = 1$  in  $g = 1$  v prej zapisanih enačbah. Ustaljen odziv takega temelja je tudi prikazan grafično na sliki 3 s črtkanimi krivuljami.

### SKLEP

Dinamični odzivi, ki so grafično prikazani na sliki 3, jasno kažejo, da se temelj obnaša kakor trda vzmet. Pojav skoka je poudarjen v primerih  $F_1 = 1,0; 0,5$  in  $0,2$  medtem ko je za  $F_1 = 0,1$  verjetnost skoka zelo majhna. Za oba primera, ki ju preučujemo, lahko s slike 3 opazimo nekaj pomembnega, namreč za (i) ortotropno ploščo na viskoelastičnem temelju in za (ii) izotropno ploščo na viskoelastičnih temeljih. Amplituda dinamičnega odziva je mnogo manjša za primer (i) kakor pa v primeru (ii) za isto frekvenčno območje. To, kar smo opazili, je nadvse pomembno, saj nas privede do sklepa, da moramo za temelje, ki smo jih proučevali, izotropni material zamenjati z ortotropnim, če hočemo zmanjšati amplitude nihanja.

Avtorjev naslov: Dr. Bishan Kishor,  
 Professor of Mechanical Engineering,  
 Institute of Technology,  
 Banaras Hindu University,  
 Varanasi — India