

STROJNIŠKI VESTNIK

LETNIK 36

LJUBLJANA, JANUAR-MAREC 1990

ŠTEVILKA 1-3

UDK 66.063.6

Analiza porazdelitve velikosti kapljic

IVO BAJSIĆ - BOGDAN BLAGOJEVIĆ

1. UVOD

V različnih tehničnih napravah na področjih toplotne in procesne tehnike ter energetike se pogosto srečujemo z razprševanjem tekoče faze v drobne kapljice. Razprševanje tekočin po eni strani vpliva na intenzivnost toplotno-snovne izmenjave in s tem na velikost samih naprav, po drugi strani pa tudi na lastnosti pridobljenega produkta ob razprševanju.

Tekočo fazo razpršujemo s tlačnimi razpršilnimi šobami, ki so lahko različne po obliki in načinu delovanja. Tekočino razpršimo na zelo veliko število drobnih kapljic, ki imajo v primerjavi z maso tekočine veliko površino. S tlačnimi šobami želimo na splošno dobiti kapljice, ki bi imele enako velikost, vendar z običajnimi šobami tega ni mogoče doseči. Kapljice, ki nastanejo pri razprševanju, so različnih velikosti: od najmanjše do največje in tako popišejo določeno porazdelitev velikosti kapljic.

S centrifugalnimi tlačnimi šobami dosežemo, v primerjavi z drugimi, razmeroma ozko porazdelitev velikosti kapljic, kar pomeni, da so kapljice približno enake velikosti in da je delež zelo drobnih kapljic razmeroma majhen. V splošnem nastanejo pri razprševanju tekočin s tlačnimi šobami kapljice s premerom nekaj mikrometrov pa do nekaj sto mikrometrov. Pri procesih toplotno-snovne izmenjave, ki so v veliki meri odvisni od mejne površine med razpršeno kapljevino in okoliškim zrakom, navadno računamo s *Sauterjevimi* srednjim premerom kapljic. Ta je definiran tako, da je njegovo razmerje površin in prostornine enako, kakor jo ima dejanska porazdelitev vseh kapljic.

V podani analizi smo se omejili na razpršilne šobe s ploščatim curkom. Po razpadu ploščatega homogenega curka se oblikujejo kapljice različnih velikosti. Nastali nehomogeni razpršeni curek je dvofazni sistem, v katerem kapljice pomenijo diskretno fazo, okoliški zrak pa kontinuum.

Pri obravnavi porazdelitve velikosti kapljic v nehomogenem razpršenem curku navadno zanemarjamo mikro in makro vplive, ko so kapljice reda velikosti molekul oziroma, ko so velike nekaj milimetrov. Ti vplivi niso zanemarljivi, če je fazni delež omenjenih velikosti kapljic razmeroma velik.

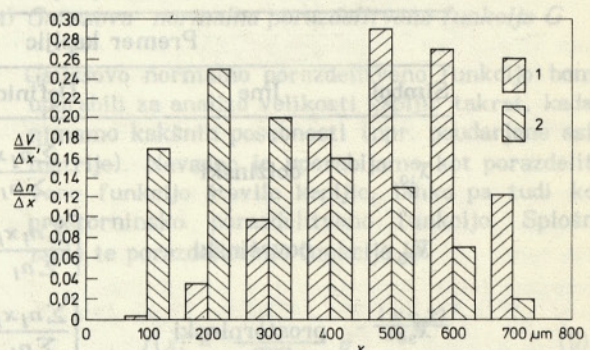
V podanem prispevku je analiziran problem opisa eksperimentalnih rezultatov velikosti kapljic z različnimi porazdelitvenimi funkcijami. Parametri teh funkcij so določeni po metodi najmanjših kvadratov, prirejeni za nelinearne sisteme enačb. Zadovoljivi aproksimaciji za popis porazdelitve velikosti kapljic (po prostornini) sta logaritemska funkcija z zgornjo mejo in modificirana eksponentna funkcija.

2. PORAZDELITEV VELIKOSTI KAPLJIC

Mnogi primeri uporabe razprševanja tekočin in pomembnost poznavanja velikostne porazdelitve kapljic v razpršenem curku, so bili obravnavani v številnih prispevkih. Pri tem posebno izstopajo dela [1], [2], [3], [4] idr. Razvito je bilo tudi več eksperimentalnih metod in merilnih sistemov za določitev porazdelitve velikosti kapljic. Porazdelitev velikosti kapljic je prikazana v histogramu na sliki 1. Celotno porazdelitev velikosti kapljic razdelimo na razrede širine $\Delta x = x_{i1} - x_{i2}$. Vsakemu razredu lahko pripišemo srednji premer kapljic (x_i). Nad vsakim razredom nanašamo količnik števila kapljic in širine razreda, ki ustrezajo določenemu razredu ($\Delta n_i / \Delta x_i$). Podobno naredimo tudi s prostornino kapljic ustreznega razreda ($\Delta v_i / \Delta x_i$). Število kapljic in prostornina kapljic v ustreznem razredu sta povezana z razmerjem:

$$\Delta v_i = \Delta n_i \frac{\pi}{6} \left[0,5(x_{i1} + x_{i2}) \right]^3 \quad (1)$$

Z zmanjševanjem širine intervala $\Delta x \rightarrow 0$ dobi histogram (sl. 1) obliko zvezne krivulje. Če smo na ordinato nanašali delež kapljic v *i*-tem razredu $\Delta n_i / \sum n_i$ ali prostorninski delež kapljic $\Delta v_i / \sum v_i$, potem mora biti ploščina pod histogramom enaka 1.



Slika 1: Histogram porazdelitve velikosti kapljic.
1 - prostorninski delež, 2 - številski delež.

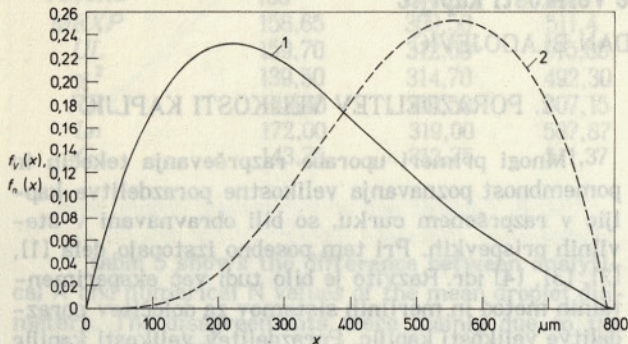
Frekvenčno krivuljo imenujemo tudi *funkcija gostote porazdelitve*, ki je definirana kot:

$$f_n(x) = \frac{dn(x)}{dx} \quad \text{ali} \quad f_v(x) = \frac{dv(x)}{dx} \quad (2)$$

Prikaz frekvenčnih krivulj je razviden na sliki 2. Zaradi vpliva prostornine (mase) večjih kapljic je gostota prostorninske (masne) porazdelitvene funkcije premaknjena proti desni strani abscise. Porazdelitev kapljic glede na premer lahko opišemo tudi s porazdelitveno funkcijo kot $F(x)$, ki je definirana z:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (3).$$

Funkcija $F(x)$ je prikazana na sliki 3.



Slika 2: Prikaz frekvenčnih krivulj $f_v(x)$ in $f_n(x)$ za velikost kapljic x .

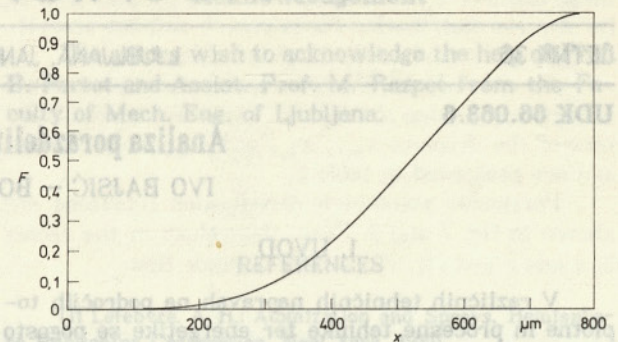
- 1 - gostota prostorninske porazdelitvene funkcije.
2 - gostota porazdelitvene funkcije števila kapljic.

2.1 Srednji in reprezentativni premeri kapljic

Pri procesih toplotno-snovne izmenjave je včasih primernejše računati s *srednjim* premerom kapljic namesto s celotnim spektrom. Mugele in Evans [2], sta predlagala posplošen zapis nekaterih značilnih srednjih premerov kapljic ter določila njihovo uporabnost. Pregled definicij srednjih premerov je zbran v preglednici 1.

Preglednica 1: Definicija srednjih premerov kapljic

Simbol	Premer kapljic		Uporaba	Parametri	
	Ime	Definicija		q	p
\bar{x}_{10}	dolžinski	$\frac{\sum n_j x_j}{\sum n_j}$	hlapenje	1	0
\bar{x}_{20}	površinski	$\left[\frac{\sum n_j x_j^2}{\sum n_j} \right]^{1/2}$	površinska kontrola	2	0
\bar{x}_{30}	prostorninski	$\left[\frac{\sum n_j x_j^3}{\sum n_j} \right]^{1/3}$	hidrologija	3	0
\bar{x}_{21}	površinsko-dolžinski	$\left[\frac{\sum n_j x_j^2}{\sum n_j x_j} \right]$	absorpcija	2	1
\bar{x}_{31}	prostorninsko-dolžinski	$\left[\frac{\sum n_j x_j^3}{\sum n_j x_j} \right]^{1/2}$	molekularna difuzija, hlapenje	3	1
\bar{x}_{32}	Sauterjev	$\left[\frac{\sum n_j x_j^3}{\sum n_j x_j^2} \right]$	prenos snovi, reakcije	3	2
\bar{x}_{43}	De Bruckerjev ali Herdanov	$\left[\frac{\sum n_j x_j^4}{\sum n_j x_j^3} \right]$	zgorevanje	4	3



Slika 3: Prikaz kumulativnega integrala F za velikost kapljic x .

Definicija za srednji premer mora biti pri različnih procesih pravilno izbrana. Tako bomo npr. izbrali značilni srednji (dolžinski) premer \bar{x}_{10} , ko bomo ugotovili, da pri hlapenju velja Langmuirov zakon. Splošni izraz za izračun srednjih premerov se glasi:

$$\bar{x}_{qp} = \left[\frac{\int_{x_0}^{x_m} x^{q-3} \left(\frac{dv}{dx} \right) dx}{\int_{x_0}^{x_m} x^{p-3} \left(\frac{dv}{dx} \right) dx} \right]^{1/(q-p)} \quad (4)$$

ali

$$\bar{x}_{qp} = \left[\frac{\int_{x_0}^{x_m} x^q \left(\frac{dn}{dx} \right) dx}{\int_{x_0}^{x_m} x^p \left(\frac{dn}{dx} \right) dx} \right]^{\frac{1}{q-p}} \quad (5).$$

kjer imata parametra p, q vrednosti navedene v preglednici 1.

Srednje premere pa izračunamo tudi iz eksperimentalnih podatkov, po formuli:

$$\bar{x}_{qp} = \left[\frac{\sum n_i x_i^q}{\sum n_i x_i^p} \right]^{\frac{1}{q-p}} \quad (6).$$

Poleg srednjih premerov je v literaturi zaslediti definicije *reprezentativnih* premerov. Tudi pri izboru reprezentativnih premerov obstaja več možnosti n. pr.:

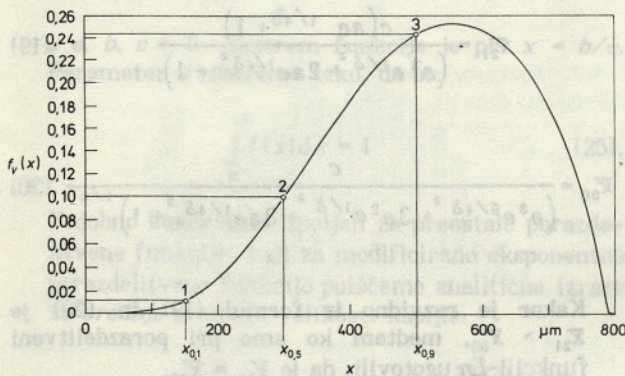
$x_{0,1}$ — pomeni: 10 odstotkov kapljic je manjših od tega premera,

$x_{0,5}$ — srednji prostorninski (masni premer),

$x_{0,9}$ — pomeni: 90 odstotkov kapljic je manjših od tega premera,

x_p — tam, kjer je $d^2v/dx^2 = 0$.

Ti reprezentativni premeri so prikazani na sliki 4.



Slika 4: Reprezentativni premeri velikosti kapljic x .

2.2 Analitične in eksperimentalne porazdelitvene funkcije

Kakor smo ugotovili že v uvodu, želimo pri analizi transportnih procesov frekvenčne histograma aproksimirati z zvezno frekvenčno krivuljo. Po pregledu zbrane literature ugotavljamo, da morajo porazdelitve velikosti kapljic izpolnjevati naslednje pogoje:

- zadostno ujemanje z eksperimentalnimi podatki,
- možnost ekstrapolacije zunaj obsega izmerjenih vrednosti velikosti kapljic,
- enostaven izračun srednjih in reprezentativnih premerov kapljic ter drugih parametrov,
- zgoščevanje velikega razpona podatkov.

Mehanizmi, ki so vključeni v proces razprševanja, so nedvomno izredno zapleteni in še ne v celoti pojasnjeni. Znale so številne večkrat nasprotujoče si teorije razprševanja, ki temeljijo na eksperimentalnih izsledkih. Zaradi tega ni mogoče pričakovati, da bi lahko z eno samo porazdelitveno funkcijo zadovoljivo popisali poljubne eksperimentalne podatke. Ponavadi je treba preizkusiti več porazdelitvenih funkcij, da lahko izberemo tisto, ki najbolj ustreza eksperimentalnim podatkom.

Porazdelitev velikosti kapljic je statistične narave. Pri določanju srednjih premerov velikosti kapljic uporabljamo začetne momente naključne spremenljivke. Začetni moment k -te stopnje naključne spremenljivke je enak:

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx \quad (7).$$

kjer je k — naravno število.

Tako je na primer srednji Sauterjev premer določen s formulo:

$$\bar{x}_{32} = \frac{E[X^3]}{E[X^2]} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_n(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x) dx} \quad (8).$$

Za določitev značilnih srednjih premerov, ki so podani v preglednici 1, in nekaterih statističnih parametrov (asimetričnost, ostrost ipd.), moramo poznati prve štiri centralne momente. V nadaljevanju podajamo nekatere značilnosti porazdelitvenih funkcij velikosti kapljic, ki so osnova za predloženo analizo.

a) Gaussova normalna porazdelitvena funkcija G

Gaussovo normalno porazdelitveno funkcijo bomo uporabili za analizo velikosti kapljic takrat, kadar nimamo kakšnih posebnosti (npr. poudarjene asimetrije). Navadno jo uporabljamo kot porazdelitveno funkcijo števila kapljic, lahko pa tudi kot prostorninsko porazdelitveno funkcijo. Splošni zapis te porazdelitvene funkcije je:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad (9),$$

pri tem je σ — standardni odmik in \bar{x} — srednja vrednost.

b) Logaritemska normalna porazdelitvena funkcija Ln

Kadar sledijo velikostni razredi kapljic eksponentnemu in ne linearnemu zakonu, uporabljamo logaritemsko normalno porazdelitveno funkcijo in njene modifikacije. V splošnem lahko prostorninsko porazdelitveno funkcijo zapišemo kot:

$$\Phi(y) = \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} e^{-\delta^2 y^2} \quad (10),$$

kjer je y – naključna spremenljivka, δ – pa parameter. V primeru Ln porazdelitvene funkcije je naključna spremenljivka y definirana z nastavkom:

$$y = \ln \frac{x}{\bar{x}} \quad (11),$$

kjer je \bar{x} srednji premer kaplic.

Izraz za izračun srednjih premerov ima obliko:

$$\bar{x}_{qp} = \bar{x} e^{\frac{p+q-6}{4\delta^2}} \quad (12).$$

Iz enačbe (12) je razvidno, da je $\bar{x}_{30} = \bar{x}_{21}$ in $\bar{x}_{40} = \bar{x}_{31}$.

c) Rosin-Rammlerjeva porazdelitvena funkcija RR

Rosin-Rammlerjeva porazdelitvena funkcija RR je bila vpeljana za statistično analizo porazdelitve velikosti trdnih (prašnih) delcev. Dobre rezultate lahko dobimo tudi pri analizi razpršenih kapljic. V osnovi RR zelo dobro okarakterizira porazdelitev velikosti kapljic v razpršenem curku. Prostorninska porazdelitvena funkcija je podana s formulo:

$$f_V(x) = \frac{\delta}{\bar{x}^\delta} x^{\delta-1} e^{-\left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^\delta} \quad (13)$$

pri tem pomenita \bar{x} – srednji premer, δ – parameter. Izraz za izračun srednjih premerov ima obliko:

$$\bar{x}_{qp} = \bar{x} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{q-3}{\delta} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{p-3}{\delta} + 1\right)} \right]^{\frac{1}{q-p}} \quad (14),$$

kjer je $\Gamma(x)$ gama funkcija, definirana z enačbo:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du, \quad x > -1 \quad (15).$$

Pri tem se moramo zavedati, da so rešitve po enačbi (14) veljavne, ko je δ manjši od $(3 - q)$ in $(3 - p)$.

d) Logaritemska funkcija z zgornjo mejo UL

To funkcijo sta prva predlagala Mugele in Evans [2]. Pravzaprav gre za dopolnjeno obliko logaritemske porazdelitvene funkcije. Prostorninska porazdelitvena funkcija ima obliko:

$$f_V(x) = \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{x(c-x)} e^{-\delta^2 y^2} \quad (16),$$

kjer je:

$$y = \ln \left(\frac{ax}{c-x} \right) \quad (17),$$

δ , a in c pa so parametri.

Funkcija UL daje dobre rezultate pri popisu porazdelitve velikosti kapljic. To dokazujejo rezultati, podani v [2], [3], [10]. Razlogi za izbiro porazdelitvene funkcije UL so naslednji:

- preprostost matematičnega zapisa,
- funkcija je primerna za analitično in numerično obdelavo,
- zadovoljivo ujemanje z opisovanim pojavom, ker je funkcija navzgor in navzdol omejena z največjim in najmanjšim premerom kapljic.

Ena od težav, ki se pojavlja pri obravnavi te porazdelitve, je analitična določitev višjih momentov za $(p, q > 3)$. Zaradi te omejitve ne moremo podati splošnega izraza za izračun srednjih premerov. Izpeljali pa smo izraze Sauterjevega premera in značilnih premerov \bar{x}_{21} in \bar{x}_{30} :

$$\bar{x}_{32} = \frac{c}{(ae^{1/4\delta^2} + 1)} \quad (18)$$

$$\bar{x}_{21} = \frac{c(ae^{1/4\delta^2} + 1)}{(a^2 e^{1/\delta^2} + 2ae^{1/4\delta^2} + 1)} \quad (19)$$

$$\bar{x}_{30} = \frac{c}{(a^3 e^{9/4\delta^2} + 3a^2 e^{1/\delta^2} + 3ae^{1/4\delta^2} + 1)^{1/3}} \quad (20)$$

Kakor je razvidno iz formul (19) in (20) je $\bar{x}_{21} > \bar{x}_{30}$, medtem ko smo pri porazdelitveni funkciji Ln ugotovili, da je $\bar{x}_{21} = \bar{x}_{30}$.

e) Porazdelitvena funkcija χ^2

Podobno kakor UL je tudi funkcija χ^2 triparametrična. Primerjava med njima je podana v [3]. Kadar lahko predpostavimo, da je premer kapljic porazdeljen po zakonu χ^2 velja:

$$\chi^2 = 2bx^\beta \quad (21).$$

Prostorninska porazdelitvena funkcija je v tem primeru enaka:

$$f_V(x) = \frac{\beta b^{\frac{\beta}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)} x^{\left(\frac{\beta}{2}-1\right)} e^{-bx^\beta} \quad (22),$$

pri tem je ν – število prostostnih stopenj porazdelitve χ^2 , b in β – pa konstanti. Izraz za izračun srednjih premerov kapljic pri porazdelitveni funkciji χ^2 se glasi:

$$\bar{x}_{QP} = \frac{1}{b\beta} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{q}{\beta} - \frac{3}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{p}{\beta} - \frac{3}{\beta}\right)} \right]^{\frac{1}{q-p}} \quad (23).$$

Pri čemer mora biti $\beta\nu > \max\{6-2q, 6-2p\}$.

f) Modificirana eksponentna porazdelitvena funkcija MEXP

Kadar želimo eksperimentalne rezultate aproksimirati z določeno zvezno krivuljo, moramo najprej izbrati primerni nastavek obrazca. Zatem določimo vrednosti parametrov, za katere je aproksimacija najboljša. Funkcije lahko izberemo tudi z grafi. Pri proučevanju in izbiri grafov je treba vedno paziti na to, da pri uporabi izbranih empiričnih obrazcev uporabljamo le del krivulje, ki pripada nekemu intervalu, v katerem se spreminja neodvisna spremenljivka. V našem primeru smo na podlagi [11] izbrali funkcijo:

$$f(x) = ax^b e^{-cx} \quad (24),$$

z $a, b, c > 0$. Ekstrem funkcije je pri $x = b/c$. Parameter a izberemo tako, da bo:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (25).$$

Podobno kakor smo izpeljali za preostale porazdelitvene funkcije, tudi za modificirano eksponentno porazdelitveno funkcijo poiščemo analitične izraze za *srednje* premere velikosti kapljic:

$$\bar{x}_{QP} = \frac{1}{c} \left[\frac{\Gamma(b+q-2)}{\Gamma(b+p-2)} \right]^{\frac{1}{q-p}} \quad (26),$$

Pri čemer mora biti $b < \min\{q-2, p-2\}$.

Iz enačbe (26) je razvidno, da je *Sauterjev* premer podan s preprostim izrazom: $\bar{x}_{32} = b/c$, to pa je prav tam, kjer ima funkcija (24) ekstrem.

2.3 Druge statistične obravnave razprševanja

V novejši literaturi [1], [6], ki obravnava popis velikosti porazdelitve kapljic, je podan pregled nekaterih novih definicij in statistik razprševanja, ki definirajo *razpon* velikosti kapljic. Nekateri od izrazov, ki določajo *razpon* velikosti kapljic so:

a) Indeks uniformnosti kapljic:

$$\Delta_U = \frac{\sum V_i (x_{0,5} - x_i)}{x_{0,5}} \quad (27).$$

b) Faktor relativne širine:

$$\Delta_B = \frac{x_{0,9} - x_{0,1}}{x_{0,5}} \quad (28).$$

c) Disperzijski indeks:

$$\delta = \int_0^{x_m} x \left(\frac{dv}{dx} \right) dx \quad (29).$$

č) Disperzijski mejni faktor:

$$\Delta_M = \frac{x_{0,999} - x_{0,5}}{x_{0,5}} \quad (30).$$

3. PRIMERJALNA ANALIZA RAZLIČNIH PORAZDELITVENIH FUNKCIJ

Pri primerjalni analizi porazdelitvenih funkcij oziroma preverjanju predloženih matematičnih izrazov smo izhajali iz lastnih eksperimentalnih podatkov, dobljenih pri analizi dvofaznega ploščatega curka v omejenem prostoru. Za generiranje dvofaznega ploščatega curka smo uporabili tlačno razpršilno šobo, ki jo je izdelala tovarna Lechler iz Fellbacha v ZR Nemčiji. Osnovni geometrijski in konstrukcijski podatki za šobo so:

– manjša polos eliptične odprtine	0,77 mm
– večja polos eliptične odprtine	1,30 mm
– iztočni prerez razpršilne šobe	3,14 mm ²
– ekvivalentni premer šobe	2,00 mm
– kot razprševanja	30°

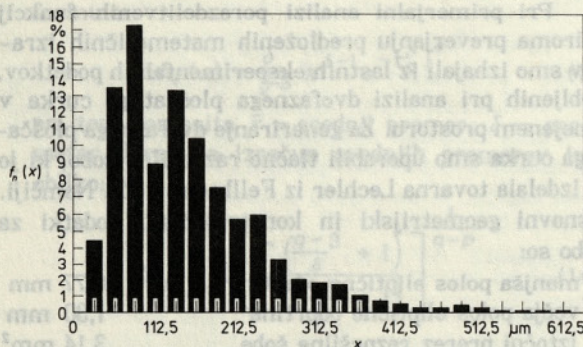
V preglednici 2 podajamo eksperimentalno izmerjene vrednosti, iz katerih smo izračunali *srednje* in *repzentativne* premere kapljic. Relativni delež števila merjenih kapljic in prostorninski delež posameznih kapljic sta prikazana na histogramih (sl. 5 in sl. 6). Vrednosti v preglednici 2 so dobljene pri naslednjih pogojih:

– medij:	voda,
– tlak razprševanja:	300 kPa,
– masni tok vode:	$6,42 \cdot 10^{-2}$ kg/s
– namestitev merilne ravnine:	225 mm od razpršilne šobe.

Širina razreda Δx_i je 25 μm , najmanjši premer kapljic je $x_0 = 25 \mu\text{m}$, največji premer kapljic v celotnem spektru pa 650 μm .

Preglednica 2: Eksperimentalni rezultati porazdelitve velikosti kapljic

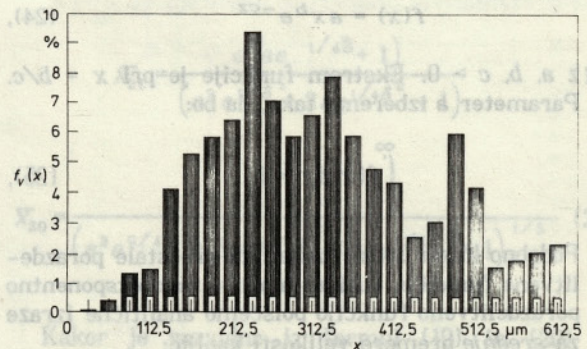
Srednji premer razreda x_i (μm)	Relativni številčni delež kapljic $(\Delta n_i / \sum n_i) 100 \%$	Relativni prostorninski delež kapljic $(\Delta v_i / \sum v_i) 100 \%$
37,5	4,458	0,0276
62,5	13,549	0,388
87,5	17,308	1,361
112,5	8,916	1,490
137,5	13,374	4,081
162,5	10,402	5,239
187,5	7,517	5,816
212,5	5,682	6,400
237,5	5,944	9,347
262,5	3,322	7,053
287,5	2,098	5,852
312,5	1,836	6,577
337,5	1,748	7,888
362,5	1,049	5,865
387,5	0,699	4,774
412,5	0,524	4,317
437,5	0,262	2,575
462,5	0,262	3,043
487,5	0,437	5,943
512,5	0,262	4,140
537,5	0,087	1,586
562,5	0,087	1,818
587,5	0,087	2,071
612,5	0,087	2,347
637,5	0,000	0,000

Slika 5: Histogram številnega deleža kapljic $f_n(x)$ za velikost kapljic x .

Cilj, ki ga želimo doseči, je izbrati takšno prostorninsko porazdelitveno funkcijo, ki se bo najbolj ujemala z eksperimentalnimi rezultati. Pri tem smo medsebojno primerjali vse oblike porazdelitvenih funkcij, ki smo jih obravnavali v točki 2.2. Kakor smo že ugotovili, so funkcije G , Ln in RR dvoparametrične in porazdelitvene funkcije, χ^2 , UL , $MEXP$ pa triparametrične.

Iz podanih izrazov je razvidno, da se parametri pojavljajo v nelinearni povezavi. Številčne vrednosti parametrov smo določili z metodo najmanjših kvadratov, in sicer z uporabo *Gauss-Newtonove gradientne metode* in metode *Marquardt*, ki združujeta prednosti prej omenjenih metod.

Kriterij za oceno najprimernejše porazdelitvene funkcije je ob vrednosti funkcije pogreška F tudi

Slika 6: Histogram prostorninskega deleža kapljic $f_v(x)$ za velikost kapljic x .

vrednost kumulativnega integrala F . Pri tem je funkcija pogreška v statističnem pomenu definirana z izrazom:

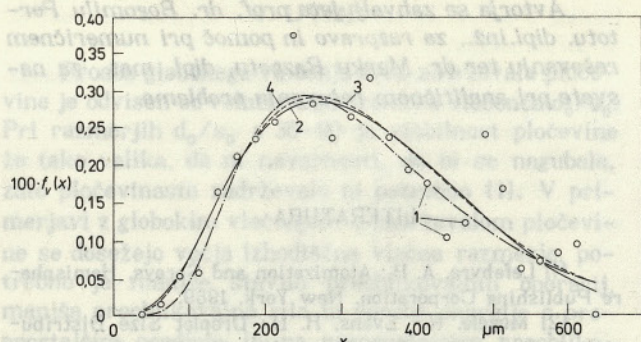
$$F(a_j) = \sum [y_i - y(x_i)]^2 \quad (31),$$

pri tem pomenijo: a_j - parameter, x_i - naključno spremenljivko (premer kapljic), y_i - izmerjeno vrednost ter $y(x_i)$ - aproksimirano krivuljo. Ob tem zahtevamo, da je vrednost funkcije pogreška najmanjša, izračun pa je končan, ko dosežemo predpisano natančnost. Vrednosti izračunanih parametrov porazdelitvenih funkcij ter vrednosti kumulativnih integralov in funkcij pogreškov F so zbrane v preglednici 3. V preglednici 4 so zbrane izračunane vrednosti *srednjih* premerov, tako za eksperimentalne podatke kakor tudi za vse obravnavane porazdelitvene funkcije.

Pri tem so z A označene analitično in z N po numerični metodi dobljene vrednosti.

Na podlagi eksperimentalno izmerjenega prostorninskega deleža kapljic lahko določimo tudi vrednosti reprezentativnih premerov kapljic $x_{0,1}$, $x_{0,5}$ in $x_{0,9}$, ki so za posamezne porazdelitvene funkcije zbrane v preglednici 5.

Potek posameznih prostorninskih porazdelitvenih funkcij pa je razviden na slikah 7 in 8.



Slika 7: Primerjava prostorninskih porazdelitvenih funkcij velikosti kapljic $100 f_V(x)$ za velikost kapljic x .

1 - izmerki. 2 - UL 3 - MEXP. 4 - Ln.

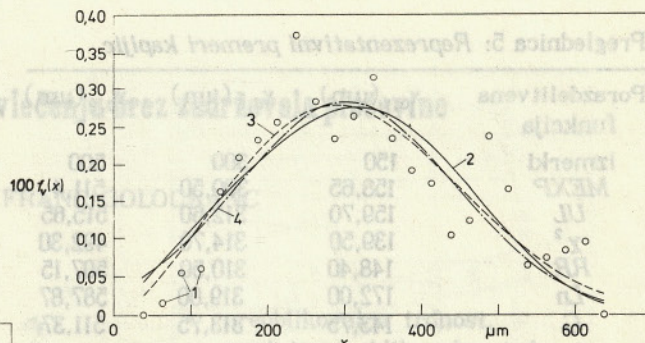
Iz dobljenih vrednosti, ki so zbrane v preglednicah 3, 4 in 5 ter prikazane na sliki 7, ugotavljamo naslednje:

Preglednica 3: Parametri porazdelitvenih funkcij in vrednosti funkcije pogreškov ter kumulativnih integralov

Porazdelitvena funkcija	Parametri porazdelitve			F	F(%)
	1	2	3		
MEXP	$a = 0,153 \cdot 10^{-9}$	$b = 3,6541$	$c = 0,0137$	0,043	100
UL	$a = 2,0572$	$\delta = 1,0189$	$c = 950,0$	0,044	98,4
χ^2	$\nu = 1,0187$	$b = 3,9125 \cdot 10^{-11}$	$\beta = 3,9240$	0,070	99,3
RR	$\bar{x} = 358,445$	$\delta = 2,4586$	—	0,025	98,6
Ln	$\bar{x} = 317,616$	$\delta = 1,4754$	—	0,044	93,3
G	$\bar{x} = 301,749$	$\sigma = 141,236$	—	0,068	96,8

Preglednica 4: Izračunani srednji premeri kapljic

Porazdelitev	Opomba	$\bar{x}_{qp} (\mu\text{m})$						
		\bar{x}_{10}	\bar{x}_{20}	\bar{x}_{30}	\bar{x}_{21}	\bar{x}_{31}	\bar{x}_{32}	\bar{x}_{43}
Izmerki	N	153,79	178,75	204,24	207,76	235,36	266,63	324,85
MEXP	N	131,23	159,48	187,65	193,80	224,38	259,79	321,25
	A	120,91	153,16	184,36	194,01	227,65	267,11	340,21
UL	N	140,63	166,81	193,43	197,86	226,85	260,10	319,51
	A	139,27	166,21	193,59	198,37	228,24	262,62	—
χ^2	N	73,49	101,02	133,40	138,88	179,74	232,62	310,89
	A	—	—	—	—	—	219,53	311,17
RR	N	87,15	116,68	148,66	156,20	194,15	214,33	313,13
	A	—	—	—	109,14	161,24	238,19	317,91
Ln	N	177,90	198,36	219,99	221,16	244,63	270,58	322,84
	A	178,86	200,63	225,05	225,05	252,43	283,16	356,27
G	N	68,09	95,27	127,71	133,31	174,90	229,16	307,50



Sl. 8: Primerjava prostorninskih porazdelitvenih funkcij velikosti kapljic $100 f_V(x)$ za velikost kapljic x .

1 - izmerki. 2 - χ^2 . 3 - RR. 4 - G.

- Najboljše ujemanje eksperimentalnih in aproksimiranih rezultatov dosežemo s prostorninsko porazdelitveno logaritemsko funkcijo z zgornjo mejo UL. Zadovoljivo ujemanje je tudi pri modificirani eksponentni porazdelitveni funkciji MEXP ter logaritemsko normalni porazdelitveni funkciji Ln. Manj primerni funkciji za aproksimacijo prostorninskega deleža sta porazdelitveni funkciji χ^2 in Rosin-Rammlerjeva RR.
- Pri porazdelitveni logaritemski funkciji z zgornjo mejo so namreč najmanjši odstopki izračunanih srednjih premerov kapljic po parametrih porazdelitve glede na izračunane srednje premere iz eksperimentalnih podatkov.

Preglednica 5: Reprezentativni premeri kapljic

Porazdelitvena funkcija	$x_{0,1}$ (μm)	$x_{0,5}$ (μm)	$x_{0,9}$ (μm)
Izmerki	150	300	500
MEXP	158,65	309,50	511,4
UL	159,70	312,60	515,65
χ^2	139,50	314,70	492,30
RR	148,40	310,50	507,15
Ln	172,00	319,00	587,87
G	143,75	313,75	511,37

— V preglednici 5 lahko opazimo tudi razlike med analitično A in numerično N določenimi srednjimi premeri kapljic. Vzrok je v tem, ker so analitični izrazi rešeni za meje integrala (25) med 0 in ∞ , medtem ko pri numeričnem računanju rešujemo integral med najmanjšim premerom kapljic x_0 in največjim premerom kapljic x_m . Skoraj popolno ujemanje med analitično in numerično izračunanimi srednjimi premeri kapljic opazimo le pri prostorninski porazdelitveni logaritemski funkciji z zgornjo mejo.

— Do podobnih ugotovitev so prišli tudi drugi avtorji, npr. [2], [3], [4], [8], [9], [10], in sicer za druge oblike razpršenih curkov.

V strokovni literaturi se v zadnjem času uveljavlja pri popisu porazdelitvene funkcije velikosti kapljic tudi štiriparametrična *logaritmično hiperbolična* funkcija [5]. Za določitev njenih parametrov lahko uporabimo že uveljavljeno metodo najmanjših kvadratov za nelinearne sisteme enačb ali pa metodo *največje zanesljivosti*.

4. SKLEP

Iz opisanega lahko sklepamo, da je pri analizi porazdelitve velikosti kapljic treba upoštevati naslednje:

- Noben od parametrov posamezne porazdelitvene funkcije ne more v celoti popisati porazdelitve kapljic po velikosti.
- Dva razpršena curka nista nujno podobna samo zato, ker imata npr. enak *Sauterjev* srednji premer ali enak *srednji prostorninski (masni)* premer.
- Med *srednjimi (ali reprezentativnimi)* premeri razpršenega curka in njegovo porazdelitveno funkcijo velikosti kapljic ni nobene univerzalne korelacije. Oba sta povsem neodvisna drug od drugega.
- Najustreznejša aproksimacija eksperimentalnih podatkov za primer ploščatega curka je *UL*.
- Določanje parametrov prostorninske porazdelitvene funkcije z zgornjo mejo po metodi najmanjših kvadratov je hitrejše in zanesljivejše kakor v primeru, če iščemo porazdelitveno funkcijo števila kapljic za isti razpršeni curek.

Poleg teh ugotovitev je vrednost podanega prispevka tudi v definiranju splošno veljavnih analitičnih izrazov za izračun *srednjih in reprezentativnih* premerov kapljic pri posameznih porazdelitvenih funkcijah.

ZAHVALA

Avtorja se zahvaljujeta prof. dr. Bogomilu Perrotu, dipl.inž., za razpravo in pomoč pri numeričnem reševanju ter dr. Marku Razpetu, dipl. mat., za nasvete pri analitičnem reševanju problema.

LITERATURA

- [1] Lefebvre, A. H.: Atomization and Sprays. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1989.
- [2] Mugele, R.-Evans, H. D.: Droplet Size Distributions in Sprays. Ind. Eng. Chem., Vol. 43 (1951), št. 6, str. 1317-1324.
- [3] Lekić, A.-Bajramović, R.-Ford, J. D.: Droplet Size Distribution: An Improved Method for Fitting Experimental Data. The Canadian Jour. of Chem. Eng., Vol. 54 (1976), str. 399-402.
- [4] Chin, J.S.-Lefebvre, A. H.: Some Comments on the Characterization of Drop-Size Distributions in Sprays. Proceedings of the 3rd International Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, London (1985). Poročilo Štev. IVA/1.
- [5] Bhatia, J. C.-Dominik, J.-Durst, F.-Tropea, C.: Phase-Doppler-Anemometry and the Log-Hyperbolic Distribution Applied to Liquid Sprays. Part. Syst. Charact. Vol. 5 (1988), str. 153-164.
- [6] Tishkoff, J. M.-Ingebo, R. D.-Kennedy, J. B.: Liquid Particle Size Measurement Techniques. ASTM special Technical Publication 848, Kansas City (1983).
- [7] Medenblick, H. J. Th.: Vergleich von Tropfengrößen-Meßverfahren. Interna publikacija št. 771, tovarne Lechler, Fellbach (1977).
- [8] Nieuwkamp, W. Ch.: Messen von Tropfen > 50 μm . Interna publikacija št. 852, tovarne Lechler, Fellbach (1985).
- [9] Voss-Spilker, P.: Ermittlung von Tropfengrößenverteilung zur Bestimmung eines mittleren Tropfen Durchmesser aus Betriebsdaten an Zweistoffzerstäuberdüsen. Disert. TU Clausthal. (1980).
- [10] Ringes, H.: Tropfengrößenverteilung bei Zerstäuben. Disert. ETH Zürich. (1967).
- [11] Kumar, A.: Hydrodynamics and Mass Transfer in Kühni Extractor. Disert. ETH Zürich. (1985).
- [12] Bronstein, J. N., Semendjajev, K. A.: Matematični priručnik za inženirje in slušatelje tehniških visokih šol. Prevedel A. Žabkar. Tehniška založba Slovenije v Ljubljani. 3. natis. (1970).

Naslov avtorjev: mag. Ivo Bajsic, dipl.inž.,
Bogdan Blagojević, dipl.inž.,
Fakulteta za strojništvo,
Murnikova 2, Ljubljana